数理解析研究所講究録
第732巻 1990年 39-43

PRODUCTS OF STATIONARY SETS

静岡大・教育　大田春外（Haruto Ohta）

以下の結果は，大分大の家本宣幸氏と横浜国立大の玉野研一氏との共同研究によるものです。

ω_1 を可算順序数全体の集合とし，ω_1 の部分集合はつねに ω_1 上の順序位相に関する相対位相を持つものとする。$A \subseteq \omega_1$ が stationary であることを，$A \in S(\omega_1)$ によって表わす。さて，$A, B \in S(\omega_1)$ であるとき，それらの直積 $A \times B$ はどの様な位相的性質を持つか。この問題に関して，我々は次の定理を得た。

定理 1.　$A, B \in S(\omega_1)$ に対し，次は同値：

(1)　$A \cap B \in S(\omega_1)$,

(2)　$A \times B$ は shrinking 性を持つ,

(3)　$A \times B$ は可算パラコンパクト,

(4)　$A \times B$ は正規,

(5) $A \times B$ は ω_1－コンパクト。

ここで，一般に，空間 X が shrinking 性をもつとは，X の任意の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対し，開細分 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ で各 $\alpha \in A$ に対し，$\mathrm{cl}_X V_\alpha \subseteq U_\alpha$ であるものが存在することを言う。また，ω_1－コンパクト空間は，その任意の非可算部分集合が集積点を持つ様な空間である。

$A, B \subseteq S(\omega_1)$ を互いに素である様にとると，$A \times B$ は定理 1 から正規ではない。これは，多分，最小の非可算濃度を持ち第 1 可算公理をみたす正規空間の積が必ずしも正規でないことを示す最も簡単な例である（このような反例は，Todorcevic [2] によって最初に与えられた）。

一方，もし $A \subseteq \omega_1$ が stationary でなければ，A は ω_1 の，互いに素な有界な開区間の和に含まれる。この事実から，次の系を得る。

系．任意の $A \subseteq \omega_1$ に対し，A^2 は shrinking 性を持つ．従って，特に，A^2 は正規，可算パラコンパクトである。

定理 1 の (1) → (2) の証明は，pressing down lemma と次の補題に支えられている。

補題．　X を第1可算公理をみたすパラコンパクト空間とする。このとき，任意の $A \in S(\omega_1)$ に対し，$X \times A$ は shrinking 性を持つ。

定理1は，上の補題に於いて，X のパラコンパクト性を shrinking 性に弱められないことを示している。これらの事実から次の問題が起る；　任意の $A \in S(\omega_1)$ との積 $X \times A$ が shrinking 性を持つ様な，第1可算公理をみたす空間 X はパラコンパクトか？　より一般に，任意の $A \in S(\omega_1)$ との積 $X \times A$ が正規となる空間 X は，どの様な空間か？　これらの問題は未解決である。

(4), (5) → (1)　の証明を述べる。$A \cap B \notin S(\omega_1)$ であると仮定して，$A \times B$ が正規でも，ω_1 − コンパクトでもないことを示す。$A \cap B \cap C = \phi$ である，ω_1 の非有界閉集合 C が存在する。$(A \cap C) \times (B \cap C)$ が正規でも，ω_1 − コンパクトでもないことを示せば十分だから，A, B の代りに，$A \cap C$ と $B \cap C$ を考えることにより，初めから，$A \cap B = \phi$ であると仮定してよい。このとき，写像 $f: B \to A$ を

$$f(\beta) = \min\{\alpha \in A : \alpha > \beta\} \;;\; \beta \in B$$

によって定義する．各 $\alpha \in f[B]$ に対し，$F_\alpha = \{\alpha\} \times f^{-1}(\alpha)$

とおくと，F_α は $A \times B$ の閉集合で，族 $\{F_\alpha : \alpha \in f[B]\}$ は discrete．ゆえに，$A \times B$ は ω_1-コンパクトでない。更に，$f[B]$ は，$f^{-1}[A_1]$ と $f^{-1}[A_2]$ が共に stationary である様な互いに素な集合 A_1，A_2 に分割される。これは

$$\{\min f^{-1}(\alpha) : \alpha \in f[B]\} \in S(\omega_1)$$

であることから直ちに分る。そこで，

$$F_i = \bigcup\{F_\alpha : \alpha \in A_i\},\ i = 1, 2$$

とおく．このとき，F_1 と F_2 は $A \times B$ の互いに素な閉集合である。ところが，pressing down lemma を適用すれば，これらは，$A \times B$ の互いに素な開集合で分離されないことが分る。ゆえに $A \times B$ は正規でない。

一般に，正則濃度 κ の始数を，同じ記号 κ で表わす。κ に於いて stationary である集合 A, B について，定理1と同じ結果は期待できない。しかし，次の定理は成立する。

定理2． κ を正則濃度とするとき，$A, B \in S(\kappa)$ について，次は同値；

(1)　$A \cap B \in S(\kappa)$，

(2)　$A \times B$ は κ-コンパクト．

特に，κ より小さい最大の濃度 κ^- が存在するとき，次の(3)

も(1)と同値である。

(3) $A \times B$ の単調増大開被覆 $\{U_\alpha ; \alpha \in \kappa^-\}$ は shrink できる。

系(van Douwen - Lutzer [1]). κ を正則濃度，$A, B \in S(\kappa)$ を互いに素とする。このとき，A と B は位相同型でない。

証明．もし $A \approx B$ ならば，$A \times A \approx A \times B$．ところが定理2より，$A \times A$ は κ-コンパクトであるが，$A \times B$ はそうではない。

参考文献

[1] E. K. van Douwen and D. J. Lutzer, On the classification of stationary sets, Michigan Math. J., 26 (1979), 47-64.

[2] S. Todorcevic, On the Lindelöf property of Aronszajn trees, Proc. 6th. Prague Top. Symp. (1986), 577-588.