数理解析研究所講究録
第 732 巻 1990 年 19-30

Elementary submodel と Stone-Čech コンパクト化

防衛大 加藤昭男 (Akio Kato)

"Elementary submodel" の概念は ロジックに於ては非常に重要かつ本質的であるが、最近 Dow [1] と Bandlow [2] により これが General Topology に応用され成功をおさめた。この小論では elementary submodel を用いて Stone-Čech remainder $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ が 次の形に分割されることを示す。

<u>定理</u> 1. ω^* は 2^{c} 個の、互いに non-homeomorphic な countably compact, dense subspaces C_α, of card. c に分割される：

$$\omega^* = \bigoplus_{\alpha < 2^{c}} C_\alpha .$$

しかも、各 C_α は、$\bigoplus_{\beta<\alpha} C_\beta$ の中に embed され<u>ない</u>。

($\oplus$ は単に disjoint union を表わす。)

この構成を更に精妙にすれば 各 C_α はどの C_γ $(\gamma > \alpha)$ の中にさえも embed されないようにできるが、この解説は後の機会にゆずる。ただ注意していただきたいのは、どの C_α も "Tail" $\bigoplus_{\alpha<\gamma<2^c} C_\gamma$ の中には embed 可能である、ということである。実際、ω^* は 2^c 個の disjoint copies of ω^* を含むことから 任意の subset $X \subseteq \omega^*$ with $|X| < 2^c$ に対し $\omega^* \setminus X$ は copy of ω^* を含むことがわかる。よって、どの "tail" も copy of ω^* を含むのである。

§1. Heuristic reason. 問題の発端はこうである。Elementary submodels の chain $M_0 \prec M_1 \prec \cdots \prec M_\alpha \prec \cdots$ $(\alpha < \kappa)$ ($M_\alpha \prec H(\theta)$ で θ は十分大きくとる) を考えよ。このとき、任意の topological space X に対し、$X \cap M_0 \subseteq X \cap M_1 \subseteq \cdots \subseteq X \cap M_\alpha \subseteq \cdots$ は一体如何なるものであるか? M_α は "elementary" であることから $X \cap M_\alpha$ は X の性質を大分保持しているに違いない。同相か? まさか! だって M_α の cardinality は十分低くおさえられる! しかし M_α の card. を余り低くおさえると自由度がない。ここで天の声あり。「中庸にまさるものなし」 $X = \omega^*$, $|M_\alpha| = \mathfrak{c}$ とせよ。しからば $|X| = 2^{\mathfrak{c}} > |M_\alpha|$ だから M_α で X は cover されないものの、$M_\alpha^\omega \subseteq M_\alpha$ としておけば countable sequence は自由に

M_α の中で扱える。思うに、数学の初めと終りには 哲学が必要なのだ。 以下はその実行であるが、当初の計画に僅差が生じ、できた M_α の列は必ずしも "elementary chain" にはなっていない。 しかし elem. submodel の有効性は示せたと思う。「計画」は達成されなくとも「願望」は達成される！

§2. What we need. $T \doteq \omega^*/\sim$ をすべての types of points in ω^* とする，即ち，equiv. relation $x \sim y$ $(x, y \in \omega^*)$ は permutation $p : \omega \approx \omega$ s.t. $\beta p(x) = y$ の存在を意味する。$x \in \omega^*$ が属する equiv. class を $[x] \in T$ と表わす。Countable discrete subset $A \subseteq \omega^*$ および point $x \in A^* = \mathrm{cl}A \setminus A$ に対し，<u>relative</u> <u>type</u> of x w.r.t. A を $t(x, A)$ と表わす。すなわち

$$t(x, A) = [(\beta h)^{-1}(x)] \in T \quad \text{where} \quad \begin{array}{ccccc} h : & \omega & \approx & A & \\ & \cap & & \cap & \\ & \beta\omega & \cong & \beta A & \subseteq \omega^* \end{array}$$

is an arbitrary enumeration of A であり，A を ω と identify したときの type of x within βA である。

T 上に次の "Rudin-Frolík order" $\sqsubset$ を考える。

$$\begin{array}{ccc} t_1 & \sqsubset & t_2 \\ \| & & \| \\ [x_1] & & [x_2] \end{array} \quad \text{iff} \quad \exists \text{embedding } h : \beta\omega \hookrightarrow \omega^* \text{ s.t. } h(x_1) = x_2$$

i.e. $t(x_2, A) = [x_1]$ for some $\omega \cong A \subseteq \omega^*$ $(x_2 \in A^*)$.

Frolík はこのとき t_1 "<u>produces</u>" t_2 と呼んだ。各 subset $X \subseteq \omega^*$ に対し 次の $T(X)$, $\hat{T}(X) \subseteq T$ を対応させる：

$$\begin{aligned} T(X) &\doteqdot \{t(x,A) \mid \omega \cong \underline{A \subseteq X},\ x\in X,\ x\in A^*\} \\ \cap\ & \\ \hat{T}(X) &\doteqdot \{t(x,A) \mid \omega \cong \underline{A \subseteq \omega^*},\ x\in X,\ x\in A^*\} \\ &= \{t\in T \mid \exists_{x\in X}\ t \sqsubset [x]\}. \end{aligned}$$

$T(X)$ は、X の中だけでできる relative types の全体であるが、$\hat{T}(X)$ の場合には X の外から作られる rel. types も含む。

Subspace $X \subseteq \omega^*$ に "新しい量" $T(X)$ を対応させる、というのが この小論の1つの idea であり、この萌芽は ω^* の non-homogeneity を証明した Frolík の論文の中にみられる。
$T(X)$ は一種の "degree of compactness" である。例えば、X が weak P-pts のみから成れば $T(X)=\phi$ であり、X が infinite かつ ctbly compact であれば $T(X)\neq\phi$ であり、また X が copy of ω^* or $\beta\omega$ を含めば $T(X)=T$ である。この最後のことと Introduction の終りに指摘したことから次を得る。

<u>Fact</u>.1. $|X| < 2^{c} \rightarrow T(\omega^*\setminus X) = T.$

$T(\ )$ の有用性は次の明らかな事実による。

<u>Fact</u>.2. 任意の subspaces $X, Y \subseteq \omega^*$ に対し、もし X が Y の中に embeddable ならば $T(X) \subseteq T(Y)$ である。従って、$T(X)\setminus T(Y) \neq \phi$ ならば X は <u>not</u> embeddable into Y である。

$t[x, X] \triangleq \{t(x, A) \mid \omega \cong A \subseteq X,\ x \in A^*\}$ と定めると、

$T(X) = \bigcup_{x \in X} t[x, X]$, $\hat{T}(X) = \bigcup_{x \in X} t[x, \omega^*]$.

$T(\ )$ の他に $\hat{T}(\ )$ を導入したのはその扱い易さにある。たとえば任意の spaces $X_\alpha \subseteq \omega^*$ に対し $\hat{T}(\cup X_\alpha) = \cup \hat{T}(X_\alpha)$ であるが $T(\ )$ については一般にこうはならない。Frolík は、任意の type は高々 $\mathfrak{c}$ 個の types から produce されることを示した。よって、$t[x, \omega^*] = \{t \in T \mid t \sqsubset [x]\}$ の cardinality は $\leq \mathfrak{c}$ である。(Steiner は $|t[x, \omega^*]| = \mathfrak{c}$ となる point x の存在を示している。) ゆえに、次の重要な estimation を得る。

Fact. 3. $|X| < 2^{\mathfrak{c}} \rightarrow |T(X)| \leq |\hat{T}(X)| < 2^{\mathfrak{c}}$.

さて、次に M を次のような elementary submodel of $H(\theta)$ とする: $M^\omega \subseteq M$ かつ $|M| = \mathfrak{c}$.

ここで、$H(\theta)$ は hereditarily of card. $< \theta$ なる sets 全体であり、θ は十分に大きい regular card. にとっておく。たとえばこの小論の範囲の議論では $\theta = \beth_{\omega+1}$ (where $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{n+1} = 2^{\beth_n}$, $\beth_\omega = \sup_{n \in \omega} \beth_n$, $\beth_{\omega+1} = 2^{\beth_\omega}$) ととっておけば十分すぎるほど十分である。$H(\theta)$ が目障りな人は $H(\theta)$ はすべての sets から成る universe V である、と考えてもさしつ

がえない。一般に M が N の elementary submodel である．($M \prec N$ と表わす) とは，任意の formula φ 及び $\forall a_1,\cdots,a_n \in M$ に対し $M \models \varphi(a_1,\cdots a_n)$ iff $N \models \varphi(a_1,\cdots a_n)$ が成立することであり，これは任意の formula ψ 及び $\forall a_1,\cdots,a_n \in M$ に対し $N \models \exists_x\ \psi(x,a_1\cdots a_n) \to \exists x \in M.\ N \models \psi(x,a_1\cdots a_n)$ が成立することと同等である。この後半の条件は Tarski Criterion と呼ばれ大変便利である。a が definable from $a_1,\cdots,a_n$ であるとは，a を characterize する formula が存在する，つまり "$\varphi(a,a_1\cdots a_n)\ \&\ \forall_x\,(\varphi(x,a_1\cdots a_n) \to x=a)$" なる φ が存在することをいう。$M \prec N$ の時，$a \in N$ が N に於て definable from elements of M ならば a は実際には M に属していることがわかる。この事実は断りなしにしょっちゅう使う。以上の definitions については Dow [1] 又は Handbook of Set-Theoretic Topology の 919 ページ (Baumgartner) を参照せよ。

以下，M と書いたならば，先に述べた M，つまり，elem. submodel of $H(\theta)$ (従って，上の definition で $N=H(\theta)$ の場合) で，$M^\omega \subseteq M$ (countable seq. について閉じているということ) かつ $|M| = \mathfrak{c}$ なるものを表わすものと約束する。$H(\theta)$ は本質的に model of set theory であり，M の elements により definable なものは再び M に属すことから ω, $\mathcal{P}(\omega)$, $\mathfrak{c}$, $\beta\omega$, (ω^*, τ) where $\tau = \{a^* \mid a \in \mathcal{P}(\omega)\}$ (τ は ω^* の clopen sets 全体)

などはすべてMのelementsであることがわかる。しかも$M^\omega \subseteq M$であることから$\mathcal{P}(\omega)$, $\mathfrak{c}$, τ $\subseteq M$となることもわかる。($|M| = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = |\omega^*|$だから$\omega^* \subseteq M$は言えない。)
実際，次が成立する。

<u>Fact</u>. 4. $\forall x \in M$に対し

(1) $|x| \leq \mathfrak{c} \rightarrow x \subseteq M$.

(2) $|x| \geqslant \mathfrak{c} \rightarrow |x \cap M| = \mathfrak{c}$.

<u>Proof</u>. (1) $|x| \leq \mathfrak{c}$とすると，$\exists f : \mathfrak{c} \twoheadrightarrow x$. $\mathfrak{c}, x \in M$だから，Mのelementarity (Tarski Criterion)により$f \in M$とできる。$\mathfrak{c} \subseteq M$だから$\forall \alpha \in \mathfrak{c}$に対し$f(\alpha) \in M$ ($f(\alpha)$はdefinable from $f, \alpha \in M$). $\therefore x = f[\mathfrak{c}] \subseteq M$.

(2) $|x| \geqslant \mathfrak{c}$より$\exists y \subseteq x$ $|y| = \mathfrak{c}$. Mのelementarityより$y \in M$とできる。(1)の結果から$y \subseteq M$ $\therefore y \subseteq x \cap M$.
$\therefore \mathfrak{c} = |y| \leq |x \cap M|$. $|M| = \mathfrak{c}$だから$|x \cap M| = \mathfrak{c}$. //

このFactから，たとえば$|\omega^* \cap M| = |T \cap M| = \mathfrak{c}$, $\forall x \in \omega^* \cap M$ $t[x, \omega^*] \subseteq M$などがわかる。

<u>Prop</u>. 1. $\forall X \in M$, $X \subseteq \omega^*$に対し，

$$T(X \cap M) = T(X) \cap M \quad , \quad \hat{T}(X \cap M) = \hat{T}(X) \cap M .$$

<u>Proof</u>. M の elementarity と, definability of $t(x,A)$ とから

$$t\in T(X)\cap M \leftrightarrow t\in M \ \& \ \omega\cong{}^{\exists}A\subseteq X \ {}^{\exists}x\in X \ t=t(x,A)$$
$$\leftrightarrow t\in M \ \& \ \omega\cong{}^{\exists}A\subseteq X\cap M \ {}^{\exists}x\in X\cap M \ t=t(x,A)$$
$$\leftrightarrow t\in T(X\cap M)$$

よって, 才1の等式がでてくる。才2の等式も同様。//

$T(\omega^*)=\hat{T}(\omega^*)=T$ だから, この Prop. より $T(\omega^*\cap M)=\hat{T}(\omega^*\cap M)=T\cap M$ がわかる。 $X\subseteq\omega^*$, $S\subseteq T$ に対し, 条件

$${}^{\forall}s\in S \ \ \omega\cong{}^{\forall}A\subseteq X \ \ {}^{\exists}x\in A^*\cap X \ \ s=t(x,A)$$

が満足されるとき, X を <u>S-countably compact</u> と呼ぶことにする。もちろん $S\neq\phi$ ならば S-c.cpt のとき通常の意味で countably compact になる。次の Prop. は M の elementarity から直ちに従う。

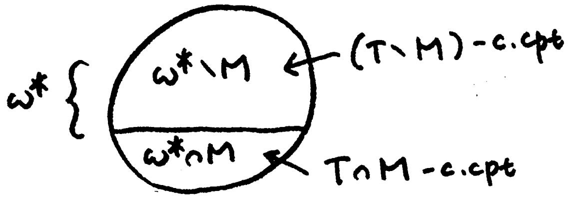
<u>Prop</u>. 2. $X\subseteq\omega^*$, $S\subseteq T$ とする。$X, S\in M$ ならば

$$X: S\text{-c.cpt} \rightarrow X\cap M : S\cap M\text{-c.cpt}.$$

<u>Lemma</u>. 1. ${}^{\forall}X\subseteq\omega^*$ に対し, $\omega^*\setminus X$ は $(T\setminus\hat{T}(X))$-c.cpt である。

<u>Proof</u>. これは $\hat{T}(X)$ の definition そのものである。実際, $\omega\cong A\subseteq\omega^*$, $s\in T\setminus\hat{T}(X)$ とすれば, 明らかに ${}^{\exists}x\in A^*$ $t(x,A)=s$. もし $x\in X$ とすると $s\in\hat{T}(X)$ となり, s のとり方に矛盾する。//

Prop.2 から $\omega^*\cap M$ は $T\cap M$-c.cpt，Lem.1 から $\omega^*\setminus M$ は $(T\setminus M)$-c.cpt であることがわかる。また，前に指摘したように $T(\omega^*\cap M) = T\cap M$ であり，一方，Fact.1 から $T(\omega^*\setminus M) = T$ である。



$$\begin{array}{c} T(\omega^*\setminus M) = T \\ \supsetneq \\ T(\omega^*\cap M) = T\cap M. \end{array}$$

§3. Construction. 前節の結果を組合せることにより，次の main lemma を得る。

<u>Lemma</u>. 2. $X\in M$, $X\subseteq\omega^*$, $|X|<2^{\mathfrak{c}}$ とする。

$C \triangleq \omega^*\cap M\setminus X$ と定めるとき，C は次の性質をもつ。

C は $(T\setminus\hat{T}(X))\cap M$-c.cpt であり，$T(C) = T\cap M$ かつ

$|(T\setminus\hat{T}(X))\cap M| = \mathfrak{c}$ である。

<u>Proof</u>. $|X|<2^{\mathfrak{c}}$ だから Fact 1 より $T(\omega^*\setminus X) = T$. よって，Prop.1 により $T(C) = T\cap M$. Lem.1 から $\omega^*\setminus X$ は $(T\setminus\hat{T}(X))$-c.cpt であるから，Prop.2 により C は，$(T\setminus\hat{T}(X))\cap M$-c.cpt である。Fact.3 から $|\hat{T}(X)|<2^{\mathfrak{c}}$ $\therefore$ $|T\setminus\hat{T}(X)| = 2^{\mathfrak{c}}$. ゆえに，Fact.4 により $|(T\setminus\hat{T}(X))\cap M| = \mathfrak{c}$. //

この lemma を用いて、次に定理1に於る ω^* の分割を構成する。まず、ω^* を well-order する：$\omega^* = \{x_\alpha \mid \alpha < 2^{\mathfrak{c}}\}$.
十分大きな regular card. Θ をとり、inductive に $2^{\mathfrak{c}}$-sequence of elementary submodels $M_\alpha \prec H(\Theta)$ を次のようにとる：

$M_0 \in M_1 \in \cdots M_\alpha \in \cdots\cdots \quad (\alpha < 2^{\mathfrak{c}})$

$M_\alpha^\omega \subseteq M_\alpha$. $|M_\alpha| = \mathfrak{c}$. $x_\alpha \in M_\alpha$, $\langle M_\beta \mid \beta < \alpha \rangle \in M_\alpha$.

$\tilde{M}_\alpha \triangleq \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ とおく。条件 $\langle M_\beta \mid \beta<\alpha \rangle \in M_\alpha$ より $\alpha, \tilde{M}_\alpha \in M_\alpha$ であるが、一般には $\tilde{M}_\alpha \subseteq M_\alpha$ とはならないことに注意。($\alpha \subseteq M_\alpha$ となるのは $|\alpha| \leq \mathfrak{c}$ のときのみ。また、$|\tilde{M}_\alpha| = |\alpha| \cdot \mathfrak{c}$ ゆえ、$\tilde{M}_\alpha \subseteq M_\alpha$ となるのも $|\alpha| \leq \mathfrak{c}$ のときのみである。従って、sequence $\langle \tilde{M}_\alpha \mid \alpha < 2^{\mathfrak{c}} \rangle$ がいわゆる elementary chain になるのは $\mathfrak{c}^+ = 2^{\mathfrak{c}}$ の時だけである。)

$C_\alpha \triangleq \omega^* \cap (M_\alpha \setminus \tilde{M}_\alpha) = \omega^* \cap M_\alpha \setminus \omega^* \cap \tilde{M}_\alpha$

と定めるとき、これが定理1を満たすことを示す。

$|\tilde{M}_\alpha| = |\alpha| \cdot \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$ であるから、$X = \omega^* \cap \tilde{M}_\alpha$ に Lem. 2 を適用できる。よって、C_α は、$(T \cap M_\alpha \setminus \hat{T}(\omega^* \cap \tilde{M}_\alpha))$-c.cpt，かつ $T(C_\alpha) = T \cap M_\alpha$, $|T \cap M_\alpha \setminus \hat{T}(\omega^* \cap \tilde{M}_\alpha)| = \mathfrak{c}$ である。

$\hat{T}(\omega^* \cap \tilde{M}_\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} \hat{T}(\omega^* \cap M_\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} (T \cap M_\beta) = T \cap \tilde{M}_\alpha$ だから

$$T \cap M_\alpha \setminus \hat{T}(\omega^* \cap \tilde{M}_\alpha) = T \cap (M_\alpha \setminus \tilde{M}_\alpha).$$

$x_\alpha \in M_\alpha$ としておいたから $\omega^* \subseteq \bigcup_{\alpha<2^{\mathfrak{c}}} M_\alpha$. ゆえに、$\omega^* \subseteq \bigoplus_{\alpha<2^{\mathfrak{c}}} C_\alpha$ である。また、Fact. 2 により、C_α を

$\omega^*\cap\tilde{M}_\alpha = \bigoplus_{\beta<\alpha} C_\beta$ の中に embed することは不可能である。

一般に subset $X\subseteq\omega^*$ が $\forall x\in X\ [x]\subseteq X$ (i.e. $X=\pi^{-1}\pi(X)$ where $\pi:\omega^*\twoheadrightarrow T=\omega^*/\sim$) なる条件をみたすとき、orbit-saturated (o.s. と略す) と呼ぶことにする。o.s. ならば明らかに dense in ω^* である。また、$|[x]|=\mathfrak{c}$ であるから Fact.4(1) により $X\in M$ に対し X : o.s. ならば $X\cap M$: o.s. (従って $X\setminus M$ も o.s.) となる。よって、各 C_α は o.s. である。

以上で、定理1が示されたわけだが、実際には、より詳しく次の結果を得たことになる。

定理1* $\omega^*=\{x_\alpha \mid \alpha<2^{\mathfrak{c}}\}$ とし、elementary submodels M_α $(\alpha<2^{\mathfrak{c}})$ of $H(\theta)$ (θ は十分大きい) を次のようにとる。

$M_0\in M_1\in\cdots M_\alpha\in\cdots\cdots$ $(\alpha<2^{\mathfrak{c}})$

${}^{\omega}M_\alpha\subseteq M_\alpha$, $|M_\alpha|=\mathfrak{c}$, $x_\alpha\in M_\alpha$, $\langle M_\beta \mid \beta<\alpha\rangle\in M_\alpha$.

このとき、$C_\alpha \triangleq \omega^*\cap(M_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}M_\beta)$ と定めれば、ω^* の、互いに non-homeomorphic な countably compact spaces による分割 $\omega^*=\bigoplus_{\alpha<2^{\mathfrak{c}}} C_\alpha$, $|C_\alpha|=\mathfrak{c}$ を得る。C_α は orbit-saturated (従って dense in ω^*) であり、かつ $T\cap(M_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}M_\beta)$-ctbly compact である。$T(C_\alpha)=T\cap M_\alpha$, $|T\cap(M_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}M_\beta)|=\mathfrak{c}$.

しかも、各 C_α は、$\bigoplus_{\beta<\alpha} C_\beta$ の中に topologically に embed され得ない。

《文献》

[1] A. Dow "An introduction to Applications of Elementary submodels to Topology". Top. Proc. 13 (1988) pp. 17-72.

[2] I. Bandlow "A note on Applications of the Löwenheim-Skolem theorem in General Topology"
Zeit. f. Math. Logik u. Gr. d. Math., Bd. 35 (1989) pp. 283-288.

[3] J. E. Baumgartner "Applications of the Proper Forcing Axiom".
Handbook of Set-Theoretic Topology. North-Holland, (1984) pp. 913-960.

Relative type および Rudin-Frolík order については、次の本を参照せよ。

[4] R. C. Walker "The Stone-Čech compactification"
Erg. d. Math. u. Grenz., Bd. 83 (1974) Spriger.