数理解析研究所講究録
第729巻 1990年 62-78

Painlevé 方程式の古典解と既約な解

長崎大学・経済　村田嘉弘(Yoshihiro Murata)

1. Painlevé の I 型方程式の解の既約性

Painlevé 方程式の解が真に新しい関数であるかという問題は，解の超越性の問題とか既約性の問題と言われ，長い混乱の後，本質的な部分は1987年，梅村・西岡により明快な形で解決された。まず，梅村[13]は古典関数という概念を定義し，

古典的でない関数＝既約な関数

＝超越的な関数

＝新しい関数

と定義した。そして西岡[5]の結果を踏まえて，梅村[15]は

定理 I（既約性定理）

Painlevé の第I方程式のどんな解も古典的ではない。■

を証明した。既約性の研究は更に発展し，一般解の初期条件への依存度（半超越的・超越的）による既約性の別証（[6]，[7]，[17]），また無限次元Galois理論の整備（[1]，[18]）と大理論が建設されつつあるが，この小論では既約性の第1証明の立場に立ち，Painlevé の他の方程式の既約性について解説

する．まず，[13]，[16]により古典関数の定義を復習しておこう。

$\boxed{\text{基本操作}}$ （既知関数から新しい既知関数を得る操作）

考える関数はすべて，複素平面のある領域上一価有理型とする．また，領域D上定義された既知関数$f(x)$の任意の部分領域D'への制限$f(x)|_{D'}$は新しい既知関数と考える．

(0) 既知関数$f(x)$の導関数$f'(x)$は新しい既知関数となる。

(P1) f, gを既知関数とすれば，それらの和，差，積$f \pm g$, fgおよび（$g \neq 0$のとき）商f/gは新しい既知関数となる。

(P2) $a_1, a_2, \cdots, a_n$を既知関数とする。関数fが代数方程式$f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n = 0$を満たせば，$f$は新しい既知関数である．

(P3) fを既知関数とする．関数Fが微分方程式$F' = f$を満たせば，Fは新しい既知関数である（i.e. 既知関数の不定積分は新しい既知関数である）。

(P4) $a_1, a_2, \cdots, a_n$を既知関数とする．関数fが線形常微分方程式$f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_n f = 0$を満たせば$f$は新しい既知関数である．

(P5) Aを$\mathbf{C}$上定義されたアーベル多様体，$p: \mathbf{C}^n \to A$を普遍被覆空間とする．$a_1, a_2, \cdots, a_n$を領域D上正則な既知関数とし，正則写像$F: D \to \mathbf{C}^n$を$x \mapsto (a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x))$で定義する。このとき，$A$上の任意の有理型写像$\varphi$について，D上

の有理型関数$\varphi\cdot p\cdot F$は新しい既知関数である。ただし，ここで$p\cdot F$によるDの像がφの極に含まれるような場合は除く。

(P6) $F(Y, Y')$を既知関数を係数とする2変数の多項式とする。関数fが微分方程式$F(f, f')=0$を満たせば，fは新しい既知関数である。■

古典関数

複素平面$\mathbb{C}$上の定数関数全体に操作(0), (P1)〜(P5)を有限回繰り返して得られる関数を古典的であるという。■

[例] 代数関数，代数関数係数の線形常微分方程式の解（e^x, $\log x$, Gaussの超幾何関数，Bessel関数，…），楕円関数，楕円ϑ関数 ■

操作(0), (P1)〜(P5)を有限回繰り返すことは，実は1つの群論的操作（代数群に対するある操作(Q)）を有限回繰り返すことに等しく，理論上それが本質的なことであるが，ここではそれを省く（[13], [14], [16]を参照）。

尚，操作(P6)と他の操作との関係は次のようである。

定理α [16]

Kを　$\mathbb{C}\subset K\subset \mathfrak{M}_D=\{D$上の有理型関数全体$\}$である微分体とする。多項式$F(Y, Y', Y'')\in K[Y, Y', Y'']$に対し，微分方程式$F(y, y', y'')=0$は動く特異点（代数的特異点，超越的特異点）を持たないとする。解$y\in \mathfrak{M}_D$が条件 $\mathrm{tr.d.}\, K(y, y', y'')/K=2$

を満たすとき，次の2条件は同値である．

(1) y は K より出発して操作(0), (P1)〜(P5) を有限回繰り返して得られる．

(2) y は K より出発して操作(0), (P1)〜(P6) を有限回繰り返して得られる．■

Painlevé I 型ではどの解も $\mathrm{tr.d.}\ \mathbb{C}(x)(y, y', y'')/\mathbb{C}(x) = \mathrm{tr.d.}\ \mathbb{C}(x)(y, y')/\mathbb{C}(x) = 2$ であることが証明できるので，定理 I と定理 α より，

$\boxed{\text{定理 I}'}$ (既約性定理) [16]

Painlevé I 型のどの解も定数関数体 $\mathbb{C}$ より出発して，操作(0), (P1)〜(P6) を有限回繰り返すことによっては得ることができない．■

2. 他の Painlevé 方程式の解の既約性

梅村の東大での講義[16]の後，野海[8]は Painlevé II，岡本[12]は Painlevé IV の解の既約性について証明した。ここでは，簡単な Painlevé II (P_{II}) についての結果を見ておこう．

$\boxed{\text{定理 II}}$ (既約性定理)

$$P_{II}(\alpha)\ ;\ y'' = 2y^3 + xy + \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

の解は

(i) $\alpha \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のとき　すべて既約

(ii) $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき　唯一つ有理解があり，他はすべて既約

(iii) $\alpha \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ のとき　Riccati 方程式 $y' = -y^2 - \frac{x}{2}$ の解 y の微分有理式で表される 1 parameter family（$\mathbf{P}^1$ で parametrize される）がある．それ以外はすべて既約 ■

I, II, IV について既約性定理が得られたので，残るは III, V, VI である．本論では，III の古典解，および既約性定理の予想を述べる（[4]を参照）．

III について述べる前に，既約性定理の第1証明で Key となることを述べておこう．

$\boxed{\text{条件 (J)}}$ [14], [16]

2階有理的方程式

$$(*) \qquad y'' = \frac{A(y, y')}{B(y, y')} \qquad (A(Y, Y'),\ B(Y, Y') \in \mathbf{C}(x)[Y, Y'])$$

が次の条件を満たすとき，(*) は $\mathbf{C}(x)$ 上普遍的に条件 (J) を満たすという．

「K を $\mathbf{C}(x)$ の任意の微分拡大体とし，$A(Y, Y'),\ B(Y, Y') \in K[Y, Y']$ と考える．このとき，

$F(Y, Y'),\ H(Y, Y') \in K[Y, Y']$ に対し，

$$(J) \qquad B\left(\delta F + Y' \frac{\partial F}{\partial Y}\right) + A \frac{\partial F}{\partial Y'} = FH$$

$$\Rightarrow \quad F \in K[Y]$$

が成り立つ．ただし，δF は F の係数を微分した式とする.」■

$\boxed{\text{定理}\ \beta}$ [14], [16]

2階有理的方程式

$$(*)\quad y'' = R(y, y') \qquad (R(Y, Y') \in \mathbb{C}(x)[Y, Y'])$$

が $\mathbb{C}(x)$ 上普遍的に条件(J)を満たすとき，(*)の解 y について，

$$y\text{が古典関数} \iff y\text{は代数関数}$$
$$\iff \mathrm{tr.d.}\ \mathbb{C}(x)(y, y')/\mathbb{C}(x) \leqq 1 \quad \blacksquare$$

Painlevé I は $\mathbb{C}(x)$ 上普遍的に条件(J)を満たし，しかも代数関数解を持たないので，定理 β より定理 I が導かれたのである。一方，Painlevé J (J = II 〜 VI) はパラメーター値が特別なときには $\mathbb{C}(x)$ 上普遍的には条件(J)を満たさない（∵代数関数でない Riccati 解がある）。しかし generic には $\mathbb{C}(x)$ 上普遍的に条件(J)を満たすと思われ，このときは，既約解の存在状況を決定することは代数関数解の存在状況を決定することと同値になる。また，$\mathbb{C}(x)$ 上普遍的には条件(J)を満たさないときには，$\boxed{\text{条件(J)}}$ の多項式 F より代数関数以外の古典解が決まる。よって，Painlevé J (P_J) の既約性の問題を解決するには，

① P_J の代数関数解の分布を完全に決定する。

② P_J の他の古典解の分布を調べる。

③ $\boxed{\text{条件(J)}}$ の多項式 F の形を決定する。

という手順で進まねばならない。本論では，P_{III} に対して，①，②を述べる訳である。

3. P_{III}の古典解

P_{III}には同値な2種類の方程式がある([10],[11]):

$$P_{\text{III}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$$

$$\left\{\begin{array}{l} t = x^2 \\ q = xy \end{array}\right. \Big\downarrow \qquad \Big\uparrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}q \end{array}\right.$$

$$P_{\text{III}'} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dq}{dt} + \frac{q^2}{4t^2}(\gamma q + \alpha) + \frac{\beta}{4t} + \frac{\delta}{4q}$$

P_{III}(または$P_{\text{III}'}$)の代数関数解を決定するには，P_{III}と$P_{\text{III}'}$を同時に扱わなければならない([4]). しかし，$P_{\text{III}'}$の方が解の変換群の性質がよく(後述)，ここでは主として$P_{\text{III}'}$を扱うことにする.

定理7

(1) [11] $\quad P_{\text{III}'}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 = t \\ q_1 = \dfrac{t}{q} \end{array}\right. \Big\downarrow \qquad \Big\uparrow \left\{\begin{array}{l} t = t_1 \\ q = \dfrac{t_1}{q_1} \end{array}\right.$$

$$P_{\text{III}'}(-\beta, -\alpha, -\delta, -\gamma)$$

(2) [10] $\quad P_{\text{III}}(\alpha, \beta, 0, 0)$

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 = \sqrt{t} \\ q_1 = \sqrt{q} \end{array}\right. \Big\downarrow \qquad \Big\uparrow \left\{\begin{array}{l} t = t_1^2 \\ q = q_1^2 \end{array}\right.$$

$$P_{\text{III}}(0, 0, 2\alpha, 2\beta) \qquad \blacksquare$$

この定理7に注意すると，$P_{III'}$（P_{III}）はパラメーターの満たす条件により3通りに分類されることがわかる：

Ⓐ　$\alpha=\gamma=0$　（または $\beta=\delta=0$）

Ⓑ　$\gamma=0,\ \alpha\delta\neq0$　（または $\delta=0,\ \beta\gamma\neq0$）

Ⓒ　$\gamma\delta\neq0$

Ⓐの場合は求積でき，解はすべて古典解である（[11]）．Ⓑは Gromack [2] が調べた場合で，3価の代数関数解の存在が知られている（代数関数解が完全に調べられた訳ではない）。Ⓒが今回報告する場合である。

Ⓒの場合，パラメータを

$$\alpha=-4\eta_0\theta_\infty,\quad \beta=4\eta_0(\theta_0+1),\quad \gamma=4\eta_\infty^2,\quad \delta=-4\eta_0^2$$

により $(\eta_0,\ \eta_\infty,\ \theta_0,\ \theta_\infty)$ に取り直し，更にスケール変換

$$\begin{cases} (t,\ q)\longrightarrow(t_1,\ q_1)=\left(\dfrac{t}{\lambda},\ \dfrac{q}{\mu}\right), \\ (\eta_0,\ \eta_\infty,\ \theta_0,\ \theta_\infty)\longrightarrow\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\eta_0,\ \mu\eta_\infty,\ \theta_0,\ \theta_\infty\right) \end{cases}$$

を行なうと，標準型

$$P_{III'}(\theta_0,\theta_\infty)\qquad \frac{d^2q}{dt^2}=\frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{dq}{dt}+\frac{q^2}{t^2}(q-1)+\frac{\theta_0+1}{t}-\frac{\theta_\infty}{q}$$

に帰着する。P_{III} でも同様で，標準型

$$P_{III}(\theta_0,\theta_\infty)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x}(-\theta_\infty y^2+\theta_0+1)+4y^3-\frac{4}{y}$$

を得る．

以下述べる定理1，2はP_{III}'の代数関数解についての定理である。

$\boxed{\text{定理 1}}$ [4]

$P_{III}'(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$が有理関数解を持てば，$\alpha=\gamma=0$ または $\beta=\delta=0$ でなければならない．■

この定理より，$P_{III}'(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$が多価代数関数解を持つのは，$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$が先の条件Ⓑまたはⓒを満たすときであることがわかる。

ⓒの場合，P_{III}'は標準型$P_{III}'(\theta_0, \theta_\infty)$に帰着できるが，$P_{III}'(\theta_0, \theta_\infty)$は次の$s_i$ $(i=0,1,2)$で生成される解の変換群G'を持つ：

$$s_0 \begin{cases} (t, q) \longrightarrow (t_1, q_1) = \left(t, -\frac{t}{q}\right) \\ (\theta_0, \theta_\infty) \longrightarrow (-\theta_\infty - 1, -\theta_0 - 1) \end{cases}$$

$$s_1 \begin{cases} (t, q) \longrightarrow (t_1, q_1) = \left(t, q + \dfrac{(\theta_\infty - \theta_0) q^2}{tq' - q^2 + \theta_\infty q - t}\right) \\ (\theta_0, \theta_\infty) \longrightarrow (\theta_\infty, \theta_0) \end{cases}$$

$$s_2 \begin{cases} (t, q) \longrightarrow (t_1, q_1) = (-t, -q) \\ (\theta_0, \theta_\infty) \longrightarrow (\theta_0, -\theta_\infty) \end{cases}$$

そして，$E = \{(\theta_0, \theta_\infty) \in \mathbb{R}^2\}$上の$B_2$型のAffine Weyl群を$W_a$とすると，$G' \cong W_a$である([11])。次の定理2はこの群$G'$を利用することで得られる。

$\boxed{\text{定理２}}$ [4]

$\gamma\delta \neq 0$ とする。標準型 $P_{\mathrm{III}}'(\theta_0, \theta_\infty)$ は各 $(\theta_0, \theta_\infty)$ に対して、０個、または１個、または２個の多価代数関数解を持つ。$P_{\mathrm{III}}'(\theta_0, \theta_\infty)$ が代数関数解を持つのは次の場合ですべてである。

	$(\theta_0, \theta_\infty)$ の条件	代数関数解の形
I	$\theta_\infty - \theta_0 - 1 = 0$, $(\theta_0, \theta_\infty) \in \boldsymbol{C}^2$	$q = \sqrt{t}$
I^i	$\theta_\infty + \theta_0 + 1 = 0$, $(\theta_0, \theta_\infty) \in \boldsymbol{C}^2$	$q = i\sqrt{t}$
II	$(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$q = \sqrt{t} + \theta_\infty$
II^i	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$	$q = i\sqrt{t} + \theta_\infty$
III	$\theta_\infty - \theta_0 - 1 = 2I$ $(\theta_0, \theta_\infty) \in \boldsymbol{C}^2$, $I \in \boldsymbol{Z}$ $(\theta_0, \theta_\infty) \notin \Delta \cup \{(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$ （ここで、Δ は IV の集合 Δ）	$q = \sqrt{t}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{t} - \ell_j}\right)$ $\left[\begin{array}{l} N \text{ はある自然数} \\ \varepsilon_j = 1 \text{ または } -1 \\ \ell_j \in \boldsymbol{C} - \{0\} \\ j \neq j' \Rightarrow \ell_j \neq \ell_{j'} \\ I = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \end{array}\right]$ ……(*)
III^i	$\theta_\infty + \theta_0 + 1 = 2I$ $(\theta_0, \theta_\infty) \in \boldsymbol{C}^2$, $I \in \boldsymbol{Z}$ $(\theta_0, \theta_\infty) \notin \Delta^i \cup \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})\}$ （ここで、Δ^i は IV^i の集合 Δ^i）	$q = \sqrt{t}\left(i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{t} - \ell_j}\right)$ $\left[\begin{array}{l} N, \varepsilon_j, \ell_j, I \text{ は (III) の(*)と} \\ \text{同様な条件を満たす} \end{array}\right]$

Ⅳ	$(\theta_0, \theta_\infty) \in \Delta$, $\Delta = \{(k+\frac{1}{2}+2l,\ -(k+\frac{1}{2})),\ (-(k+\frac{5}{2})-2l,\ k+\frac{1}{2}) \mid$ k, l は0以上の整数, $(k, l) \neq (0, 0)\}$	$q = \sqrt{t}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{t}-\ell_j}\right)+\theta_\infty$ [N, ε_j, ℓ_j は(Ⅲ)の※と同様な条件を満たす]
$Ⅳ^i$	$(\theta_0, \theta_\infty) \in \Delta^i$, $\Delta^i = \{(k+\frac{1}{2}+2l,\ k+\frac{1}{2}),\ (-(k+\frac{5}{2})-2l,\ -(k+\frac{1}{2})) \mid$ k, l は0以上の整数, $(k, l) \neq (0, 0)\}$	$q = \sqrt{t}\left(i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{t}-\ell_j}\right)+\theta_\infty$ [N, ε_j, ℓ_j は(Ⅲ)の※と同様な条件を満たす]

上表のⅢ, $Ⅲ^i$, Ⅳ, $Ⅳ^i$において, N, ε_j, ℓ_j は各$(\theta_0, \theta_\infty)$の値に応じて定まる。■

Remark

$(\theta_0, \theta_\infty)$を特に$E=R^2$上に制限すると, 定理2の各タイプの代数関数解は次頁図1のように分布している。また, 代数関数解が2個存在するのはE上であり, 斜めの実線の交点の所である。ただし,

／（太線） 上 … Ⅰ型	＼（太線） 上 … $Ⅰ^i$型
／ 上 … Ⅲ型	＼ 上 … $Ⅲ^i$型
∘ 上 … Ⅱ型	△ 上 … $Ⅱ^i$型
• 上 … Ⅳ型	▲ 上 … $Ⅳ^i$型

▽ … B_2型 Affine Weyl 群の Weyl 領域

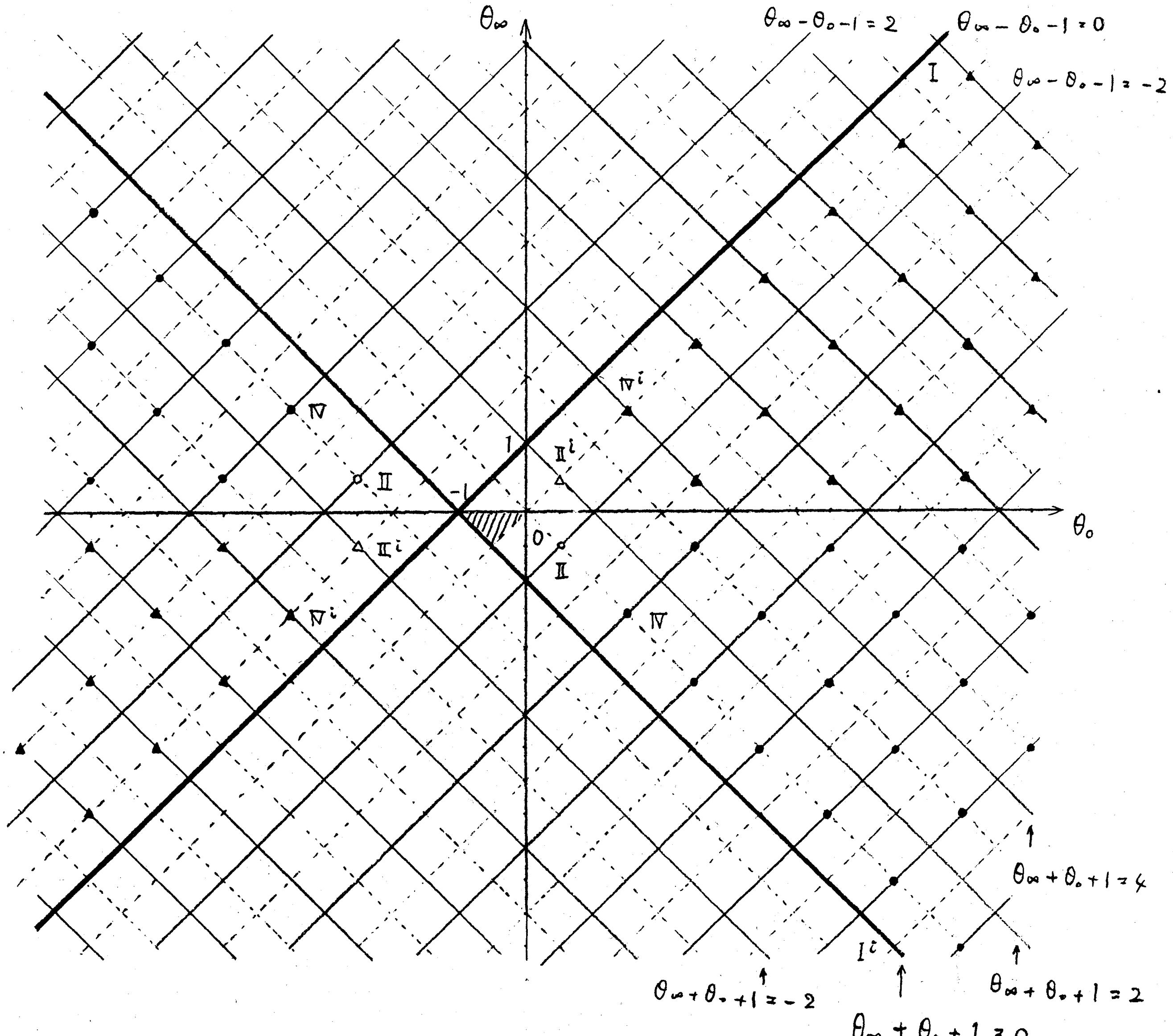

図1

■

次に P_{III} に対しては次のような結果が成り立つ。

$\boxed{\text{定理3}}$ [4]

$\gamma\delta \neq 0$ とする.

(1) 標準型 $P_{\mathrm{III}}(\theta_0, \theta_\infty)$ は多価代数関数解を持たない。

(2) 標準型 $P_{\mathrm{III}}(\theta_0, \theta_\infty)$ は各 $(\theta_0, \theta_\infty)$ の値に対し, 有理関数解を持たないか, または2個, または4個の有理関数解を持つ. $P_{\mathrm{III}}(\theta_0, \theta_\infty)$

が有理関数を持つのは次の場合ですべてである．ただし，Ⅲ，Ⅳ，III^i，IV^i の集合 Δ，Δ^i は定理2の Δ，Δ^i と同一とする．

	$(\theta_0, \theta_\infty)$ の条件	有理関数解の形
Ⅰ	$\theta_\infty - \theta_0 - 1 = 0$, $(\theta_0, \theta_\infty) \in \mathbf{C}^2$	$y = \pm 1$
I^i	$\theta_\infty + \theta_0 + 1 = 0$, $(\theta_0, \theta_\infty) \in \mathbf{C}^2$	$y = \pm i$
Ⅱ	$(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$y = \pm 1 + \theta_\infty$
II^i	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$	$y = \pm i + \theta_\infty$
Ⅲ	$\theta_\infty - \theta_0 - 1 = 2I$, $(\theta_0, \theta_\infty) \in \mathbf{C}^2$, $I \in \mathbf{Z}$ $(\theta_0, \theta_\infty) \notin \Delta \cup \{(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$	$y = \pm \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j}{\pm x - \ell_j}\right)$ （複号同順 N, ε_j, ℓ_j, I は定理2Ⅲの(*)と同一の条件を満たす）…(**)
III^i	$\theta_\infty + \theta_0 + 1 = 2I$, $(\theta_0, \theta_\infty) \in \mathbf{C}^2$, $I \in \mathbf{Z}$ $(\theta_0, \theta_\infty) \notin \Delta^i \cup \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})\}$	$y = \pm \left(i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j}{\pm x - \ell_j}\right)$ （(**)と同じ条件が成り立つ）
Ⅳ	$(\theta_0, \theta_\infty) \in \Delta$	$y = \pm \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j}{\pm x - \ell_j}\right) + \theta_\infty$ （(**)と同じ条件が成り立つ）
IV^i	$(\theta_0, \theta_\infty) \in \Delta^i$	$y = \pm \left(i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon_j}{\pm x - \ell_j}\right) + \theta_\infty$ （(**)と同じ条件が成り立つ）

■

$\boxed{\text{Remark}}$

$(\theta_0, \theta_\infty)$ を $E \simeq R^2$ 上に制限したときの $P_{III}(\theta_0, \theta_\infty)$ の有理解の分布は定理2の Remark 図1と同一である。また、

$P_{III'}(\theta_0, \theta_\infty)$ の代数関数解の個数

$: P_{III}(\theta_0, \theta_\infty)$ の有理関数解の個数 $= 1:2$

であることに注意する。■

以上、$P_{III'}(P_{III})$ の代数関数解について述べたが、$P_{III'}(\theta_0, \theta_\infty)$ は、$\theta_0 + \theta_\infty = 0$ $((\theta_0, \theta_\infty) \in C^2)$ のとき、Riccati 方程式

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{t} q^2 - \frac{\theta_0}{t} q + 1$$

のすべての解を含むことが知られている([11])。この方程式は変換

$$t = -\frac{s^2}{4}, \quad q = \frac{s}{2} \frac{d}{ds} \log u - \frac{\theta_0}{2} \qquad (u \neq 0)$$

により、Bessel 方程式

$$u'' + \frac{1}{s} \frac{du}{ds} + \left(1 - \frac{\theta_0^2}{s^2}\right) u = 0 \qquad (u \neq 0)$$

に書き直すことができる。よって、$P_{III'}(\theta_0, \theta_\infty)$ の代数関数以外の古典解について次の結果が成り立つ。

$\boxed{\text{定理4}}$

$C = \{ (\theta_0, \theta_\infty) \in C^2 \mid \exists l \in \mathbf{Z} \ \text{s.t.}\ \theta_0 + \theta_\infty = 2l$ または $\theta_0 - \theta_\infty = 2l \}$

とおく。任意の $(\theta_0, \theta_\infty) \in C$ に対し、$P_{III'}(\theta_0, \theta_\infty)$ は Riccati 方程式

$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{t}q^2 - \frac{\theta_0}{t}q + 1$ の解 q の微分有理式で表される 1-parameter family（$\mathbf{P}^1$ で parametrize される）を解に持つ．■

本小論のまとめとして，次のような予想を立てるのは極めて自然なことと思われる．

$\boxed{\text{予想}}$ [4]

$P_{III}'(\theta_0, \theta_\infty)$ の古典関数解は定理2の代数関数解と，定理4の C 上の 1 parameter 解ですべてである．他のいかなる解も既約である。■

文献

[1] Haraoka, Y., The Garois theory for linear homogeneous partial differential equations of the first order, Funkcial. Ekvac., 33 (1990).

[2] Gromak, V. I., Solutions of the third Painlevé equation, Diff. Equations, 9 (1973), 1599 - 1600.

[3] Murata, Y., Rational solutions of the second and the fourth Painlevé equations, Funkcial. Ekvac., 28 (1985), 1-32.

[4] Murata, Y., Classical solutions of the third Painlevé equation, to appear.

[5] Nishioka, K., A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent, Nagoya Math. J., 109 (1988), 63-67.

[6] Nishioka, K., Differential algebraic function fields depending rationally on arbitrary constants, to appear in Nagoya Math. J.

[7] Nishioka, K., General solutions depending rationally on arbitrary constants, to appear in Nagoya Math. J.

[8] Noumi, M., private communication.

[9] Okamoto, K., Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equation I, Proc. Japan Acad., Ser. A, 56 (1980), 264-268 ; II, ibid., 367-371.

[10] Okamoto, K., Isomonodromic deformation and Painlevé equations and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec-IA Math., 33 (1986), 575-618.

[11] Okamoto, K., Studies on the Painlevé equations IV. Third Painlevé equation P_{III}, Funkcial. Ekvac., 30 (1987), 305-332.

[12] Okamoto, K., private communication.

[13] Umemura, H., Birational automorphism groups and differential equations, to appear in the Proc. Franco-Japanese colloquium on differential equations at Strasbourg in 1985.

[14] 梅村浩，集中講義のノート（1986年11月東大）

[15] Umemura, H., On the irreducibility of the first differential equation of Painlevé, Algebraic geometry and Commutative algebra in honor of Masayoshi Nagata, (1987) 101-119.

[16] 梅村浩, Painlevé方程式の既約性について, 数学, 40 (1988), 47-61.

[17] Umemura, H., Second proof of the irreducibility of the first differential equation of Painlevé, preprint.

[18] 梅村浩，常微分方程式の無限次元Galois理論（1989年 日本数学会秋期総合分科会（上智大）での講演）