数理解析研究所講究録
第 732 巻 1990 年 44-57

次元を保存する位相群への埋め込みについて

筑波大 名倉 利行 (Nagura Toshiyuki)

1. Introduction

D. B. Shakhmatov の最近の論文 [S] の内容を紹介する。

space はすべて Tychonoff space とする。

Belńov は [B] において次を示した。"任意の space X に対して、$\dim Y \leq \dim X$ となる homogeneous space Y が存在して、X は Y の closed subspace となる。" そして、Y として topological group をとれるか? という問題をあげた。これに対し、Shakmatov はまず、次の否定解を与えた。

定理. $n \neq 0, 1, 3, 7$ とすると、S^n は $\dim G = n$ となる topological group G に埋め込むことはできない。

これは、$n \neq 0, 1, 3, 7$ のとき、S^n は H-space ではない、という Adams の theorem [Ad] を使って示される。こ

こではこの結果よりも、$n=0$ の場合の次の肯定解がメインである。

定理． 任意の space X に対し、次は同値である。

1) $\dim X = 0$

2) $\dim F^*(X) = 0$

3) $\dim A^*(X) = 0$

上における $F^*(X)$（$A^*(X)$）は、X を closed に含む topological（Abelian）group である。これについて、後で詳しく記す。

2．free topological group について

space X に対して、X を subspace として含む topological group をつくる方法として、free topological group $F(X)$ がよく知られている。（[G]）group としての $F(X)$ は、X を base とする free group である。すなわち、

$$F(X) = \{ g \mid g = \underbrace{x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}}_{(x_i = x_{i+1} \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1})},\ x_i \in X,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\},\ n \in \omega \}$$

集合として X は $F(X)$ に自然に含まれている。topology は、X のもともとの topology を induce するような $F(X)$ 上の group topology の中で最強のものを与える。これは、X を induce する $F(X)$ 上の topology の中で、次をみたす唯一のものである。

☆ 任意の topological group G と、任意の continuous map $f : X \to G$ に対し、homomorphic な拡張 $\hat{f} : F(X) \longrightarrow G$ が continuous である。

このとき X は $F(X)$ の closed subspace となる。

X に対し、group $A(X)$ は、X を base とする free Abelian group である。すなわち、

$$A(X) = \left\{ g \;\middle|\; g = \underset{(x_i = x_j \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_j)}{\underline{\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n}},\ x_i \in X,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\},\ n \in \omega \right\}$$

topology は、$F(X)$ と同様に、X のもともとの topology を induce する最強の group topology を入れる。これは、X を induce して、かつ次をみたす $A(X)$ 上の唯一の topology である。

☆ 任意の topological Abelian group G と任意の conti. map $f: X \longrightarrow G$ に対して、homomorphic な拡張 $\tilde{f}: A(X) \longrightarrow G$ が continuous である。

すべての space X に対し、$\dim X = 0$ ならば $\dim F(X) = 0$ (または $\dim A(X) = 0$) か? という問題 ([A']) は未解決である。 部分解として、Tkačenko [T_1] は " $\dim X = 0$ ならば $\operatorname{ind} A(X) = 0$ " を、Sipachöva [Si] は " $\dim X = 0$ ならば $\operatorname{ind} F(X) = 0$ " を示した。

3. free precompact (Abelian) group $F^*(X)$ ($A^*(X)$)

space X に対し、group $F(X)$ ($A(X)$) 上の group topology で、X のもともとの topology を induce するものは、一般に一通りではない。 Shakhmatov のアイデアは、$F(X)$ 上の topology を少し改良することによって、$\dim X = 0 \Rightarrow$ (改良された topology で) $\dim F(X) = 0$ が常に成り立つようにすることである。

定義 1. topological group G が precompact であるとは、Gがある compact group H の subgroup となるときをいう。

定義2（[S] 1.5）．　X を space，$\mathcal{T}^*$ を $F(X)$ $(A(X))$ 上の（Hausdorff）group topology とする。次をみたすとき，$(F(X), \mathcal{T}^*)$ を X の free precompact group（$(A(X), \mathcal{T}^*)$ を X の free precompact（Abelian）group）という。

i) $\mathcal{T}^*$ は X のもともとの topology を induce する。

ii) $\mathcal{T}^*$ は precompact．

iii) 任意の compact（Abelian）group G と，任意の continuous map $f : X \to G$ に対し，homomorphic な拡張 $\tilde{f} : (F(X), \mathcal{T}^*) \longrightarrow G$ $(\tilde{f} : (A(X), \mathcal{T}^*) \longrightarrow G)$ が continuous である。

命題3（[S] 1.6）．　すべての space X に対し，X の free precompact（Abelian）group $(F(X), \mathcal{T}^*)$ $((A(X), \mathcal{T}^*))$ が unique に存在する。

以後，$(F(X), \mathcal{T}^*)$，$(A(X), \mathcal{T}^*)$ をそれぞれ $F^*(X)$，$A^*(X)$ とかく。

命題4（[S] 2.9）．　X は C^*-embedded in $F^*(X)$ $(A^*(X))$。

よって，$\dim X \leq \dim F^*(X)$ $(\dim A^*(X))$ である。

命題5（[S] 2.3）．　$F^*(X)$ は $F^*(\beta X)$ の（自然な imbedding によって）subgroup である。　$A^*(X)$ についても同様。

$\dim X = 0 \Rightarrow \dim F^*(X) = 0$　（$\dim A^*(X) = 0$）を示すために，precompact group に関する一般的な性質を調べる．

定義6（[T_2]）．　topological group G が次の (*) をみたすとき，$\mathbb{R}$-factorizable であるという。

(*)　任意の continuous map $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ に対し，$w(H) \leq \omega$ なる topological group H と，continuous homomorphism $\pi : G \longrightarrow H$ と，continuous map $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して $f = \varphi \circ \pi$ をみたす。

定理7（[T_3]）．　precompact group は $\mathbb{R}$-factorizable である。

定理8（[S] 3.1）．　G を $\mathbb{R}$-factorizable group，$\operatorname{ind} G = 0$，H を topological group，$\pi : G \longrightarrow H$ を conti. homomorphism とするとき，ある topological group G^* と，

continuous homomorphisms $g: G \longrightarrow G^*$, $h: G^* \longrightarrow H$ が存在して、$\pi = h \circ g$, $\operatorname{ind} G^* = 0$, $w(G^*) \leq w(H)$ をみたす。

証明. $w(H) = \tau$ とする。

$n \in \omega$ に対し、group G_n, continious homomorphisms $g_n: G \longrightarrow G_n$, $h_n: G_n \longrightarrow G_{n-1}$ を、次をみたすようにとる。

i) $G_0 = H$, $g_0 = \pi$

ii) $w(G_n) \leq \tau$

iii) $g_n = h_{n+1} \circ g_{n+1}$

iv) 任意の open nbd U of e_{G_n} in G_n に対し、ある clopen nbd W of $e_{G_{n+1}}$ in G_{n+1} が存在して $W \subset h_{n+1}^{-1}(U)$。

いま、n まで G_n, g_n, h_n が定められたとする。
$\{U_n^\alpha \mid \alpha < \tau\}$ を nbd base of e_{G_n} in G_n とし、$\alpha < \tau$ を fix する。
$\operatorname{ind} G = 0$ より、clopen nbd V_n^α of e_G in G が存在して $V_n^\alpha \subset g_n^{-1}(U_n^\alpha)$ をみたす。

$f_{n+1}^\alpha : G \longrightarrow \mathbb{R}$ を、

$$f_{n+1}^\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in V_n^\alpha \\ 1 & \text{if } x \notin V_n^\alpha \end{cases}$$

とする。G は $\mathbb{R}$-factorizable だから、group G_{n+1}^α と、continuous homomorphism $g_{n+1}^\alpha : G \longrightarrow G_{n+1}^\alpha$, continuous onto map $\varphi_{n+1}^\alpha : G_{n+1}^\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して、$w(G_{n+1}^\alpha) \leq \omega$, $f_{n+1}^\alpha = \varphi_{n+1}^\alpha \circ g_{n+1}^\alpha$

をみたす。

$g_{n+1} = \Delta\{g^\alpha_{n+1} \mid \alpha < \tau\} \Delta g_n : G \longrightarrow \prod_\alpha G^\alpha_{n+1} \times G_n$ とし、

$G_{n+1} = g_{n+1}(G)$, $h_{n+1} : G_{n+1} \longrightarrow G_n$, $p^\alpha_{n+1} : G_{n+1} \longrightarrow G^\alpha_{n+1}$ を projection とする。

ii), iii) をみたすことは明らか。

$W^\alpha_n = (\varphi^\alpha_{n+1} \circ p^\alpha_{n+1})^{-1}(0)$ は clopen nbd of $e_{G_{n+1}}$ in G_{n+1} で、

$$g^{-1}_{n+1}(W^\alpha_n) \subset f^{\alpha\,-1}_{n+1}(0) = V^\alpha_n \subset g^{-1}_n(U^\alpha_n) \quad .$$

よって

$$W^\alpha_n \subset g_{n+1}(g^{-1}_n(U^\alpha_n)) \subset h^{-1}_{n+1}(U^\alpha_n) \quad .$$

よって iv) もみたす。

以上より、任意の $n \in \omega$ に対して、G_n, g_n, h_n がつくられた。

$g : \Delta\{g_n \mid n \in \omega\} : G \longrightarrow \prod_{n\in\omega} G_n$, $G^* = g(G)$,

$h : G^* \longrightarrow H$ を projection とする。$\pi = h \circ g$, $w(G^*) \leq \tau$ は明らか。iv) を使えば、$\operatorname{ind} G^* = 0$ もすぐわかる。□

定理 9 ([S] 3.3). 任意の $\mathbb{R}$-factorizable group G に対し、$\operatorname{ind} G = 0$ と $\dim G = 0$ は必要十分である。

証明. 一般の Tychonoff space X に対し、$\dim X = 0$ ならば $\operatorname{ind} X = 0$ である。

いま、 ind $G = 0$ とする。

Z を、 $w(Z) \leq \omega$ なる space, $f: G \longrightarrow Z$ を continuous map とする。 このとき、 $w(Y) \leq \omega$, $\dim Y \leq 0$ なる space Y と、 continuous maps $g: G \longrightarrow Y$, $h: Y \longrightarrow Z$ が存在して $f = h \circ g$ となることを示せばよい。

G は $\mathbb{R}$-factorizable だから $w(H) \leq \omega$ なる topological group H と、 continuous homomorphism $\pi: G \longrightarrow H$, continuous map $\varphi: H \longrightarrow Z$ が存在して $f = \varphi \circ \pi$ をみたす。
定理8 より topological group G^* と continuous homomorphisms $g: G \longrightarrow G^*$, $h: G^* \longrightarrow H$ が存在して $\pi = h \circ g$, $\mathrm{ind}\, G^* = 0$, $w(G^*) \leq w(H) \leq \omega$ をみたす。 $w(G^*) \leq \omega$ より $\dim G^* = 0$.
よって、 $Y = G^*$ とすればよい。

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[drr, "\pi:\text{homom.}"] \arrow[dd, "g:\text{homom.}"'] & & Z & w(Z) \leq \omega \\
& & H \arrow[u, "\varphi"'] & w(H) \leq \omega \\
G^* \arrow[urr, "h:\text{homom.}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{ind}\, G^* = 0$, $w(G^*) \leq \omega$ $\square$

定理 10 ([S] 4.1)　space X に対し，次は同値。

(i) $\dim X = 0$

(ii) $\dim F^*(X) = 0$

(iii) $\dim A^*(X) = 0$

(iv) $\operatorname{ind} F^*(X) = 0$

(v) $\operatorname{ind} A^*(X) = 0$

証明．　(i) ⇒ (iv)．$\dim X = 0$ とすると $\dim \beta X = 0$。
Graev の定理 ([G]) より $\operatorname{ind} F(\beta X) = 0$．
$F_n(\beta X)$ は compact ([G]) だから $\dim F_n(X) = 0$．
$F_n^*(\beta X) \approx F_n(\beta X)$，$F^*(\beta X) = \bigcup_n F_n^*(\beta X)$ だから $\dim F^*(\beta X) = 0$。
よって $\operatorname{ind} F^*(\beta X) = 0$。命題 5 より $\operatorname{ind} F^*(X) = 0$．

(i) ⇒ (v)．上と同様に証明できる。

(ii) ⇒ (i)，(iii) ⇒ (i)．命題 4 より。

(iv) ⇒ (ii)，(v) ⇒ (iii)．定理 9 より。□

系 11 ([S] 4.3)．任意の precompact (Abelian) group G に対し，ある precompact (Abelian) group H と，continuous，onto，open，homomorphism $\pi : H \longrightarrow G$ が存在して，$\dim H = 0$，$w(H) = w(G)$ となる。

証明． D を $|D| = |G|$ なる discrete space とし，
$\xi : D \longrightarrow G$ を 1 to 1, onto map とする。 $\tilde{\xi} : \beta D \longrightarrow \beta G$
を ξ の extension とし， $X = \tilde{\xi}^{-1}(G)$ ， $f = \tilde{\xi}|X : X \longrightarrow G$ と
する。
f は quotient map． よって $\tilde{f} : F^*(X) \longrightarrow G$ は open map。
定理 10 より， $\mathrm{ind}\, F^*(X) = 0$ ．
定理 8 より， topological group H と continuous homomorphisms
$g : F^*(X) \longrightarrow H$ ， $\pi : H \longrightarrow G$ が存在して $\tilde{f} = \pi \circ g$ ，
$H = g(F^*(X))$ ， $w(H) \le w(G)$ ， $\mathrm{ind}\, H = 0$ をみたす。
このとき， H は precompact ； よって $\dim H = 0$ ．
$\tilde{f}$ は open だから π も open ． よって $w(G) \le w(H)$ 。 □

上の系は，次の事実と比べるとおもしろい。
" $\pi : H \longrightarrow G$ が continuous, onto, homomorphism,
H (and G) が pseudocompact group ならば $\dim G \le \dim H$ ． "
なお， pseudocompact group は precompact である。

4. Closed imbeddings into precompact groups preserving zero-dimensionality.

complete metric space X で， $\mathrm{ind}\, X = 0$ かつ $\dim X \ne 0$ な

るものがある（[R]）．このXに対し，定理10より $\mathrm{ind}\, F^*(X) \neq 0$，$\mathrm{ind}\, A^*(X) \neq 0$ である．よって，$\mathrm{ind}\, X = 0$ ならば $\mathrm{ind}\, F^*(X) = 0$（$\mathrm{ind}\, A^*(X) = 0$）か？という質問は No である．また，free (Abelian) topological group に関する同様の質問も No である．実際，Dowker space X（[D]）は，F(X)（A(X)）上の，$\mathcal{T}^* \subset \tilde{\mathcal{T}}$ なる任意の group topology $\tilde{\mathcal{T}}$ に対し，$\mathrm{ind}\,(F(X), \tilde{\mathcal{T}}) \neq 0$（$\mathrm{ind}\,(A(X), \tilde{\mathcal{T}}) \neq 0$）である（[S] 4.6）．ところが，F(X)（A(X)）上の group topology をとり直すことによって，次がいえる．

定理12（[S] 5.1）．$(X, \mathcal{T})$ を space，$\mathrm{ind}\, X = 0$ とする．このとき，F(X) 上の group topology $\tilde{\mathcal{T}}$ で，次をみたすものがある．

i) $\tilde{\mathcal{T}}|X = \mathcal{T}$

ii) $(F(X), \tilde{\mathcal{T}})$ は precompact

iii) $w(F(X), \tilde{\mathcal{T}}) = w(X, \mathcal{T})$

iv) $\dim (F(X), \tilde{\mathcal{T}}) = 0$

v) X は closed in $(F(X), \tilde{\mathcal{T}})$

A(X) についても同様．

参考文献

[S] D. B. Shakhamatov, Imbeddings into topological groups preserving dimensions, preprint.

[B] V. K. Bel'nov, The dimension of topologically homogeneous spaces and free homogeneous spaces, Soviet Math. Dokl. 19 (1978) No1. 86-89

[Ad] J. F. Adams, On the non-existense of elements of Hopf invariant one, Annals of Math. 72 (1960) 20-104.

[G] M. I. Graev, Free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR, ser, matem. 12 (1948) 279-~~37~~ 324.

[A_1] A.V. Arhangel'skii, Algebraic objects generated by a topological structures, Itogi Nauki i Tekhniki, ser, Algebra, Topology, Geometry 25. 141-198.

[A_2] A.V. Arhangel'skii, Any topological group is a factor group of a zero-dimensional topological groups, Soviet Math. Dokl, 23 (1981) No.3 615-619.

[T_1] M.G. Tkačenko, On zerodimensional topological groups, Trans. Leningrad Intern. Top. Conference. 1982, 113-118.

[T_2] M G. Tkačenko, Factorization theorems for topological groups and their applications, Topol. Appl, to appear.

[T_3] M. G. Tkačenko, Compactness type properties in topological groups, Czech. Math. J. 38 (113) 1988 324-341.

[Si] O. V. Sipachöva, Zerodimensionality and completeness of free topological groups. Serdica (1) 1989.

[R] P. Roy, Nonequality of dimensions for metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968) 117-132.

[D] C. H. Dowker, Local dimension of normal spaces, Quart. J. Math. Oxford, 6 (1955) 101-120.