数理解析研究所講究録
第732巻 1990年 69-88

Complexity of a Continuous Self-Mapping

筑波大学数学系　木村 孝(Takashi KIMURA)

Bowen によって定義された entropy を、General Topology 的に考えた場合、その定義の不自然さのためうまくいかない部分がある。この小論では、Bowen の entropy の定義を自然と思われる方法で修正した uniform entropy を定義し、これについて考察する。また、topological entropy も定義しこれについても、dimension theory と同様な議論を展開する。

1. Introduction.

General Topology では、homeomorphic な spaces は同じものとみなし、homeomorphic な spaces が共にもつ性質(topological property or topological invariant)を研究するのがその目的の1つである。たとえば、「R^n と R^m が homeomorphic になるための必要十分条件は、$n=m$ である。」を示そうとする場合、十分であることは明らかであるが、必要であることは、「R^n の dimension は n であり R^m の dimension は m で、dimension は topological invariant であるから、$n=m$ である。」といったように示す。ここで mappings に対しても同様なことを考えてみよう。

space X 上の continuous self-mapping $f:X\to X$ と space Y 上の continuous self-mapping $g:Y\to Y$ に対して、X から Y への homeomorphism $k:X\to Y$ で $kf=gk$ となるものが存在するとき、f と g は

topologically conjugate するという。homeomorphic な spaces を同じものとみなしたように、topologically conjugate する２つの self-mappings は同じものとみなすことにする。

$Y_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ とし、Y_n^Z を Y_n の元からなる両側無限列全体に積位相を入れた空間とする。σ_n を $\sigma_n((y_i)) = (y_{i+1})$ で定義された shift mapping とする。このとき、n が２以上のとき、Y_n^Z は topological には Cantor set と homeomorphic になる。ここで、先ほど spaces に対して考えたのと同じ種類の問題「σ_n と σ_m はどんなとき、topologically conjugate するか？」を考えてみよう。spaces に対しては、dimension を考えることで、うまく解決したように、この問題に対しては、entropy を考える。σ_n の entropy は log n なので、topologically conjugate する self-mappings の entropies は一致することに注意すれば、σ_n と σ_m が topologically conjugate するのは、$n = m$ のときに限ることがわかる。

ここでいう entropy とは continuous self-mapping f の複雑さを表す量で、h(f) と書かれ、0 以上の実数もしくは、∞ の値をとる。この小論では、dimension theory 的な展開をしたいので、主に次の５つの性質（以下、Theorem と書くが、これらは、dimension theory の場合と同様に、無条件に成り立つものではない）について考える。

最初に断わったように、topologically conjugate する self-mapping は同じものとみなしたので、次の性質は、必ずもつべきものである。

(1) Topological Conjugacy Theorem.

topologically conjugate する２つの continuous self-mappings f、g に対し、

$$h(f) = h(g)$$

が成り立つ。

entropy は、self-mapping の複雑さを表す量であるから、dimension theory の subset theorem と同様に、submapping 的なものの entropy は元の self-mapping の entropy の値で上から押さえられるべきだと考えられる。entropy は self-mapping に対してしか定義されていないので、invariant subset に制限された self-mapping を self-submapping と考えるのが、最も自然である。

(2) Submapping Theorem.

space X 上の continuous self-mapping f と f-invariant subset Y of X に対し、

$$h(f_{|Y}) \leqq h(f)$$

が成り立つ。

submapping theorem を考えたのと同様に、次の sum theorem も自然に考えられる。

(3) Sum Theorem.

space X 上の continuous self-mapping f と X = Y ∪ Z となる f-invariant subsets Y、Z of X に対し、

$$h(f) = \max\{h(f_{|Y}),\ h(f_{|Z})\}$$

が成り立つ。

dimension theory でいう product theorem は、product の dimension がそれぞれの dimension の和で上から押さえられる、というものだが、理想的には、一致して欲しいものである。ここでは、entropy の product theorem とは、次のこととする。

(4) Product Theorem.

continuous self-mappings $f:X\to X$, $g:Y\to Y$ に対し、

$$h(f\times g) = h(f)+h(g)$$
$$h(f\times g) \leqq h(f)+h(g)$$
$$h(f\times g) \geqq h(f)+h(g)$$

のいずれかが、一般的に成り立つ。

２つの spaces を与えた場合、上のいずれか１つが満たされるのは当然であるが、「一般的に成り立つ」、というのは、ある class of spaces とある entropy に対して、上の関係のいずれか１つが定まり、その class に属する任意の２つの spaces に対して、その entropy が、定められた関係を満たすときのことをいう。

compactification theorem は dimension theory の場合と同様に考えることができる。

(5) Compactification Theorem.

space X 上の continuous self-mapping f に対し、compactification αX of X と extension $\hat{f}:\alpha X\to\alpha X$ of f で、

$$h(\hat{f}) = h(f)$$

となるものが存在する。

2. Definitions and relationships.

この節では、Bowen の定義を修正した uniform entropy を定義し、Adler, Konheim and McAndrew による topological entropy 及び Bowen による entropy との関係について調べる。

topological entropy は measure-theoretic entropy の modification として、Adler, Konheim and McAndrew によって、compact space X 上の continuous self-mapping f に対し、1965年に最初に定義された。この小論では、この topological entropy を $h_{AKM}(f)$ と書くことにする。

1971年には、Bowen によって metric space (X, d) 上の uniformly continuous self-mapping f に対し、その entropy が定義された。この小論では、この entropy を $h_{B,d}(f)$ と書くことにする。ここで、d は X 上の metric である。

この Bowen による entropy に対して、次が知られている。

d, d' を metrizable space X 上の metrics とする。(X, d) から (X, d') への identity mapping が uniform isomorphism となるとき、d と d' は <u>uniformly</u> <u>equivalent</u> であるという。このとき、X 上の self-mapping f に対し、f が uniformly continuous with respect to d であることと、f が uniformly continuous with respect to d' であることは同値である。

d と d' が uniformly equivalent であるとき、X 上の uniformly continuous self-mapping f に対し２つの entropies $h_{B,d}(f)$, $h_{B,d'}(f)$ が定義されるが、この２つの entropies の値は等しい。

また、metrizable space X と X 上の metrics d、d’と X 上の continuous self-mapping f で、f は uniformly continuous with respect to d and d’で、$h_{B,d}(f)$ と $h_{B,d'}(f)$ の値が異なるものを作ることができる。よって、Bowen の定義した entropy は uniform entropy と呼ぶべきものであって、topological entropy ではない。

compact metric space 上の metric はすべて uniformly equivalent で continuous self-mapping は uniformly continuous なので、Adler, Konheim and McAndrew の意味でも Bowen の意味でも entropy は一意に定義することができる。そして、この２つの entropies は一致する。

次に、Bowen の定義を修正した uniform entropy を定義する。Bowen は metric space 上の uniformly continuous self-mapping に対して entropy を定義したが、上でみたように Bowen の定義による entropy は uniform structure によって決定されるものなので、この節では、uniform space 上の uniformly continuous self-mapping に対して、uniform entropy を定義する。uniform space 上の uniformly continuous self-mapping として定義した方が Bowen の定義の不自然さがはっきりする（不自然さについては、Remark 2.3 で述べる）。
Bowen の定義をそのまま拡張することで、uniform space 上の uniformly continuous self-mapping に対して、その entropy を定義することができるのだが、この小論の最初にも書いたように、そのままでは General Topology 的にはうまくいかないところがあるので、少し修正したものを以下に定義する（うまくいかない部分は次の節で述べる）。

以下、(X, Φ) を uniform space, f を X 上の uniformly continuous self-mapping とする。但し、Φ は uniformity で collection of open covers

で定義されたものとする。

$x, y \in X$, $\mathcal{U} \in \Phi$ に対し、$y \in St(x, \mathcal{U})$ のとき、

$$d(x, y) < \mathcal{U}$$

と書き、そうでないとき

$$d(x, y) > \mathcal{U}$$

と書くことにする。

$\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in \Phi$ に対し、

$$\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$$

とおく。

以下、しばらくの間、Y を totally bounded uniform subspace of X、$\mathcal{U} \in \Phi$、$n > 0$ とする。

$$N(Y, \mathcal{U}) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \subset \mathcal{U}, Y \subset \cup\mathcal{V}\}$$

$$c(f, Y, \mathcal{U}, n) = N(Y, \mathcal{U} \wedge f^{-1}(\mathcal{U}) \wedge \cdots \wedge f^{-(n-1)}(\mathcal{U}))$$

とおく。

X の subset E に対し、

(r) E が <u>$(f, Y, \mathcal{U}, n)$-spanning</u> であるとは、任意の $y \in Y$ に対し $d(f^i(x), f^i(y)) < \mathcal{U}$ for each i; $0 \leqq i \leqq n-1$, となる $x \in E$ が存在するときをいう。

(s) E が <u>$(f, Y, \mathcal{U}, n)$-separated</u> であるとは、E が Y の subset で E の相異なる2つの元 x, y に対し、$d(f^i(x), f^i(y)) > \mathcal{U}$ for some i; $0 \leqq i \leqq n-1$ となるときをいう。

$$r(f, Y, \mathcal{U}, n) = \min\{|E| : E \text{ is } (f, Y, \mathcal{U}, n)\text{-spanning}\}$$
$$s(f, Y, \mathcal{U}, n) = \max\{|E| : E \text{ is } (f, Y, \mathcal{U}, n)\text{-separated}\}$$

とおく。

以下 $\sigma = c$ or r or s とする。Y が totally bounded であることより、$\sigma(f, Y, \mathcal{U}, n)$ が finite であることは、容易に示すことができる。ここで、

$$\sigma(f, Y, \mathcal{U}) = \limsup_{n\to\infty} ((1/n)\times\log \sigma(f, Y, \mathcal{U}, n))$$
$$h_\sigma(f, Y) = \sup\{\sigma(f, Y, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \Phi\}$$
$$h_\sigma(f) = \sup\{h_\sigma(f, Y) : Y \text{ is a totally bounded subset of } X\}$$

とおく。

2.1. Theorem. 上で定義した $h_c(f)$、$h_r(f)$、$h_s(f)$ はすべて等しい。

Theorem 2.1 は、Bowen と同じ方法で証明することができる。

2.2. Definition. 上で定義した $h_\sigma(f)$ を $h(f)$ と書き <u>uniform entropy</u> of f という。特に、uniformity Φ を明記したいときは $h(f, \Phi)$ と書くことにする。

2.3. Remark. Adler, Konheim and McAndrew の定義した topological entropy は上の $h_c(f)$ と本質的に同じアイデアである。Bowen の定義した entropy のアイデアは $h_r(f)$ と $h_s(f)$ と同じであるが、Y の条件として totally bounded の代わりに compact を使っている。

Bowen の定義で Y の compact 性は、$\sigma(f, Y, \mathcal{U}, n)$ が finite であることだけに使っているが、任意の $\mathcal{U} \in \Phi$ に対し、$\sigma(f, Y, \mathcal{U}, n)$ が

finite であるための必要十分条件は、Y が totally bounded であることであり、また、compact 性は topological な概念であり、もともと uniform なものを定義しているのだから、uniform な概念である totally bounded 性を使った方が自然だと考えられる。

次に、上で定義した uniform entropy と Adeler, Konheim and McAndrew が定義した topological entropy 及び、Bowen が定義した entropy との関係をみてみよう。

compact space X 上の uniformity は一意に存在し、continuous self-mapping f は uniformly continuous なので、２つの entropes $h_{AKM}(f)$、$h(f)$ が定義されるが、これらについては、次が成り立つ。

2.4. Theorem. compact space X 上の continuous self-mapping f に対し、

$$h_{AKM}(f) = h(f)$$

が成り立つ。

Theorem 2.4 は定義からただちにわかる。Theorem 2.4 より uniform entropy は Adler, Konheim and McAndrew の定義した topological entropy の一般化になっている。

Bowen の定義した entropy との関係は次のようになる。

2.5. Theorem. metric space (X, d) 上の uniformly continuous self-mapping f に対し、

(a) $h_{B,d}(f) \leqq h(f, \Phi_d)$

(b)　(X, d) が complete のとき、

$$h_{B,d}(f) = h(f, \Phi_d)$$

が成り立つ。但し、Φ_d は d から induce される uniformity とする。

Theorem 2.5(a) は、compact は totally bounded であることよりただちにわかる。Theorem 2.5(b) は、X が complete のとき totally bounded set の closure が compact であることよりただちにわかる。Bowen は entropy を定義した論文の中で、"An essential part of this paper is the computation of $h_d(T)$ for certain maps on noncompact spaces." と書いているが、Bowen の計算した例は、complete metric space 上のself-mapping なので、Bowen の計算結果は、Theorem 2.5(b) より、uniform entropy に対しても成り立つ。

uniform entropy と Bowen の定義した entropy は、実際に異なっている。

2.6. Example. totally bounded metric space (X, d) と X 上の uniformly continuous self-mapping f で

$$h_{B,d}(f) < h(f, \Phi_d)$$

となるものが存在する。

3. Uniform entropy.

この節では、uniform entropy の基本的性質について調べる。

第１節では、topologically conjugate する self-mappings を同じものとみなしたが、第２節で定義した uniform entoropy は uniform なものなので、次に定義する uniformly conjugate という概念で分類するのがよいと思われる。

３．１．Definition. uniform space X 上の uniformly continuous self-mapping $f:X\to X$ と uniform space Y 上の uniformly continuous self-mapping $g:Y\to Y$ に対して、X から Y への uniform isomorphism $k:X\to Y$ で $kf=gk$ となるものが存在するとき、f と g は uniformly conjugate するという。k の条件を uniformly continuous onto mapping に代えたとき、f は g に uniformly semi-conjugate するという。

Uniform Cojugacy Theorem に関しては次のことがわかる。

３．２．Theorem. uniformly conjugate する２つの uniformly continuous self-mappings の uniform entropies は一致する。

３．３．Theorem. uniformly continuous self-mapping f が uniformly continuous self-mapping g に uniformly semi-conjugate するとき、f の uniform entropy は g の uniform entropy 以上である(i.e. $h(f)\geqq h(g)$)。

Theorems 3.2 and 3.3 は Bowen の定義した entropy に対しても同じことが成り立ち、全く同じ証明方法（定義からただちにわかる）で示すことができる。

Submapping Theorem に関しては次のことがわかる。

３．４．Theorem. f を uniform space X 上の uniformly continuous self-mapping とし Y を f-invariant subset of X とする。このとき、

$$h(f|_Y)\leqq h(f)$$

が成り立つ。

Theorem 3.4 も Bowen の定義した entropy に対しても同じことが成り立ち、全く同じ証明方法（定義からただちにわかる）で示すことができる。

Sum Theorem に関しては次のことがわかる。

3.5. Theorem. f を uniform space X 上の uniformly continuous self-mapping とし、Y、Z は $X = Y \cup Z$ となる f-invariant subsets of X とする。このとき、

$$h(f) = \max\{h(f|_Y), h(f|_Z)\}$$

が成り立つ。

Theorem 3.5 は Bowen の定義した entropy に対しては、Y と Z が closed subsets ならば同じことが成り立ち、Theorem 3.5 の証明はそれと実質的に同じでよいが、Bowen の場合は closed の条件を落とすと成り立つかどうかはわからない。

Product Theorem に関しては次のことがわかる。

3.6. Theorem. uniformly continuous self-mappings $f: X \to X$, $g: Y \to Y$ に対し、

(a) $h(f \times g) \leqq h(f) + h(g)$

(b) X、Y が共に、totally bounded のとき、

$$h(f \times g) = h(f) + h(g)$$

が成り立つ。

Theorem 3.6(a) は Bowen の定義した entropy に対しても同じことが成り立ち、全く同じ証明方法で示すことができる。Theorem 3.6(b) の証明は、Adler, Konheim and McAndrew の証明のアイデアと同じ方法で示すことができるが、Bowen の定義した entropy の関しては、Theorem 3.6(b) が成り立つかどうかはわからない。また、uniform entropy に対しても Bowen の定義した entropy に対しても、一般的に等号が成り立つかどうかはわからない。

第１節では、compactification theorem を考えると書いたが、この節で扱っているのは、uniform なものなので一般の compactification では意味をもたない。uniform space では、compactification に相当するのは、completion なので、uniform space 上の uniformly continuous self-mapping の completion への uniform extension に関して考察する。

(X, Φ) を uniform space、f を X 上の uniformly continuous self-mapping としたとき、

$(\hat{X}, \hat{\Phi})$ を competion of (X, Φ)、
$\hat{f}$ を $(\hat{X}, \hat{\Phi})$ 上への uniform extension of f

とする。

Completion Theorem に関しては次のことがわかる。

３.７. **Theorem.** uniform space (X, Φ) 上の uniformly continuous self-mapping f に対し、

(a) $h(f, \Phi) \leqq h(\hat{f}, \hat{\Phi})$

(b)　X が totally bounded のとき、

$$h(f, \Phi) = h(\hat{f}, \hat{\Phi})$$

(c)　Φ の weight が countable(i.e. Φ がある metric から induce された uniformity)のとき、

$$h(f, \Phi) = h(\hat{f}, \hat{\Phi})$$

が成り立つ。

Theorem 3.7(a) は Theorem 3.4 よりただちにわかる。

3.8. Example. Theorem 3.7 で、等号は一般には成り立たない。

3.9. Example. Bowen の定義した entropy に対しては、totally bounded metric space でも Theorem 3.7 で等号が成り立たないものが存在する。

uniform entropy に対しては、Theorem 3.7(c) より、metric spaces の範囲では、等号が成立する。

4. Topological entropies.

この節では、Tychonoff space 上の continuous self-mapping に対して、その topological な entropy を定義し、その基本的な性質を調べ、また具体的な space 上の continuous self-mapping の topological entropy の計算もする。

この節では、すべての space は Tychonoff space と仮定する。但し、Example はすべて、separable metrizable spaces である。

第2節で、uniform space 上の uniformly continuous self-mapping に対して、その uniform entropy を定義したが、topological structure しか入っていない

Tychonoff space に対しては、その上の uniformity は、一般にはたくさん存在するが、次の２つが基本的なものである。

Φ_β = {$\mathcal{U}$: $\mathcal{U}$ は open cover of X で、ある finite cozero-cover of X で refine される}

Φ_μ = {$\mathcal{U}$: $\mathcal{U}$ は open cover of X で、ある locally finite cozero-cover of X で refine される}

これらの uniformities に対して、X 上の continuous self-mapping は uniformly continuous になるので、次のように、topological な entropy を定義することができる。

4.1. Definition. space X 上の continuous self-mapping f に対し、

$$h_\beta(f) = h(f, \Phi_\beta)$$
$$h_\mu(f) = h(f, \Phi_\mu)$$

とおき、$h_\beta(f)$ を <u>β-topological entropy</u>、$h_\mu(f)$ を <u>μ-topological entropy</u> と呼ぶ。

Topological Conjugacy Theorem に関しては次がわかる。

4.2. Theorem. topologically conjugate する２つの continuous self-mappings f と g の β-topological entropies 及び μ-topological entropies はそれぞれ一致する。

4.3. Theorem. $f: X \to X$, $g: Y \to Y$ を continuous self-mappings とし $kf = gk$ となる continuous onto mapping $k: X \to Y$ が存在するとする (i.e. f は g に topologically semi-conjugate)。このとき、f の β-topological entropy は g の β-topological entropy 以上である(i.e.

$h_\beta(f) \geqq h_\beta(g)$)。

4.4. **Theorem.** $f:X\to X$, $g:Y\to Y$ を continuous self-mappings とし $kf=gk$ となる proper continuous onto mapping $k:X\to Y$ が存在するとする。さらに、Y は topologically complete とする。このとき、f の μ-topological entropy は g の μ-topological entropy 以上である(i.e. $h_\mu(f) \geqq h_\mu(g)$)。

Theorems 4.2, 4.3 and 4.4 は定義から容易に証明することができる。

4.5. **Theorem.** space X 上の continuous self-mapping f に対し、

(a) $h_\beta(f) = \max\{h(f, \Phi) : \Phi$ は totally bounded uniformity on X で f は uniformly continuous with respect to Φ となるもの$\}$

(b) Y が topologically complete のとき、
$h_\mu(f) = \max\{h(f, \Phi) : \Phi$ は complete uniformity on X で f は uniformly continuous with respect to Φ となるもの$\}$

が成り立つ。

Theorem 4.5 は Theorems 4.3 and 4.4 から示すことができる。

Submapping Theorem に関しては次のことがわかる。

4.6. **Theorem.** f を space X 上の continuous self-mapping とし Y を f-invariant C^*-embedded subset of X とする。このとき、

$$h_\beta(f|_Y) \leqq h_\beta(f)$$

が成り立つ。

Theorem 4.6 は、次元論の場合の Subset Theorem とほぼ同じアイデアを entropy の場合に適用することで証明することができる。

4.7. **Example.** Theorem 4.6. で Y が C^*-embedded の条件は落とすことができない。

4.8. **Question.** μ-topological entropy に対しては、Theorem 4.6 のようなことは成り立つのか？

Sum Theorem に関しては次のことがわかる。

4.9. **Theorem.** f を space X 上の continuous self-mapping とし Y、Z は $X = Y \cup Z$ となる f-invariant C^*-embedded subsets of X とする。このとき、

$$h_\beta(f) = \max\{h_\beta(f|_Y), h_\beta(f|_Z)\}$$

が成り立つ。

Theorem 4.9 も、次元論の場合の Sum Theorem とほぼ同じアイデアを entropy の場合に適用することで証明することができる。

4.10. **Example.** Theorem 4.9. で Y、Z が C^*-embedded の条件は落とすことができない。実際、

$$h_\beta(f) < \max\{h_\beta(f|_Y), h_\beta(f|_Z)\}$$

となるものが存在する。

4.11. **Question.** $h_\beta(f) > \max\{h_\beta(f|_Y), h_\beta(f|_Z)\}$ となる space X、continuous self-mapping f、f-invariant subsets Y、Z of X

で $X = Y \cup Z$ となるものは存在するか？

４．１２．**Question.** μ-topological entropy に対しては、Theorem 4.9 のようなことは成り立つのか？

Product Theorem に関しては次のことがわかる。

４．１３．**Theorem.** continuous self-mappings $f:X\to X$, $g:Y\to Y$ に対し、

(a) $h_\beta(f\times g) \geqq h_\beta(f)+h_\beta(g)$

(b) $X\times Y$ が pseudocompact のとき、

$h_\beta(f\times g) = h_\beta(f)+h_\beta(g)$

が成り立つ。

Theorem 4.13(a) は Theorems 3.7(b) and 4.3 から示すことができる。Theorem4.13(b) は Glicksberg's theorem と Theorems 3.7(b) and 4.2 から示すことができる。uniform entropy と比べると、逆向きの不等号が成立することに注意。

Compactification Theorem に関しては次のことがわかる。

４．１４．**Theorem.** space X 上の continuous self-mapping f に対し、compactification αX of X と extension $\hat{f}:\alpha X\to\alpha X$ of f で次の３つの条件を満たすものが存在する。

(i) $h_\beta(\hat{f}) = h_\beta(f)$

(ii) $\dim \alpha X = \dim X$

(iii) $w(\alpha X) = w(X)$

Theorem 4.14 は、completion が上の３つの条件を満たす X の uniformity をうまく構成することで示すことができる。

４．１５．**Remark.** Theorem 3.7(b) より Cech extension βf に対して、Thereom 4.14 の（i）の条件が成り立つ。これは、dimension が dim X = dim βX を満たすことに対応している。

４．１６．**Question.** μ-topological entropy に対しては、Theorem 4.14 のようなことは成り立つのか？

次に、具体的な space 上の continuous self-mapping の topological entropy を計算した結果について述べる。

４．１７．**Theorem.** f を real line R 上の homeomorphism とする。このとき β-topological entropy と μ-topological entropy の値は、0 または ∞ である。

closed unit interval I = [0, 1] 上の homeomorphism の topological entropy の値は 0 であることはよく知られているが、それと比較してみると、Theorem 4.17 では real line R に対してもよく似たことが起きていることがわかる。

Theorem 4.17 より、real line R 上の homeomorphism の topological entropy の値は、0 か ∞ に限るが、R 上の continuous self-mapping では、β-topological entropy も μ-topological entropy も 0 でも ∞ でもないものが存在する。

４．１８．Theorem.　f を discrete space X 上の continuous self-mapping とする。このとき、β-topological entropy の値は、０ または ∞ である。

４．１９．Remark.　Theorem 4.18 より、discrete space 上の continuous self-mapping の β-topological entropy の値は ０ か ∞ であるが、discrete を考えるのは、実質的には、set とその上の self-mapping を考えることに他ならないので、値が ０ か ∞ にしかならないのは仕方がないことかもしれない。

discrete space X 上の continuous self-mapping f の μ-topological entropy は、universal uniformity での totally bounded subset は finite であることから、常に ０ である。この点からみても（他にも、β-topological entropy では成り立つことがわかるが、μ-topological entropy では成り立つかどうかわからないことが多くある）、topological entropy としては β-topological entropy の方が μ-topological entropy より優れているように思われる。

β-topological entropy と μ-topological enyropy の関係は次のことがわかる。

４．２０．Example.　β-topological entropy が μ-topological entropy より真に大きくなる continuous self-mapping が存在する。

４．２１．Question.　μ-topological entropy が β-topological entropy より真に大きくなる continuous self-mapping が存在するか？