数理解析研究所講究録
第729巻 1990年 79-91

線形常微分方程式の標準形

熊本大自然科学 原岡喜重
(Yoshishige Haraoka)

定数係数の1階線形常微分方程式系

$$y' = Ay, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A \in gl(n, \mathbb{C})$$

は、よく知られている様に基本解行列

$$Y(x) = \exp(xA)$$

をもつ。これは次の様に解釈できる。即ち、解 $Y(x)$ は、Lie群 $GL(n, \mathbb{C})$ の1パラメター部分群 $G = \{\exp(xA) \mid x \in \mathbb{C}\}$ の中を(くまなく)流れ、方程式の係数 A はその G のLie環 $\mathfrak{g}$ の元になる。逆にいうと、係数 A の属するLie環を任意にもってくると、解はそれのLie群の中を流れる。A の属するLie環を小さくとるほど解について詳しいことが分り、とくに A で生成されるLie環 $\mathfrak{g}$ をとるとそのLie群が解の軌跡になる。今の場合解の軌跡がLie群 G を埋め尽くしていたが、これは解 $Y(x)$ が初等関

数であることと実は深く関っている。

係数が x に依存する方程式ではこのように簡単ではないが、例えば渋谷[4] §3.1では、モノドロミー群を用いて上と同様の立場から微分方程式を考えている。それによると、解があるLie群 G の中を流れるとき、その方程式は、各点 x で G のLie環 $\mathfrak{g}$ に含まれるような係数をもつ方程式に変換することができ、変換された方程式を標準形と呼ぶ。

以上の様な話を微分代数のことばを用いてとらえ、線形常微分方程式の標準形をLie環との関係で定義することを目的とする。

§1. Picard-Vessiot 理論

この節ではPicard-Vessiot理論（線形常微分方程式の微分Galois理論）について、後で用いる最小限のことをまとめておく。

以下標数0の常微分体のみを考え、微分を δ で表す。

微分体 K に対し、その定数体を C_K で表す。即ち

$$C_K = \{ a \in K \mid \delta a = 0 \}.$$

微分体の元 a 及び微分不定元 y に対し、

$$\delta a = a',\ \delta^2 a = a'',\ \cdots,\ \delta^m a = a^{(m)},$$

$$\delta y = y',\ \delta^2 y = y'',\ \cdots,\ \delta^m y = y^{(m)}$$

の様に記す。

微分体Kを1つ固定し、K-係数の線形常微分方程式

(E) $$l(y) := y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \quad a_i \in K$$

を考える。このときKの微分拡大体の元 η_i $(1 \le i \le n)$ であって次をみたすものが存在する：

$$l(\eta_i) = 0, \quad 1 \le i \le n$$

$$\det \eta \ne 0.$$

但し

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_n \\ \eta_1' & \cdots & \eta_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_1^{(n-1)} & \cdots & \eta_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

$(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ を (E) の基本解系といい、η を基本解行列という。(E) はシステムの形に書くこともできる。即ち、$Y = (y_{ij})$ を微分不定元 y_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ からなる $n \times n$ 行列とするとき、(E) に対して

(E') $$Y' = AY, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & -a_1 \end{pmatrix} \in gl(n, K)$$

と定めると、(E) の基本解行列 η が (E') の非退化な解を与える。

さて、Kに$(\eta_1,\cdots,\eta_n)$を添加して得られる微分拡大体をLとすると、

$$L = K\langle \eta_1,\cdots,\eta_n\rangle = K(\eta)$$

であるが、$C_L = C_K$が成り立つときL/Kを(E)のPicard-Vessiot拡大という。Lの微分体としての自己同型(微分と可換な自己同型)でKの元を動かさないもの全体は群をなし、それを(E)のK上のPicard-Vessiot群といい$Gal(L/K)$で表す。即ち

$$Gal(L/K) = \{\sigma : L \to L.\ 自己同型 \mid \sigma(a) = a \text{ for } {}^{\forall}a \in K\}.$$

基本解系$(\eta_1,\cdots,\eta_n)$を一つ定める毎に、$Gal(L/K)$の$GL(n,C_K)$の中への表現が得られる。それは実際、基本解行列ηを用いて

$$\begin{array}{cccc} c : & Gal(L/K) & \longrightarrow & GL(n, C_K) \\ & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ & \sigma & \longmapsto & \eta^{-1}\sigma(\eta) \end{array}$$

で与えられる。$c(Gal(L/K))$は、$Gal(L/K)$と同型な、$GL(n,C_K)$の代数部分群Gとなる。これを(E)のK上のηについてのPicard-Vessiot群と呼ぶ。従って$Gal(L/K)$自身がC_K上の代数群としての構造をもつ。

Picard-Vessiot理論とは、$Gal(L/K)$の代数部分群とL/Kの微分中間体の間にGalois対応がつくことを述べたものである。それ

により、方程式(E)の解の超越性を、代数群Gal(L/K)で測ることができる。しかし方程式(E)からGal(L/K)を計算する一般的な手法はなく、個々の方程式に対して、モノドロミー群を通して計算する方法、微分代数的な計算で求める方法、$GL(n,\mathbb{C})$の代数部分群の分類を用いる方法等が用いられている。

§2、例、

ここでは、はじめに述べた様な微分方程式の標準形の概念を示唆する例をいくつか挙げる。この節では$(K, \delta) = (\mathbb{C}(x), d/dx)$とする。このとき$C_K = \mathbb{C}$.

例1.

(E_1) $$y'' + \frac{1}{x} y' = 0.$$

システムの形に書けば

(E_1') $$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} Y.$$

これは基本解系$(1, \log x)$をもち、基本解行列は

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & \log x \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

となる。(E_1)のK上のηについてのPicard-Vessiot群は

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

G_1はG_aと同型で、従って連結。そのLie環は

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & l_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

今、

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

により方程式を変換する。即ち $Y = uZ$ として Z についての方程式を求めると、

$$(E_1^*) \qquad Z' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z$$

であり、係数は各点xで$\mathfrak{g}_1$の値をとる。

<u>例2</u>

$$(E_2) \qquad x(1-x)y'' + \left(\frac{1}{2} - x\right)y' + \frac{\nu^2}{4} y = 0, \qquad \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}.$$

これはGaussの超幾何微分方程式で、パラメター $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の場合である。基本解系

$$(\eta_1, \eta_2) = \left((\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^\nu, (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^\nu \right)$$

をもつ。今、$\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ のある点での分枝を適当に選んで $\eta_1\eta_2 = 1$ が成り立っているとしてよい。基本解行列ηについてのPicard-Vessiot群は

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_{11}c_{22} = c_{12}c_{21} = 1 \right\}.$$

G_2は連結でなく、単位元の連結成分は

$$G_2^0 = \left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \;\middle|\; c_{11}c_{22} = 1 \right\}.$$

その Lie 環は

$$\mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix} \;\middle|\; l_{11} + l_{22} = 0 \right\}.$$

変換

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix}, \qquad a = \frac{\nu}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$$

を行うと、(E_2) は

$$(E_2^*) \qquad z' = \begin{pmatrix} a & \\ & -a \end{pmatrix} z$$

にうつり、やはり係数は各点xで$\mathfrak{g}_2$の値をとる。

<u>例3</u>.

$$(E_3) \qquad y'' - \frac{1}{x} y' + \left(1 + \frac{3}{4x^2}\right) y = 0$$

これは$x=0$を確定特異点、$x=\infty$を不確定特異点にもつ。以下上の例と同様の記号を流用し、結果だけを書く。

$$(\eta_1, \eta_2) = (\sqrt{x}\cos x, \sqrt{x}\sin x)$$

$$G_3 = SO(2)$$
$$\mathfrak{g}_3 = so(2) = \{A \in gl(2) \mid A + {}^tA = 0\}$$
$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \sqrt{x} \end{pmatrix}.$$

(E_3^*) $$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z.$$

§3 G-原始拡大

体 C 上定義された連結な代数群 G を考える。L/K を微分拡大とし、$C_L = C_K = C$ とする。G の K-値点の全体を G_K で表す。例えば $G = GL(n)$ のときは

$$GL(n)_K = GL(n : K)$$

である。今 L 上に微分 δ が定義されているが、代数群 G に応じて canonical に δ の logarithmic derivative

$$l\delta : G_L \to Lie(G)$$

が定義される。G が $GL(n)$ の代数部分群の場合には、$l\delta$ は

$$l\delta(\alpha) = \alpha' \alpha^{-1}, \qquad \alpha \in G_L$$

δ

で与えられる。

$\alpha \in G_L$ が K 上の G-原始元(G-primitive)であるとは、

$$l\delta(\alpha) \in Lie(G_K) = \mathfrak{g} \otimes_C K$$

が成り立つことである。ここで $\mathfrak{g}$ は G の Lie 環を表す。

<u>定義</u>　G : C 上の連結代数群, K : 常微分体, $C_K = C$ とする。微分体の拡大 L/K が <u>G-原始拡大</u> であるとは、K 上の G-原始元 α が存在して $L = K(\alpha)$ となること。

代数群 G に対し、その単位元の連結成分を G° で表す。

<u>定理</u>　K : 標数 0 の常微分体, L/K : Picard-Vessiot 拡大, $G = Gal(L/K)$ とする。このとき次をみたす K の有限次代数拡大 K° が存在する:

(i) K° は LK° 内で代数的閉,

(ii) $C_{LK^\circ} = C_K$ ならば、LK°/K° は G°-原始拡大.

この定理が先に述べた線形常微分方程式の標準形の存在を保証する。その様子を説明しよう。方程式(E) 或はシステム

$$(E') \qquad Y' = AY, \qquad A \in \mathfrak{gl}(n, K)$$

を考え，その基本解行列 η をもってくる。

$$L = K(\eta)$$

が Picard-Vessiot 拡大であるとする。(E') より $\eta' = A\eta$. 今，簡単のため，定理の K^0 として K 自身がとれた場合を考えよう。すると K 上の G-原始元 $\alpha \in G_L$ が存在して

$$L = K(\eta) = K(\alpha).$$

定義及び logarithmic derivative の定め方から

$$l\delta(\alpha) = \alpha'\alpha^{-1} \in \mathcal{L}ie(G_K).$$

従って $l\delta(\alpha) = B$ とおけば，α は

$$(E^*) \qquad Z' = BZ, \qquad B \in \mathcal{L}ie(G_K) \subset \mathfrak{gl}(n, K)$$

の解である。即ちこれが求める標準形となる。(E^*) も K 上の方程式となることに注意しておく。η と α は

$$\eta = u\alpha, \qquad u \in G_K$$

なる関係で結ばれていて，従って (E') の Picard-Vessiot 群と (E^*) の Picard-Vessiot 群は同型になることが分る。言いかえると，K-valued な線形変換

$$Y = uZ$$

により、方程式(E')が標準形(E*)に変換された。uのことを簡単に変換と呼ぶことにする。

定理の証明及び詳しい説明は省略するが、変換uのとり方についてだけ述べておく。$\eta = (\eta_{ij})$とかくとき、

$$\mathfrak{p} := \{ \varphi \in K[Y_{ij}]_{i,j} \mid \varphi(\eta) = 0 \}$$

とおくと、$\mathfrak{p}$は多項式環$K[Y_{ij}]$の素idealとなる。そのlocusをWとおけば、WはK上の代数多様体となる。よってKの有限次代数拡大K'を適当にとると、

$$u \in W_{K'}$$

なるuが存在する。u(を行列の形に表したもの)が求める変換である。

ここで§2で挙げた例を振り返ってみる。

例1では$K' = K$ととれて、K-valuedな変換$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix}$により標準形$(E_1^*)$が得られた。このとき$G_1$原始元は

$$\alpha = u^{-1}\eta = \begin{pmatrix} 1 & \log x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例2では η の素idealが

$$\mathfrak{p} = \left(Y_1 Y_2 - 1,\ Y_1'^2 - \frac{\nu^2}{4x(x-1)} Y_1^2,\ Y_2'^2 - \frac{\nu^2}{4x(x-1)} Y_2^2 \right)$$

となるので $W_K = \phi$. そこで $K^0 = K(\sqrt{x(x-1)})$ とおけば

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix} \in W_{K^0}, \quad a = \frac{\nu}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$$

を得る。一方 $K^0 \subset K(\eta) = L$ であるから $LK^0 = L$. よって L/K^0 が G_2^0-原始拡大であり, G_2^0-原始元は

$$\alpha = u^{-1}\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \\ & \eta_2 \end{pmatrix}.$$

例3では η の素idealが

$$\mathfrak{p} = \left(Y_1^2 + Y_2^2 - x,\ Y_1' - \frac{1}{2x} Y_1 + Y_2,\ Y_2' - \frac{1}{2x} Y_2 - Y_1 \right)$$

となり, $W_K = \phi$. そこで $K^0 = K(\sqrt{x})$ とおくと K^0-valuedな変換

$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \sqrt{x} \end{pmatrix} \in W_{K^0}$$

を得る。このときは LK^0/K^0 が G_3-原始拡大であり, G_3-原始元は

$$\alpha = u^{-1}\eta = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

となる。

参考文献

1. Y. Haraoka, G-primitive extensions for linear ordinary differential equations, Kumamoto J. Math., <u>3</u> (1990).

2. E.R. Kolchin, Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, 1973.

3. M.F. Singer, Algebraic relations among solutions of linear differential equations : Fano's theorem, Amer. J. Math., <u>110</u> (1988).

4. 渋谷泰隆, 複素領域における線形常微分方程式, 紀ノ国屋,