数理解析研究所講究録
第 721 巻 1990 年 160-175

Semi-abel多様体に付随したMilnor型のK群について

東京大学理学部　染川睦郎(Mutsuro Somekawa)

紹介

体k上のsemi-abel多様体$G_1, \cdots, G_r$に対してMilnor型のK群$K(k, G_1 \cdots G_r)$を定義し、その性質を調べて整数論への応用を示すことが目的である。このK群はある関係を満たしているsymbol $\{g_1, \cdots, g_r\}_{E/k}$ (E/k: 有限次拡大, $g_i \in G_i(E_i)$を動く) により生成されるabel群である。$G_1 = \cdots = G_r = \mathbb{G}_m$の時が従来のMilnorのK群である。

$K(k, G_1 \cdots G_r)$はmotiefの哲学を背景にして次のように言い換えられると思われる。Beilinson, MacPherson and Schechtmanは[4]の中でMilnorのK群$K_r^M(k)$はk上のmotiefの圏M_kにおける高次のextensionを使って$\mathrm{Ext}^r_{M_k}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(r))$と表現できると予想している。この拡張として$G_i$に対する1-motief $G_i[-1]$ (cf. Deligne [5])を使い$\mathrm{Ext}^r_{M_k}(\mathbb{Z}, G_1[-1] \otimes \cdots \otimes G_r[-1])$を考えられるがこれが$K(k, G_1 \cdots G_r)$と一致すると思われる。(ただし$\mathbb{Z}(r)$, $\mathrm{Ext}^r_{M_k}$等に現在より定

義はなく現在まだ正当化されていない。)

記号として次を使う。abel群Gと整数$n\geqq 1$に対して，${}_nG$ (resp. G/n)でn倍写像のkernel (resp. cokernel)を示す。scheme Xに対し$X^i=\{x\in X;\ \dim(\mathcal{O}_{X,x})=i\}$とおく。

§1　定義と基本的性質

(1.1)　K群の定義に必要とされるlocal symbolについてまず構成する。kを体とし、Kをk上の超越次数1の有限生成拡大体、Gをk上のsemi-abel多様体とする。この時Kの素点vに対してlocal symbol map $\partial_v: G(K_v)\times K_v^\times \longrightarrow G(k(v))$を定義する。ここで$K_v$は$K$の$v$での完備化、$k(v)$はその剰余体である。$k$上のgroup schemeの完全系列$0\to T\to G\to A\to 0$、$T$はtorus，$A$はabel多様体、がある。有限次不分岐Galois拡大L/K_vで、Lの剰余体Fにおいて$T\times_k F\simeq \mathbb{G}_m^{\oplus n}$となる拡大がある。この時次の完全系列の可換図式ができる。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & T(O_L) & \longrightarrow & G(O_L) & \longrightarrow & A(O_L) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \wr\!\| & & \\
0 & \longrightarrow & T(L) & \longrightarrow & G(L) & \longrightarrow & A(L) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ord}_L} & & \downarrow{\scriptstyle (r_L^1,\cdots,r_L^n)} & & & & \\
 & & \mathbb{Z}^{\oplus n} & = & \mathbb{Z}^{\oplus n} & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

ここでO_LはLの付値環である。任意の$g\in G(K_v)$, $f\in K_v^\times$に対し

$$h_i=(1,\cdots,1,\overset{i}{f},1,\cdots,1)\in T(L)$$

$$\varepsilon(g,h) = ((-1)^{\mathrm{ord}_L(h) r_L^1(g)}, \cdots, (-1)^{\mathrm{ord}_L(h) r_L^n(g)}) \in T(O_L) \subset G(O_L)$$

とおく。この時

$$\tilde{\partial}_v(g,h) = \varepsilon(g,h)\, g^{\mathrm{ord}_L(h)} \prod_{i=1}^{n} h_i^{-r_L^i(g)}$$

は $G(O_L)$ の元である。$\partial_v(g,h)$ は自然な写像 $G(O_L) \longrightarrow G(F)$ による $\tilde{\partial}_v(g,h)$ の像として定義する。$\partial_v(g,h)$ は $Gal(F/k(v))$ の作用に不変故 $G(k(v))$ に属し、L 及び torus の $\mathbb{G}_m^{\oplus n}$ への同型の選び方によらずに定義されている。

(1.2) 体 k 上の semi-abel 多様体 $G_1 \cdots G_r$ に対して $K(k\, G_1 \cdots G_r)$ を symbol $\{g_1 \cdots g_r\}_{E/k}$ により生成される abel 群として定義する。ここで E は k の有限拡大を動き、$g_i \in G_i(E)$ は任意の元で、symbol は次の relation (1.2.0) (1.2.1) (1.2.2) を満足する。

(1.2.0) 任意の E と i に対して

$$\{g_1, \cdots, g_i + g_i', \cdots, g_r\}_{E/k}$$
$$= \{g_1, \cdots, g_i, \cdots, g_r\}_{E/k} + \{g_1, \cdots, g_i', \cdots, g_r\}_{E/k}$$

(1.2.1) 有限次拡大 $k \hookrightarrow E_1 \overset{j}{\hookrightarrow} E_2$ に対し、$g_{i_0} \in G_{i_0}(E_2)$, $g_i \in G_i(E_1)$ $(i \neq i_0)$ をとる。この時

$$\{j^*(g_1), \cdots, g_{i_0}, \cdots, j^*(g_r)\}_{E_2/k} = \{g_1, \cdots, N_{E_2/E_1}(g_{i_0}), \cdots, g_r\}_{E_1/k}$$

ここで N_{E_2/E_1} は norm 準同型、j^* は自然な単射である。

(1.2.2) K を k 上の超越次数 1 の有限生成拡大体とする。$h \in K^\times$, $g_i \in G_i(K)$ $(i=1, \cdots, r)$ は次の仮定を満たすとする。k 上の任意の素点 v に対して、ある $i(v)$ が存在して $i \neq i(v)$ なるすべて

の i に対して $g_i \in G_i(O_v)$ とする。O_v は v での付値環である。

この時 $\displaystyle\sum_{v:\text{素点}} (-1)^{i(v)} \{g_1(v), \cdots, \partial_v(g_{i(v)}, h), \cdots, g_r(v)\}_{k(v)/k} = 0$

$g_i(v)$ は g_i の自然な写像 $G_i(O_v) \to G_i(k(v))$ による像である。

(1.3) 体の拡大 $j : k \hookrightarrow k'$ に対し従来のMilnorのK群同様にK群の間に準同型を定義する。$G_1 \cdots G_r$ は k 上のsemi-abel多様体とする。有限次拡大 E/k に対し $k' \otimes_k E = \bigoplus_{e=1}^{n_E} A_e$ とかく。A_e は k' 上長さ e_e のArtin局所環で、その剰余体を E'_e とすると E'_e は k' の有限次拡大である。この時、

$$j^* : K(k, G_1, \cdots, G_r) \longrightarrow K(k', G_1 \times_k k', \cdots, G_r \times_k k')$$

を $j^*(\{g_1, \cdots, g_r\}_{E/k}) = \sum_{n=1}^{n_E} e_e \{j_e^*(g_1), \cdots, j_e^*(g_r)\}_{E'_e/k'}$ により定義する。ここで $j_e : E \hookrightarrow E'_e$ は j から誘導された自然な写像である。

j が有限次拡大の時は更にnorm準同型

$$N_{k'/k} : K(k', G_1 \times_k k', \cdots, G_r \times_k k') \to K(k, G_1 \cdots G_r)$$

を $N_{k'/k}(\{g_1 \cdots g_r\}_{E/k'}) = \{g_1 \cdots g_r\}_{E/k}$ により定義する。この2つの準同型はMilnorのK群の場合と同様な性質をもつ。

次の定理はこのK群が従来のMilnorのK群の一般化であることを主張している。記号として $K_r(k, \mathbb{G}_m) = K(k, \overbrace{\mathbb{G}_m \cdots \mathbb{G}_m}^{r\text{コ}})$ とおく。

定理(1.4) k を体とする。この時次の自然な同型が存在する。

$$K_r(k, \mathbb{G}_m) \simeq K_r^M(k)$$

$K_r^M(k)$は体kのMilnorのK群を示す。

略証　$\alpha : K_r^M(k) \longrightarrow K_r(k, \mathbb{G}_m)$ を $\alpha(\{a_1 \cdots a_r\}) = \{a_1 \cdots a_r\}_{k/k}$ $(a_i \in k^\times)$ により定義したい。このためにはある$i<j$に対して$a_i + a_j = 1$の時$\{a_1 \cdots a_r\}_{k/k} = 0$を言えばよいが、relation (1.2.2) において $K = k(T)$, $h = T^{-1}$, $g_i = 1 - a_i T^{-1}$, $g_j = 1 - T$, $g_\ell = a_\ell$ $(\ell \neq i, j)$ とおくと(1.2.2)の仮定を満たして

$$\{g_1, \cdots, \partial_v(g_{i(v)}, h), \cdots, g_{r(v)}\}_{k(v)/k} = \begin{cases} \{a_1 \cdots a_r\}_{k/k} & \text{if } v = (T - a_i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるので、これから示される。$\beta : K_r(k, \mathbb{G}_m) \longrightarrow K_r^M(k)$ を $\beta(\{a_1 \cdots a_r\}_{E/k}) = N_{E/k}(\{a_1 \cdots a_r\})$ により定義できる。ここで$N_{E/k}$はMilnorのK群のnorm準同型である。(Bass and Tate [1], Kato [6])
$\beta \circ \alpha = id$ とαの全射またはβの単射を示し証明が完了する。

K群とétale cohomologyとの関係を示そう。

命題(1.5)　kを体、$G_1, \cdots, G_r$をk上のsemi-abel多様体とする。nをkの標数と素な正の整数として、この時自然な準同型

$$c : K(k, G_1 \cdots G_r)/n \longrightarrow H^r_{et}(k, {}_nG_1 \otimes \cdots \otimes {}_nG_r)$$

が存在して次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} G_1(k) \otimes \cdots \otimes G_r(k) & \xrightarrow{\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_r} & H^1_{et}(k, {}_nG_1) \otimes \cdots \otimes H^1_{et}(k, {}_nG_r) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \cup \\ K(k, G_1 \cdots G_r) & \xrightarrow{c} & H^r_{et}(k, {}_nG_1 \otimes \cdots \otimes {}_nG_r) \end{array}$$

ここでαはK群の定義から誘導される準同型であり、β_iは

étale site 上の完全系列 $0 \to {}_nG_i \to G_i \xrightarrow{n} G_i \to 0$ から得られる準同型 $G_i(k) \to H^1_{et}(k, {}_nG_i)$ である。

証明. 準同型 C を $C(\{a_1 \cdots a_r\}_{E/k}) = N_{E/k}(\beta_1(a_1) \cup \cdots \cup \beta_r(a_r))$ により定義するとよい。

注意(1.6) (1.5)の C は単射であると予想される。これは紹介にある記号を使って、triangle

$$G_1[-1] \otimes \cdots \otimes G_r[-1] \xrightarrow{n} G_1[-1] \otimes \cdots \otimes G_r[-1] \longrightarrow {}_nG_1 \otimes \cdots \otimes {}_nG_r$$

が k 上の motief の圏 M_k に存在すると思われ、また $Ext^r_{M_k}(\mathbb{Z}, {}_nG_1 \otimes \cdots \otimes {}_nG_r)$ は $H^r_{et}(k, {}_nG_1 \otimes \cdots \otimes {}_nG_r)$ に同型と思われるからである。$G_1 = \cdots = G_r = \mathbb{G}_m$ の時は更に C は同型である、すなわち $K^M_r(k)/n \cong H^r_{et}(k, \mathbb{Z}/n(r))$ と予想される。$r = 2$ の場合の同型は Merkuriev and Suslin [9] により示されている。

§2. 例. curve の $V(X)$ と albanese kernel

semi-abel 多様体として特殊なものを取った時 K 群がよく知られたある群に一致することを示す。

X を体 k 上の projective smooth curve とする。Quillen の spectral sequence $E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^p} K_{-p-q}(k(x)) \Rightarrow K_{-p-q}(X)$ から、$SK_1(X) = \mathrm{Coker}(K_2(k(X)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in X^1} K_1(k(x)))$ とおくと単射準同型 $i : SK_1(X) \hookrightarrow K_1(X)$ を得る。X は projective 故 $N : K_1(X) \longrightarrow K_1(k) = k^\times$ が存在するが、これから

$$V(X) = \mathrm{Ker}(N \circ i : SK_1(X) \longrightarrow k^\times)$$

と定義する。Blochは[2]の中でV(X)について整数論の視点から考察している。このV(X)を我々のK群を使って表現することができる。

定理(2.1) Xを体k上のprojective smooth curveで$X(k)\neq\phi$とする。JをXのjacobi多様体として、この時自然な同型

$$K(k, J, \mathbb{G}_m) \cong V(X)$$

が存在する。

注意(2.2) Bloch[2]での整数論的結果は、上の同型により、K群の言葉を使ってより一般的な形に拡張できる。これは§3 §4においてなされる。

証明の概略. $\phi : K(k, J, \mathbb{G}_m) \longrightarrow V(X)$を$\phi(\{a, b\}_{E/k}) = N_{E/k}(a\cdot b)$により定義する。ここで$a\cdot b \in V(X\times_k E) \subset K_1(X\times_k E)$は$a \in J(E) \subset K_0(X\times_k E)$と$b \in K_1(E)$のQuillenのK群の積により得られる元である。ϕのwell-defined性は(1.2.1)はQuillenのK群のprojection formulaから、(1.2.2)は次の補題とlocalization sequenceから従う。

補題(2.3) 上の記号のもと、Kをk上の超越次数1の有限生成拡大体とする。この時Kの素点vに対して

$$\begin{array}{ccc}
J(K)\otimes K_2(K) & \longrightarrow & K_2(X\times_k K) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle P_v\otimes\partial_v} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_v} \\
J(k(v))\otimes K_1(k(v)) & \longrightarrow & K_1(X\times_k k(v))
\end{array}$$

は可換である。∂_vはboundary map, P_vは自然な写像、横は

K群の積である。

次の完全系列が存在する

$$K_2(k(X)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in X^1}^{\deg\sim 0} k(x)^\times \longrightarrow V(X) \longrightarrow 0$$

$x_0 \in X(k)$ を固定して $\hat{\varphi} : \bigoplus_{x\in X^1}^{\deg\sim 0} k(x)^\times \longrightarrow K(k, J, \mathbb{G}_m)$ を $\hat{\varphi}((f_x)_x) = \sum_x \{x - x_0, f_x\}_{k(x)/k}$ とおくと $\hat{\varphi}\circ\partial = 0$ 故 $\varphi : V(X) \longrightarrow K(k, J, \mathbb{G}_m)$ を得る。φ の全射と $\Phi\circ\varphi = id$ が示せ証明が完了する。 □

k を代数的閉体、E_1, E_2 を k 上の elliptic curve とする。この時、abel 多様体 $E_1 \times_k E_2$ の albanese kernel が我々の K 群を使って表現できる。代数多様体 X に対し $A_0(X)$ は Chow 群 $CH_0(X)$ の次数 0 の元からなる部分群を示すとする。0_i により $E_i(k)$ の単位元をあらわす。

$\gamma : K(k, E_1, E_2) \longrightarrow A_0(E_1 \times_k E_2)$ を $x = \{e_1\ e_2\}_{k/k} \in K(k, E_1, E_2)$ に対して $(e_i) - (0_i) \in A_0(E_i)$ $(i=1,2)$ の積により $\gamma(x) = ((e_1) - (0_1)) \cdot ((e_2) - (0_2))$ と定義する。(γ の well-defined は容易に示せる。)

この時次の定理が成り立つ。

定理(2.4)　上の記号のもと次の分解完全系列が存在する。

$$0 \longrightarrow K(k, E_1, E_2) \xrightarrow{\gamma} A_0(E_1 \times_k E_2) \xrightarrow{alb} E_1(k) \times E_2(k) \longrightarrow 0$$

ここで alb は abel 多様体 $E_1 \times_k E_2$ の albanese 準同型である。

略証. $*$ により abel 多様体の chow 群の Pontryagin 積を示す。

$I = \ker(alb)$ とおくと $I = A_0(E_1 \times_k E_2) * A_0(E_1 \times_k E_2)$ である (Bloch [3])

$\gamma(\{e_1\ e_2\}_{k/k}) = ((e_1\ 0_2) - (0_1\ 0_2)) * ((0_1\ e_2) - (0_1\ 0_2))$

故 $\mathrm{Im}(\delta) \subseteq I$ である。$\delta : A_0(E_1 \times_k E_2) \longrightarrow K(k, E_1\ E_2)$ を $A_0(E_1 \times_k E_2)$ の生成元 $(e_1\ e_2) - (0_1\ 0_2)$ $(e_i \in E_i(k))$ に対して $\delta((e_1\ e_2) - (0_1\ 0_2)) = \{e_1, e_2\}_{k/k}$ と定義できる。この時 $\delta_0 : I \to A_0(E_1 \times E_2) \xrightarrow{\delta} K(k, E_1\ E_2)$ は全射で、$\delta \circ \delta_0 = id$ 故 δ_0 は同型となり証明が完了する。 □

§3 局所体

局所体上の semi-abel 多様体と $\mathbb{G}_m$ による K 群についてその性質を調べる。k を非アルキメデス局所体で標数 0，O_k を k の整数環、F を k の剰余体とする。$G = Gal(\bar{k}/k)$ とおく。A を k 上の semi-abel 多様体、$T(A)$ を A の Tate module とする。k 上の local duality によって

$$H^2_{et}(k, {}_nA(1)) \cong H^0_{et}(k\ {}_nA^\vee)^\vee \cong {}_nA(\bar{k})_G$$

を得る。ここで $(\ )_G$ は co-invariant を示す。(1.5) の準同型と上の同型から、projective limit をとって

$$c : K(k, A, \mathbb{G}_m) \longrightarrow T(A)_G$$

を得る。

Tate module $T(A)$ に対し Bloch [2] と同様にして次が示せる。

命題 (3.1) A は potential good reduction と仮定する（すなわち A の abel 部分の k のある有限次拡大体への base change が good reduction である）。この時、$T(A)_G$ は有限である。

次の定理は A が k 上の projective smooth curve の jacobi 多様体の

時 $V(X)$ を使って示した結果の一般化である。

定理(3.2)　A を局所体 k 上の potential good reduction をもつ semi-abel 多様体とする。この時、$c: K(k, A, \mathbb{G}_m) \longrightarrow T(A)_G$ は全射である。

略証。k を適当な有限次拡大でおき換えて示せば十分なことを注意しておく。$A = \mathbb{G}_m$ の時 $K_2(k) \longrightarrow \mu(k) \cong T(\mathbb{G}_m)_G$ は全射故 A が good reduction をもつ abel 多様体として示せばよい。

$c: A(k) \otimes k^\times \longrightarrow T(A)_G$ が全射でないと仮定して矛盾を示そう。この場合、ある素数 p と全射準同型 $f: T(A)_G \longrightarrow \mathbb{Z}/p$ があって $f \circ c = 0$ となる。f に対応する k 上の abel 多様体の isogney を

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow \hat{A} \longrightarrow A \to 0$$

とすると、これから完全系列

$$0 \to \mathbb{Z}/p \to \hat{A}(k) \to A(k) \xrightarrow{\delta} H^1_{et}(k, \mathbb{Z}/p)$$

を得る。この時次は可換である。

$$\begin{array}{ccc} B(k) \otimes k^\times & \xrightarrow{c} & T(A)_G \\ {\scriptstyle \delta\otimes\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H^1_{et}(k, \mathbb{Z}/p) \otimes H^1_{et}(k, \mathbb{Z}/p(1)) & \xrightarrow[\cup]{} & \mathbb{Z}/p \end{array}$$

ここで β は boundary map である。$f \circ c = 0$ 故 $\delta = 0$ を得る。

A は good reduction 故 $\hat{A}$ もそうである。generic fiber として $A, \hat{A}$ をもつ O_k 上の abelian scheme を $\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}$ とおく。$\mathcal{A}_F$ と $\hat{\mathcal{A}}_F$ は isogeny 故 $\mathcal{A}_F(F)$, $\hat{\mathcal{A}}_F(F)$ の個数は等しい(Lang [8])。これから $\mathcal{A}(O_k/m^n)$

と $\hat{A}(O_k/m^n)$ の個数は任意の n に対し等しいことがわかる。ここで m は O_k の極大 ideal である。一方 $\hat{A}(k) \twoheadrightarrow A(k)$ から任意の n に対し $\hat{A}(O/m^n) \twoheadrightarrow A(O/m^n)$ である故，$\hat{A}(k) \simeq A(k)$ を得る。これは矛盾。 $\square$

注意(3.3) 一般に k 上の semi-abel 多様体 A に対し、n を $\#(T(A)_{G\,tor})$ でわれる正の整数とした時 $K(k, A, \mathbb{G}_m)/n \simeq T(A)_{G\,tor}$ と思われる。A が curve の jacobi 多様体の時は Saito [17] で示されている。

§4 Moore-Bloch の完全系列

次の記号を使う。

k：数体，$G = Gal(\bar{k}/k)$　素点 v に対し $G_v = Gal(\bar{k}_v/k_v)$

A：k 上の semi-abel 多様体　T：A の Tate module

S：すべての k のアルキメデス素点と A が bad reduction なすべての素点を含む k の素点の有限集合

v が good reduction をもつ素点の時 T_{G_v} は有限、また $T_{G_v} \twoheadrightarrow T_G$ 故に T_G は有限である。m を $\# T_G$ によってわれるある正の整数とする。(1.5) の準同型からつくられる $K(k_v, A_v, \mathbb{G}_m) \to T_{G_v}$ ($A_v = A \times_k k_v$) と自然な写像 $K(k, A, \mathbb{G}_m) \to K(k_v\, A_v\, \mathbb{G}_m)$ から

$$\theta : K(k, A, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \prod_{v \notin S} T_{G_v} \oplus \prod_{v \in S} K(k_v\, A_v\, \mathbb{G}_m)/m$$

と下の R を定義することができる。

定理(4.1) 上の記号のもと次の完全系列が存在する。

$$K(k,A,\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\theta} \bigoplus_{v \notin S} T_{G_v} \oplus \bigoplus_{v \in S} K(k_v, A_v\, \mathbb{G}_m)/m \xrightarrow{R} T_G \to 0$$

略証. O_kをkの整数環とする。まずθの像が直和に含まれることを示そう。Spec(O_k) の open subscheme Uをとって$U \ni v$に対して

$$T(A_v)_{G_v} \simeq \mathcal{A}_{F_v}(F_v)$$

となるようにできる。ここで$\mathcal{A}$はU上の group scheme でその generic fiberがAであるものとする。F_vはvでのk_vの剰余体である。$K(k\ A\ \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\theta} T_{G_v} \simeq \mathcal{A}_{F_v}(F_v)$ は local symbol の定義と同様の方法で計算されるので、これから $\mathrm{Im}(\theta) \subset \bigoplus$ を得る。

$R \circ \theta = 0$ は G-module ${}_mA(1)$に対する Tate-Poitou の完全系列

$$H^2_{et}(k\ {}_mA(1)) \longrightarrow \bigoplus_{v:\text{real}} H^2_{et}(k,{}_mA(1)) \oplus \bigoplus_{v:\text{non arch}} {}_mA(\bar{k})_{G_v}$$
$$\longrightarrow {}_mA(\bar{k})_G \to 0$$

から従う。

$\mathrm{Im}(\theta) = \ker(R)$を以下示す。次の補題は Kato and Saito [7] による。

補題(4.2) 上の記号のもと、Pを素点の有限集合として、任意の正の整数nに対して、自然な準同型

$$K(k, A, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \bigoplus_{v \in P} K(k_v, A_v, \mathbb{G}_m)/n$$

は全射である。

任意の k の modulus $\mathfrak{m}=\sum_v m_v v$ に対して

$$K(k,A,\mathbb{G}_m,\mathfrak{m})=\mathrm{Ker}\Big(K(k\,A\,\mathbb{G}_m)\longrightarrow\prod_{v\in \mathrm{supp}(\mathfrak{m})}K(k_v,A_v,\mathbb{G}_m)/n\Big)$$

とおく。$\mathrm{Im}(\theta)=\mathrm{Ker}(R)$ を示すためには (3.2) と上の補題から任意の素数 ℓ に対して、ある modulus $\mathfrak{m}=\sum m_v v$ を $n\,|\,m_v$ ($\forall v$) かつ $\mathrm{supp}(\mathfrak{m})$ は S と ℓ をわるすべての素点を含むように取る時、

$$(4.3)\quad K(k,A,\mathbb{G}_m,\mathfrak{m})\xrightarrow{\theta}\bigoplus_{v\notin \mathrm{supp}(\mathfrak{m})}T_\ell\,G_v\xrightarrow{R}T_\ell\,G\to 0$$

が完全系列であることを示せば十分である。(4.3)の完全性は Bloch[2] と同様の方法で示せる。概略を示す。

open subscheme $V\subset \mathrm{Spec}(O_k)$ 上 group scheme $\mathcal{A}$ をその generic fiber が A であるようにとる。そして V に属さないすべての素点の集合は $\mathrm{supp}(\mathfrak{m})$ であると仮定してよい。一般に $T_\ell^{et}(A_v)_{G_v}\simeq\mathcal{A}_{F_v}(F_v)(\ell)$ であるが、$v\notin \mathrm{supp}(\mathfrak{m})$ に対しては $v\nmid\ell$ 故

$$\bigoplus_{v\notin \mathrm{supp}(\mathfrak{m})}T_\ell\,G_v\simeq\bigoplus_{v\notin \mathrm{supp}(\mathfrak{m})}\mathcal{A}_{F_v}(F_v)(\ell)$$

を得る。そこで上の左の群の元はすべて、$a_i\in\mathcal{A}(O_{v_i})$, $b_i\in k_{v_i}^\times$ $v_i(b_i)=1$, $v_i\notin \mathrm{supp}(\mathfrak{m})$ ($i=1,\cdots,r$) として $\sum_{i=1}^{r}c(\{a_i\,b_i\}_{k_{v_i}/k_{v_i}})$ と表現できる。今、素点 $t_1,\cdots,t_s\notin \mathrm{supp}(\mathfrak{m})\cup\{v_1,\cdots,v_r\}$ を固定する。近似定理により、k の有限次拡大 E と V 上の open subscheme $V'=\mathrm{Spec}(R)\subset\mathrm{Spec}(O_E)$ と $\tilde{a}\in\mathcal{A}(R)$ があって、$u_1,\cdots,u_{r+s}\in V'$ を選んで

$$E_{u_i}\simeq k_{v_i}\qquad \tilde{a}_{u_i}\equiv a_i\ \mathrm{mod}\ \pi_{v_i}\qquad i=1,\cdots,r$$

$$E_{u_{j+r}} \doteqdot k_{t_j} \quad \hat{\alpha}_{u_{j+r}} \equiv 0 \mod \pi_{t_j} \quad j=1,\cdots,s$$

とできる。更にChebatarevの密度定理と類体論を使って、$t_1,\cdots,t_s$ と $\hat{b} \in E^\times$を選んで

$$\theta(\{\hat{\alpha},\hat{b}\}_{E/k}) = \sum_{i=1}^{s} c(\{a_i, b_i\}_{k_{v_i}/k_{v_i}}) + \sigma$$

とした時に、あるv_0で $\sigma \in T_{\ell G_{v_0}} = T_{\ell G}$ とできる。このことは(4.3)の完全性を示している。 $\square$

定理(4.1)において $A = \mathbb{G}_m$ とおくと $T(\mathbb{G}_m)_{G_v} = \mu(k_v)$ 故に次の系を得る。

系(4.4) (Moore[10]) 次の完全系列が存在する。

$$K_2(k) \longrightarrow \bigoplus_{v:\text{not complex}} \mu(k_v) \longrightarrow \mu(k) \to 0$$

定理(4.1)において A として curve の jacobi多様体をとることにより(2.1)と合わせ次を得る。

系(4.5)(Bloch[2], Kato and Saito[7]) Xをk上projective, smooth curveで、$X(k) \neq \phi$ とする。この時JをXのjacobi多様体として、次の完全系列が存在する。

$$V(X) \longrightarrow \bigoplus_{v \notin S} T(J)_{G_v} \oplus \bigoplus_{v \in S} V(X \times_k k_v)/m \longrightarrow T(J)_G \to 0$$

定理(4.1)を使って Colliot-Thélène と Raskind は次の定理を最近しめしている。

定理 (Colliot-Thelene and Raskind)

Xをk上のsmooth projective geometrically connected varietyとし

て、$H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ と仮定する。この時、$CH^2(X)_{tor}$ は有限である。

A として X の Picard 多様体を取った時の結果が使われている。

References

[1] H. Bass and J. Tate "The Milnor ring of global field", Lecture notes in Math. 342 Springer (1973), 349−446.

[2] S. Bloch "Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surface", Ann. of Math. 114 (1981), 229 − 266.

[3] S. Bloch "Some elementary theorems about algebraic cycles on abelian varieties", Inv. Math. 37 (1976), 213 − 228.

[4] A. Beilinson, P. MacPherson and V. Schechtman "Notes on motivic cohomology", Duke Math. J. 54 (1987), 679 − 710

[5] P. Deligne "Theorie de Hodge III" Publ. Math. I.H.E.S. 44 (1974), 5 − 78

[6] K. Kato "A generalization of local class field theory by using k-groups II" J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sec. IA 27 (1983) 603 − 683

[7] K. Kato and S. Saito "Unramified class field theory of arithmetical surfaces" Ann. of Math. 118 (1983) 241 − 275

[8] S. Lang "Algebraic groups over finite fields" Am. J. Math.

78 (1956) 555 - 563

[9] A. S. Merkuriev and A. A. Suslin "K-cohomology of Severi-Brauer varieties and norm residue homomorphism" Math. U. S. S. R. Izvestiya 21 (1983) 307 – 340

[10] C. Moore "Group extension of p-adic linear groups" Publ. Math. I. H. E. S. 35 (1969) 251 – 281

[11] D. Quillen "Higher algebraic K-theory I" Lecture notes in Math. 341 Springer (1973) 251 – 147

[12] S. Saito "Class field theory of curves over a local field" Journal of Number Theory 21 (1985) 44 – 80

[13] J. Milnor "Introduction to Algebraic K-theory" Ann. of Math Studies no. 72 Princeton University press, 1971.