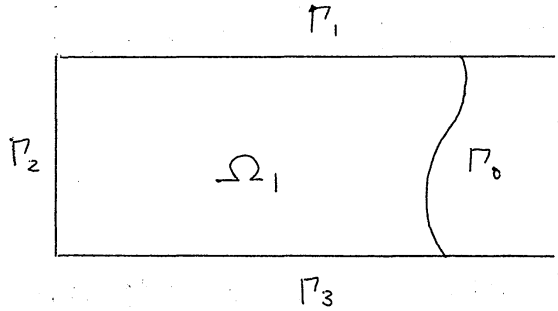
数理解析研究所講究録
第 724 巻 1990 年 113-124

粘性流体の境界の捕捉に関する話題

九大理　山本野人(Nobito Yamamoto)

序、　移動する境界の捕捉の方法は，境界を直接追跡する方法と，固定領域の中で問題を解く方法とに大別される。境界が切れたり尖ったり，あるいは消滅したりする場合を含む問題では第二の方法が扱い易そうに思える。ここでは非圧縮流体に関するNavier-Stokes方程式の移動境界問題について，固定領域で扱う方法を探る。

I、問題



境界Γ_i $(i=0,1,2,3)$で囲まれた二次元領域Ω_1において，Navier-Stokes方程式

(I-1) $$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \sigma_{ij,j}$$

(I-2) $$u_{j,j} = 0$$

$\quad in \ \Omega_1$

をみたす速度 $u(x,t)$，圧力 $p(x,t)$ を求めたい。ただし，

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\mu\, e_{ij} \quad \text{: stress tensor}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{: rate of strain tensor}$$

で，ρ は密度，μ は粘性である。境界条件は，

(I-3) $\qquad \sigma_{ij} n_j = 0 \qquad$ on Γ_0

(I-4) $\qquad u = \tau \qquad$ on Γ_1, Γ_3

(I-5) $\qquad u = f \qquad$ on Γ_2

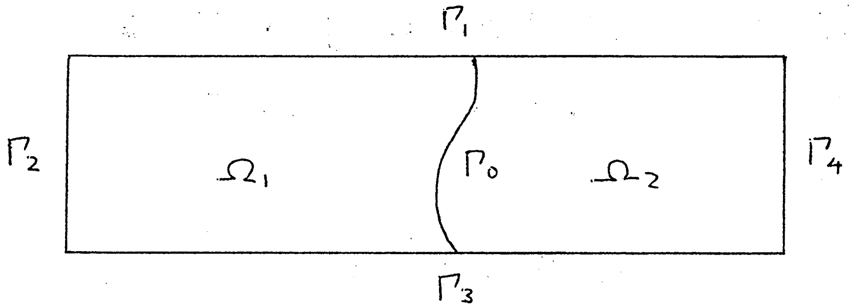
f と τ は与えられていて，f は Ω_1 に流入する速度，τ は Γ_1, Γ_3 の接線方向を向いた速度とする。Γ_0 は移動境界で，Γ_0 上の速度 u に従って動いていく。すなわち，Γ_0 上の点の位置ベクトルを $x(t)$ とすると，

(I-6) $\qquad \dfrac{Dx}{Dt} = u(x,t) \qquad$ on $\Gamma_0(t)$

(I-1)～(I-6)をみたす u, p, $\Gamma_0(t)$ を求める問題を［I］としよう。

II. 二相問題

［I］を固定領域で解くために，外部領域に密度と粘性の小さな流体の存在を考えて，二相問題として扱うことを試みる。



(II-1) $$\rho_1 \frac{Du_i}{Dt} = \sigma_{ij,j} \quad \text{in} \quad \Omega_1$$

(II-2) $$\rho_2 \frac{Du_i}{Dt} = \sigma_{ij,j} \quad \text{in} \quad \Omega_2$$

(II-3) $$u_{j,j} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

ρ_1, ρ_2 はそれぞれ Ω_1, Ω_2 の中で一定で，

$$\rho_2 = \varepsilon \rho_1$$

また粘性 μ は，定数 ν によって

$$\mu = \begin{cases} \rho_1 \nu & \text{in} \quad \Omega_1 \\ \rho_2 \nu & \text{in} \quad \Omega_2 \end{cases}$$

とあらわされるものとする。圧力 P を，Ω_1, Ω_2 それぞれの中で，変数 p_1, p_2 によって

$$P = \begin{cases} \rho_1 p_1 & \text{in} \quad \Omega_1 \\ \rho_2 p_2 & \text{in} \quad \Omega_2 \end{cases}$$

と書く。すると stress tensor は，

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \rho_1(-p_1\delta_{ij} + \nu e_{ij}) \equiv \rho_1 s_{ij} & \text{in} \quad \Omega_1 \\ \rho_2(-p_2\delta_{ij} + \nu e_{ij}) \equiv \rho_2 t_{ij} & \text{in} \quad \Omega_2 \end{cases}$$

とあらわされる。Γ_0 上では $\sigma_{ij}n_j$ の連続性

(II-4) $$\rho_1 s_{ij} n_j = \rho_2 t_{ij} n_j \quad \text{on} \ \Gamma_0$$

を要請する。他の境界では[I]と同じ条件

(II-5) $\quad u = \tau \quad$ on Γ_1, Γ_3

(II-6) $\quad u = f \quad$ on Γ_2

を課し，Γ_4では自由境界条件

(II-7) $\quad \sigma_{ij} n_j = 0 \quad$ on Γ_4

または，Γ_2と同じDirichlet条件

(II-7′) $\quad u = f$

を考えることにする。移動境界Γ_0は[I]と同様

(II-8) $\quad \frac{Dx}{Dt} = u$

によって動く。(II-1)～(II-8)をみたすu, p_1, p_2を求める問題を[II]としよう。(II-8)からも要請されることだが，uとしてはΩ全体でH^1程度の連続性を持つものを想定している。

さて，[I],[II]がともに解をもつと仮定したとき，εを非常に小さくすれば，[II]の解は[I]の解に近づくだろうか。このことは，Ω_1の流体にとって，Γ_0上の境界条件(II-4)が(I-3)に近づくかどうかに懸っていると思われる。(II-4)の両辺をμ_1で割れば，

$$s_{ij} n_j = \varepsilon\, t_{ij} n_j$$

したがって，$\varepsilon \to 0$としたときに$t_{ij} n_j$が有界であれば，(II-4)は，Ω_1の流体に対する(I-3)に近づく。今のと

ころ，これについて厳密な議論をする準備はないが，数値実験からは，このことを示唆する結果が得られている。そこで，$\varepsilon \to 0$ のとき，$|s_{ij}n_j| \to 0$ となるという予想を立てて，その根拠について考えてみよう。

まず，Ω_1 の流体が Ω_2 の流体から受ける応力 $\sigma_{ij}n_j$ は、Ω_2 の流体の密度・粘性が小さくなるにつれて増大することはないだろうと考えられる。すなわち，

$$^{\exists}M > 0 \quad \text{s.t.} \quad |s_{ij}n_j| < M$$

しかし，Ω_2 の流体の密度・粘性が小さくなると，Ω_1 の流体から受ける慣性力の影響の増大と粘性抵抗の減少によって，Ω_2 での速度の変化が増し，その結果 $|t_{ij}n_j|$ が増大して，$|s_{ij}n_j|$ の 0 への収束を妨げるかもしれない。これについては次の様に考える。Ω_1 の流体に対しては，

(II-9) $$\frac{Du_i}{Dt} = s_{ij,j} \quad \text{in } \Omega_1$$

(II-10) $$u_{j,j} = 0 \quad \text{in } \Omega_1$$

(II-11) $$u = \tau \quad \text{on } \Gamma_1, \Gamma_3$$

(II-12) $$u = f \quad \text{on } \Gamma_2$$

が成り立つ。Γ_0 上の $s_{ij}n_j$ の値を $\mathcal{S}_\varepsilon$ と書くと，

(II-13) $$s_{ij}n_j = \mathcal{S}_\varepsilon \quad \text{on } \Gamma_0$$

逆に Ω_1 で (II-9)～(II-13) をみたす u, p_1 を求める移動境界問題を考えると，その解に対する ε の影響は，

(Ⅱ-13)を通してのみ与えられる。そこで，Γ_0上でのデータs_εが有界ならば，(Ⅱ-9)〜(Ⅱ-13)の解uは，もし存在すれば有界だ，と仮定することは自然だろう。この仮定が実際に成り立つことが示されれば，[Ⅱ]の解uのΓ_0上での値（これをgと書く）は有界だと考えることができる。このとき，Ω_2の流体に対して，

(Ⅱ-14) $$\frac{Du_i}{Dt} = t_{ij,j} \quad \text{in} \quad \Omega_2$$

(Ⅱ-15) $$u_{j,j} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_2$$

(Ⅱ-16) $$u = \tau \quad \text{on} \quad \Gamma_1, \Gamma_3$$

(Ⅱ-17) $$t_{ij} n_j = 0 \quad \text{or} \quad u = f \quad \text{on} \quad \Gamma_4$$

(Ⅱ-18) $$u = g \quad \text{on} \quad \Gamma_0$$

が成り立つ。(Ⅱ-14)〜(Ⅱ-15)をみたすu，p_2を求める問題を考えよう。今度は，Γ_0の動きは(Ⅱ-18)によって予め分かっている。この問題に対しても，これがもし解を持てば，Γ_0上のデータgが有界ならば解も有界だと仮定するのは不自然ではない。そこで，$t_{ij}n_j$の有界性が予想され，はじめの予想を立てた根拠となるのである。

（p_2の不定性を除くうえでは，(Ⅱ-7)の形の自然境界条件の方が，都合が良いように思う。）

Ⅲ. 境界条件の取り込み

適当な試験関数の空間X，Mを用いて，[Ⅱ]の弱形式

を考える。$(f, g) = \int_\Omega fg\,dx$ として，

(Ⅲ-1) $\quad (\rho \frac{Du_i}{Dt}, v_i) = -(\rho S_{ij}, v_{i,j}) \qquad \forall v \in X$

(Ⅲ-2) $\quad (u_{j,j}, \lambda) = 0 \qquad \forall \lambda \in M$

ただし，$S_{ij} = -p\delta_{ij} + \nu e_{ij}$。(Ⅲ-1)，(Ⅲ-2)をみたす u, p を求める問題を[Ⅲ]としよう。境界条件については，

$$v = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \qquad \forall v \in X$$

とすれば，[Ⅲ]は(Ⅱ-5)～(Ⅱ-7)を取り込む。ρ が Γ_0 上でステップ関数様のギャップをもつときには，[Ⅲ]は(Ⅱ-4)をも含む。というのは，

$$-(\rho S_{ij}, v_{i,j}) = -(\rho S_{ij}, v_{i,j})_{\Omega_1} - (\rho S_{ij}, v_{i,j})_{\Omega_2}$$

$$= ((\rho S_{ij})_{,j}, v_i)_{\Omega_1} + ((\rho S_{ij})_{,j}, v_i)_{\Omega_2} - \int_{\Gamma_0} v_i [\rho S_{ij}] n_j\, ds$$

となって，Γ_0 上の ρS_{ij} のギャップ $[\rho S_{ij}]$ について，

$$[\rho S_{ij}] n_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho S_{ij} n_j \big|_{\Omega_1} = \rho S_{ij} n_j \big|_{\Omega_2} \quad \text{on } \Gamma_0$$

$$\Rightarrow \quad S_{ij} n_j \big|_{\Omega_1} = \varepsilon \cdot S_{ij} n_j \big|_{\Omega_2} \quad \text{on } \Gamma_0$$

を得るからである。そこで，Γ_0 上でギャップをもつ ρ が与えられれば，固定領域 Ω で[Ⅲ]を解くことで，[Ⅱ]の弱解を得ることになる。境界の移動は，ρ の不連続点の移動が担う。[Ⅲ]に対する数値解法としては，時間方向に差分法，空間方向には有限要素法を用いて解くことが考えられる。ρ の扱いについては，T. Nakayama らが[1]

で用いている手法が有効だろうということを，東京大学の岡本氏によって示唆された。[1]では，ふたつの密度の異なる流体を，二種のマーカーを用いて区別している。マーカーの動きを追いながら，方程式を全領域で解き，有限要素を移動したり，変形・再分配したりはしていない。すなわち，u, p についてはEuler的，ρ についてはLagrange的に取り扱っている（粘性 μ の変化はない）。[Ⅲ]は粘性の変化も，ρ の変化を通じて扱っている点が異なるが，現在行っている数値計算の動向から見て，十分適用可能と考えている。

IV. ρ の平滑化

[Ⅱ]もしくは[Ⅲ]から，[Ⅰ]を近似しようという試みは，Stefan問題に対してenthalpy法を用いることと類似な点がある。enthalpy法では，移動境界の上で不連続な関数 H を導入し，H についての方程式の中に，移動境界に関する条件（Stefan条件）を取り込む。この H が今の問題の ρ に相当すると考えられる。enthalpy法では，H が不連続関数の形をもつために，数値的な取扱いのうえで困難を生ずることがしばしばある（Longworth (1975) e.t.c.）。前節で，ρ をLagrange的に取り扱う方法に言及したが，ρ を含んだ全体をEuler的に扱おうとすると，境界 Γ_0 の移動

を表わすのに

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

を解かなければならない。ρ がステップ関数の形をしているために，これは enthalpy法でのHの取り扱いと同種の困難さを含んでいる。enthalpy法でよく用いられる解決法は，Hにいくらかの連続性を持たせる方法である（Elliott (1976), Meyer (1978) e.t.c. [4] による。）。これに習って，ρ の初期値の平滑化を考えよう。$t=0$ で，

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{in } \Omega_1 \setminus B(\Gamma_0) \\ \varepsilon \rho_0 & \text{in } \Omega_2 \setminus B(\Gamma_0) \end{cases}$$

とし，Γ_0 の近傍 $B(\Gamma_0)$ では，ρ が全体で連続（もしくは微分可能）となるような値をとるものとする。解くべき方程式は，

$$[\mathrm{IV}] \begin{cases} \rho \dfrac{Du_i}{Dt} = (\rho S_{ij})_{,j} & \\ u_{j,j} = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{D\rho}{Dt} = 0 & \end{cases}$$

境界 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_4$ では，前と同じ境界条件を課す。この型の問題については，ρ が Lipschitz 連続のときに取り扱った論文がある（H. Okamoto [5]）。ただし，粘性が一定なことと，圧力を ρ で割らずに扱っていることが [IV] に相異する。

[IV]の解は，初期データに連続性をもたせる領域 $B(\Gamma_0)$ の縮小に伴って，[II]の解に近づくことが望まれる。そのためには，$\mathrm{mes}\,B(\Gamma_0(0))\to 0$ のとき，tについて一様に，$\mathrm{mes}\,B(\Gamma_0(t))\to 0$ となることが必要だが，少なくとも数値計算のうえでは，現在得ている結果から見て，これはかなりきびしい条件である。さらに，Γ_0 上の境界条件 (II-4) が，$\mathrm{mes}\,B(\Gamma_0)\to 0$ のときに再現されなければならない。

[II]の解が存在すれば，$\mathrm{mes}\,B(\Gamma_0)\to 0$ でも $\|\frac{Du}{Dt}\|_\Omega$ は有限の範囲に留まる。そこで，$B(\Gamma_0)$ の中で $\|(\rho S_{ij})_{,j}\|$ が有界となるから，[III]で用いたのと同様の X の元 v に対して，

$$\int_{\partial B(\Gamma_0)} v_i\,\rho S_{ij}\,n_j\,ds \le M\,\mathrm{mes}\,B(\Gamma_0)$$

これより，$\mathrm{mes}\,B(\Gamma_0)\to 0$ のとき，弱い意味での (II-4) を導出できるだろう。ただし，$B(\Gamma_0)$ の縮小のしかたが Γ_0 に対して特異にならないように，パラメタライズしておく必要がある。

この手法を用いて数値計算をする上では，上述の様に，時間ステップが進むにつれて $B(\Gamma_0)$ が拡大することのないよう，スキームを工夫する必要がある。通常 $\mathrm{mes}\,B(\Gamma_0(0))$ を小さくとる程，ρ の形状の維持は難しくなる。enthalpy 法における同様の手段を用いた計算でも，$B(\Gamma_0)$ の中の選択は難しく，場合に応じて経験的に探っているのが現状

だという([4])。

V. まとめ

[I]を固定領域で扱う方法を探ってきたが，数値計算を行う上では，

(1) [III]を Nakayama らの手法によって解く。

(2) [IV]を解く。

のふたつの方法がある。現在両者について検討中だが，特に(2)については $\frac{D\rho}{Dt}=0$ をそのまま解かずに，$\frac{D\tilde{\rho}}{Dt}=0$ をみたす $\tilde{\rho}$ を用いて ρ を決め，形状が維持できるように工夫することで計算を進めている。次の機会にはその結果をまとめて，この方法の妥当性について論じたいと思う。

参考文献

[1] T. Nakayama, K. Ohmiya, M. Kawahara, "Finite Element Analysis of Incompressible Stratified Flows", Proc. 6th International Symposium on Finite Element Method in Flow Problems, Antibes, France, June, 1989, pp. 327-331

[2] 大宮清隆，川原睦人，中山司『非定常密度流の有限要素解析』第6回流れの有限要素解析シンポジウム報文集 ，1985年8月.

[3] 矢崎秀雄，中山司『密度成層流体の非定常運動の有限要素

解析』第3回計算力学シンポジウム報文集,1989,11.1-11.2

[4] John Crank," Free and moving boundary problems", clarendon Press. Oxford, 1984

[5] H. Okamoto," On the equation of nonstationary stratified fluid motion : Uniquness and existence of the solutions", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, vol. 30, No. 3, pp. 615-643