数理解析研究所講究録
第 724 巻 1990 年 208-212

解析的データと差分法の収束について

大阪大　基礎工　早川　款達郎

差分法による微分方程式の離散化モデル（スキーム）に関して重要なのはその収束性であろう。偏微分方程式の初期値問題の差分法による離散化の理論的研究においても当初から Courent-Friedrichs-Lewy, von Neumann, Forsythe-Wasow, Lax-Wendroff, Kreiss 等によってスキームの安定性と収束性の関係を中心にいろいろな結果が出された。中でも Lax による同等性定理（すなわち　安定性＝収束性）の役割は大きい。ところでこれらの結果は全て C^0 のノルムや L^2 のノルムに関する理論であり、取扱もすべて C^m- カテゴリーあるいは L^2- カテゴリーの関数空間である。すなわち収束性とは、例えば"すべての C^m- 級の初期関数に対して差分近似解が各変数の増分を 0 に近づけるとき真の解に収束する。"ことである。

我々はここでは初期関数の空間として $C^\omega-$ カテゴリーで考える。すなわち C^ω 収束性とは" $C^\omega-$ 級の初期関数に対して差分近似解が各変数の増分を 0 に近づけるとき真の解に収束する。"ことであるとしよう。すると今度は安定性は全く無縁になってしまうことがわかる。（勿論一般の偏微分方程式の初期値問題に対してこのようなことが示されたわけではなく以下に述べるような特別の場合であるが。）

ここでは次の 1 階定数係数偏微分方程式系の初期値問題

$$
\text{(P.D.E.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}U(x,y) = A\,\dfrac{\partial}{\partial y}U(x,y)\,, \\ U(0,y) = U_0(y) \end{cases}
$$

（ここで　A は $L\times L$ 実行列で $U_0(y)$ は $L-$ ベクトル値実解析関数）

を考え、その差分法による離散化をする。いま最も簡単な Euler 法による近似

$$
\text{(F.D.E.)} \qquad \begin{cases} \widetilde{U}(x+\Delta x,y) &= (I-\dfrac{\Delta x}{\Delta y}A)\widetilde{U}(x,y) + (\dfrac{\Delta x}{\Delta y}A)\widetilde{U}(x,y+\Delta y)\,, \\ \widetilde{U}(0,y) &= U_0(y) \qquad , \end{cases}
$$

を取り上げよう。

もし C^m–カテゴリーでの収束性を考えれば、まず上の方程式は双曲形でなければならずしかも安定性が成立たねばならないから、$\Delta x/\Delta y$ は方程式の双曲性との絡みでの CFL 条件をみたさねばならない。ところが C^ω–カテゴリーでの収束性についてはこのような条件はすべて不要で任意の行列 A に対して C^ω 収束になる。このとき $\Delta x/\Delta y$ に対してもなんの条件も要らない。

以下その証明の概略を述べる。　$U_0(y)$ が $x = 0$ において実解析的であるから

$$U_0(y) = \sum_{p=0}^{\infty} y^p U_{0,p} \qquad (\text{ここで } U_{0,p} \text{ は } L-\text{ベクトルである。})$$

とかかれる。さらにこの級数の係数には次の不等式が成立している。

$$\| U_{0,p} \| \leq M_0 r_0^p \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

まず記号を導入しておこう。

$$(x, y) \in R^2 \quad (x > 0) \quad と \quad \Delta x > 0 \quad \Delta y \neq 0 \text{ にたいして}$$

$$j(x) = [x/\Delta x] \qquad k(y) = [y/\Delta y] \qquad \kappa = \Delta x / \Delta y$$

さらに　$(F.D.E.)$ の解 $\tilde{U}$ にたいして $\tilde{U}(j(x)\Delta x, k(y)\Delta y)$ を $\hat{U}(x, y; \Delta x, \Delta y)$ とかく。

証明すべきことは

『 (x, y) が $(0,0)$ の近くにあるとき $\hat{U}(x, y; \Delta x, \Delta y)$ は $\Delta x, \Delta y \to 0$ とともに $(P.D.E.)$ の解 $U(x, y)$ に一様収束する』

ことである。

$y^p U_{0,p}$ を $U_{0,p}(y)$ とかき、$U_0(y) = U_{0,p}(y)$ のときの $(P.D.E.)$ の解を $U_p(x, y)$ とかけば

$$U_0(y) = \sum_{p=0}^{\infty} U_{0,p}(y) \qquad U(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} U_p(x, y) \qquad U_p(x, y) = (y + x A)^p U_{0,p}$$

になる。はじめに $U_0(y) = U_{0,p}(y) = y^p U_{0,p}$ の場合に証明する。

$$\begin{aligned}\hat{U}(j\Delta x, y) &= C(\Delta x, \Delta y)^j U_0(y) \\ &= \{(I - \kappa A) + \kappa A T_{\Delta y}\}^j U_0(y) \\ &= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (I-\kappa A)^{j-l} (\kappa A)^l T_{\Delta y}^l U_0(y) \\ &= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (I-\kappa A)^{j-l} (\kappa A)^l (y + l\Delta y)^p\end{aligned}$$

であるから、

$$\hat{U}(x, y; \Delta x, \Delta y) = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \sum_{l=0}^{j(x)} \binom{j(x)}{l} (I-\kappa A)^{j-l} (\kappa A)^l k(y)^{p-q} l^q \Delta y^p U_{0,p}$$

ここで次のような補題を用意する。

$$S_{j,q}(\xi, \eta) = \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} l^q \xi^{j-l} \eta^l$$

とするとき、

Lemma　For a positive integer j and a non-negative integer q, we have

$$S_{j,q}(\xi, \eta) = \sum_{s=1}^{Min(j,q)} \frac{j!}{(j-s)!} c_{q,s} (\xi + \eta)^{j-s} \eta^s,$$

where coefficients $c_{p,s}$ are non-negative integers independent of j, ξ, η and satisfy

$$1 \le c_{q,s} \le s^{q-s} \binom{q-1}{s-1} \quad q \ge s.$$

$$c_{q+1,1} = c_{q,1} = 1 \quad , \quad c_{q+1,q+1} = c_{q,q} = 1$$

これより

$$\hat{U}(x, y; \Delta x, \Delta y) = \sum_{q=0}^{p} \sum_{s=1}^{Min(j(x),q)} V_{p,q,s}(x, y; \Delta x, \Delta y) U_{0,p}$$

ただし

$$V_{p,q,s}(x, y; \Delta x, \Delta y) = \binom{p}{q} \frac{j(x)!}{(j(x)-s)!} c_{q,s} \kappa^s A^s k(y)^{p-q} \Delta y^p$$

をうる。そこで $\kappa\Delta y = \Delta x$ であることから

$$V_{p,q,s}(x,y;\Delta x,\Delta y) \;=\; \binom{p}{q}\,\frac{j(x)!}{(j(x)-s)!}\,c_{q,s}\,\Delta x^{s}\,A^{s}\{k(y)\,\Delta y\}^{p-q}\,\Delta y^{q-s}$$

となる。さらに

$$\Delta x \to 0 \quad , \quad \Delta y \to 0$$
$$j(x) \to \infty$$
$$j(x)\Delta x \to x \quad , \quad k(y)\Delta y \to y \qquad \text{収束は有界一様}$$

となることを用いて

$$V_{p,q,s}(x,y;\Delta x,\Delta y) \quad \to \quad \begin{cases} \binom{p}{q}\,y^{p-q}\,(x\,A)^{q} & s = q \\ & \\ 0 & s < q \end{cases}$$

となる。したがって

$$\hat{U}(x,y;\Delta x,\Delta y) \;\to\; \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\,y^{p-q}\,(x\,A)^{q}\,U_{0,p} \;=\; U_{p}(x,y) \qquad \text{収束は有界一様}$$

を得る。はじめの $U_0(y)$ にたいして結果を証明するには p についてたせばよいのだが、いま我々は安定性の成立していないところで考えているから $p=\infty$ の方での残余項の処理には注意を要する。それは次の評価を用意することで解決される。

$$\|\,V_{p,q,s}(x,y;\Delta x,\Delta y)\,\| \;\le\; \binom{p}{q}\binom{q-1}{s-1}\left(\frac{x}{|\kappa|}\right)^{q-s}|y|^{p-q}\,(x\,\|A\|)^{s}$$
$$1 \le s \le Min(j(x),q)$$

同様な結果が Friedrichs スキーム

$$\widetilde{U}(x+\Delta x,y) = 2^{-1}(I-\frac{\Delta x}{\Delta y}A)\widetilde{U}(x,y-\Delta y) + 2^{-1}(I+\frac{\Delta x}{\Delta y}A)\widetilde{U}(x,y+\Delta y)$$

や Lax-Wendroff スキーム

$$\widetilde{U}(x+\Delta x,y) = 2^{-1}((\frac{\Delta x}{\Delta y})^{2}A^{2} - \frac{\Delta x}{\Delta y}A)\widetilde{U}(x,y-\Delta y) \;+\; (I+\frac{\Delta x}{\Delta y}^{2}A^{2})\widetilde{U}(x,y)$$
$$+\,2^{-1}((\frac{\Delta x}{\Delta y})^{2}A^{2} + \frac{\Delta x}{\Delta y}A)\widetilde{U}(x,y+\Delta y)$$

に対しても成立する。その場合には先の Lemma のかわりに次のような補題を用いる。

$$R_{j,q}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{l_1+l_2+l_3=j} \frac{j!}{l_1!\,l_2!\,l_3!}\,\xi^{l_1}\,\eta^{l_2}\,\zeta^{l_3}\,(l_1 - l_3)^q$$

とするとき、

Lemma For a positive integer j and a non-negative integer q, we have

$$R_{j,q}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{s_1+s_2\leq q} a_{s_1,s_2,j,q}\,(\xi - \zeta)^{s_1}\,\eta^{s_2}\,(\xi + \eta + \zeta)^{j-s_1-s_2} \quad ,$$

where coefficients $a_{s_1,s_2,j,q}$ are non-negative integers independent of j, ξ, η, ζ and satisfy

$$|a_{s_1,s_2,j,q}| \leq 3^q\, j^{q-1}\, Min(j,q) \qquad \text{for} \quad s_1 + s_2 \leq p \quad \text{and} \quad s_1 \neq p \quad .$$

$$a_{q,0,j,q} = \frac{j!}{(j-q)!}$$

References

1. K HAYAKAWA, *Convergence of finite difference scheme and analytic data*, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. **24** (1989), 756–764.
2. ———, *Local theory of convergence of the Lax-Wendroff's sheme for first order system of partial differential equations in C^m and C^ω cathegory*, MATHEMATICA JAPONICA **35** (1990) (to appear).
3. G DAHLQUIST, *Convergence and stability for a hyperbolic difference equation with analytic initial values*, Math. Scand. **2** (1954), 91–102.