数理解析研究所講究録
第734巻 1990年 43-58

EULER-POISSON 方程式の解の構造

大阪産業大　牧野　哲 (Tetu Makino)

§1. 問題設定

ここで研究するのは，次の方程式である．

(1-0) $$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{3} \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j}=0,$$

(1-i) $$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=0, \quad i=1,2,3,$$

(1-4) $$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial S}{\partial x_j}=0,$$

(2) $$p=\rho^{\gamma} e^{S}$$

(3) $$\Delta \Phi=4\pi\rho.$$

ここで γ は定数で，$1<\gamma$ とし，未知函数はとりあえず，$\rho=\rho(t,x)$, $v={}^t(v_1,v_2,v_3)=v(t,x)$, $S=S(t,x)$, $\Phi=\Phi(t,x)$, $(t\geqslant 0,\ x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3)$，である．

方程式(1)(2)(3)は，自己重力のもとで運動する気体星の内部構造の流体力学的進化のモデルを記述するものである．ρは密度，pは圧力，vは速度を表わし，(1-0)は連続の方程式，(1-1),-2),-3)は運動方程式である．Φは重力ポテンシアルであって，これはPOISSON方程式(3)によって，自己の密度分布ρから生成される．（簡単のため万有引力定数は1にとってある．）密度分布としては台がコンパクトのものを考えるので，(3)はNEWTONポテンシアル

$$(3)' \qquad \Phi(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(t,y)}{|x-y|}\, dy$$

でおきかえる．(2)は理想気体の状態方程式である．Sは単位質量あたりのエントロピーであって，(1)(2)のもとで(1-4)は熱源がなく，断熱的な運動がおこなわれることを表わしている．比熱比γとしては，単原子気体なら$\gamma=5/3$，二原子気体なら$\gamma=7/5$である．以上のような方程式の宇宙物理学上の意味についての詳細は、[5]を参照されたい．

さて，上記方程式にたいして次のような問題が考えられる．

1）初期値問題にたいする時間にかんして局所的な解の存在と一意性

2）時間的に大域的な解の存在・非存在

3）定常解の安定性.

これらの問題について最初に論じたのは［7］である．それ以降，いくつかの結果が得られたが，まだまだ不充分であり，より一層の研究が要望される．以下では，いままでに得られた結果をまとめて紹介したい．

§2. 初期値問題にたいする局所解の構成

まず最初に，初期条件

$$\rho|_{t=0}=\rho^0(x)\geqq 0,\quad v|_{t=0}=v^0(x),\quad S|_{t=0}=S^0(x) \tag{4}$$

を与えて(1)(2)(3)の解を作ることを問題にしよう．この問題については，次の結果が得られている．

定理1．（［9］）　$\rho^0(x)$, $v^0(x)$, $S^0(x)$ は $C^1(\mathbb{R}^3)$ に属し，$\rho^0(x)\geqq 0$ で台コンパクトとする．

$$U^0=\left((\rho^0)^{\frac{\gamma-1}{2}}e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}S^0},\quad v^0,\quad S^0\right) \tag{5}$$

とおく．もし　I）$1<\gamma\leqq 5/3$, $U^0\in H^3(\mathbb{R}^3)$ であるか，あるいは，II）$1<\gamma\leqq 3$, $U^0\in H^4(\mathbb{R}^3)$, $\rho^0\in H^3(\mathbb{R}^3)$ ならば，充分小さなTにたいして，(1)(2)(3)の解 $(\rho(t,x), v(t,x)$,

$\rho(t,x)$)で，$C^1([0,T)\times\mathbb{R}^3)$に属するものが存在する．

証明の方針は次のようである．最初に任意に密度分布 $\rho(t,x)$ をとり，$(3)'$ によって重力ポテンシアル $\Phi(t,x)$ をつくる．この勾配 $g(t,x)=-\mathrm{grad}_x\Phi(t,x)$ を外力として EULER 方程式の初期値問題(1)(2)(4)を解いて，新たな密度分布 $\hat{\rho}(t,x)$ が得られるであろう．すると，写像 $\rho\mapsto\hat{\rho}$ が不動点をもつことが示せれば，これが(1)(2)(3)(4)の解を与えるわけである．

こういう方針でいくと，困難は，EULER 方程式を解くところにでてくる．いままで[6]，[3]などで圧縮性気体にたいする EULER 方程式が解かれているが，そこではいつも，$\inf\rho^0>0$ の状況が扱われているのである．その状況下では．[4]，[2]，[6]，[3]等により，方程式を準線型対称双曲型方程式に変換して，解の局所的存在はよくわかっているといってよい．しかし，この変換は．$\inf\rho^0=0$ の場合は破綻する．$\rho=0$ のところで方程式が退化してしまうのである．ところが，われわれの場合は，台コンパクトか，少なくとも遠方ではゼロになる密度分布を考えたい．じっさい，$\inf\rho>0$ なら，NEWTON ポテンシアルは発散してしまうであろう（OLBERS のパラドクス）．そういうわけで，新た

な工夫が必要となるわけである．この難点について一つの解決策を提起したのが [7], [9] である．

それは，次の変数を新たに導入するということである．

$$(6)\qquad w = p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}S}.$$

方程式(1-0)で ρ のかわりに w を変数にとり，(1-1),-2),-3)では両辺を形式的に割り算すると(1)(2)(4)は次の問題に変換される．

$$(7)\qquad A_0(U)\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} A_j(U)\frac{\partial U}{\partial x_j} = G(t)$$

$$(8)\qquad U|_{t=0} = U^0(x)$$

ただし，$U = {}^t(w, v_1, v_2, v_3, S)$,

$G = {}^t(0, -\partial\Phi/\partial x_1, -\partial\Phi/\partial x_2, -\partial\Phi/\partial x_3) = {}^t(0, g_1, g_2, g_3)$,

$$A_0(U) = \begin{bmatrix} \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2}e^{\frac{S}{\gamma}} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_j(U) = \begin{bmatrix} \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2}e^{\frac{S}{\gamma}}v_j & \frac{2\gamma}{\gamma-1}e^{\frac{S}{\gamma}}w\,{}^te_j & 0 \\ \frac{2\gamma}{\gamma-1}e^{\frac{S}{\gamma}}w e_j & v_j I & 0 \\ 0 & 0 & v_j \end{bmatrix}.$$

ここに I は単位行列，e_j は単位ベクトルである．こうす

ると，$A_\alpha(U)$ $(\alpha=0,1,2,3)$ は U について C^∞ 級の対称行列で，$A_0(U)$は有界なSについて一様正定値となり，$w=0$ となってもなんら不都合はない．これは，［2］の定理IIがそのまま適用できる問題である．すなわち，$G\in L^\infty([0,T];H^{3+m}(\mathbb{R}^3))\cap C([0,T];H^{2+m}(\mathbb{R}^3))$，$|||G|||_{3+m}\equiv \sup_t \|G(t)\|_{3+m} \leqq M$，$U^0\in H^{3+m}(\mathbb{R}^3)$ を与えると，(7)(8)の解 $U\in C([0,T];H^{3+m}(\mathbb{R}^3))\cap C^1([0,T];H^{2+m}(\mathbb{R}^3))$ が一意に存在する．ここに mは非負の整数，$T\leqq T_0=T_0(U^0,M,m)$ である．このことを，元の変数にもどすと，次の命題が得られる．

命題1．I) $m\geqq 0$，$1<\gamma\leq(m+5)/(m+3)$ とし，$\rho^0(x)$，$v^0(x)$，$S^0(x)$，$g(t,x)$ が

$$\rho^0(x)\geqq 0,\quad \rho^0\in C_0^1(\mathbb{R}^3),\quad U^0\in H^{3+m}(\mathbb{R}^3),$$
$$g\in L^\infty(0,T;H^{3+m}(\mathbb{R}^3))\cap C([0,T];H^{2+m}(\mathbb{R}^3)),$$
$$|||g|||_{3+m}\leqq M,\quad T\leqq T_0(U^0,M,m)$$

をみたすとすると，(1)(2)(4)の $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ 上の C^1 解 $(\rho(t,x),v(t,x),S(t,x))$ が存在して，次をみたす：

$$\rho(t,x)\geqq 0,\quad R[\rho(t)]\leqq R[\rho^0]+C_I T,$$
$$\rho\in C([0,T];H^{3+m}(\mathbb{R}^3))\cap C^1([0,T];H^{2+m}(\mathbb{R}^3)),$$
$$|||\rho|||_{2+m}\leq C_I,$$
$$|||\rho_{(1)}-\rho_{(0)}|||_{2+m}\leqslant C_I|||g_{(1)}-g_{(0)}|||_{2+m}Te^{a_I T}.$$

ここに，$\rho_{(0)}, \rho_{(1)}$ は $g_{(0)}, g_{(1)}$ にたいする解．また

$$R[u] = \sup\{|x| \mid u(x) \neq 0\}.$$

定数は，$C_I = C_I(U^0, m)$，$a_I = a_I(U^0, M, m)$．一方 II）$m \geqq 1$，$1 < \gamma \leqq 3$ とし，先と同じ仮定のもとで，さらに $\rho^0 \in H^{2+m}(\mathbb{R}^3)$ とすると，

$$\rho(t, x) \geqq 0, \quad R[\rho(t)] \leqq R[\rho^0] + C_{II} T,$$

$$\rho \in C([0,T]; H^{2+m}) \cap C^1([0,T]; H^{1+m}),$$

$$|||\rho|||_{2+m} \leqq C_{II} \|\rho^0\|_{2+m},$$

$$|||\rho_{(1)} - \rho_{(0)}|||_{1+m} \leqq C_{II} \|\rho^0\|_{2+m} |||g_{(1)} - g_{(0)}|||_{2+m} T^2 e^{a_{II} T}$$

ここに，$C_{II} = C_{II}(U^0, m)$，$a_{II} = a_{II}(U^0, M, m)$．

ここで解の一意性についていうと，それはあくまでも，(ρ, v, S) から U に移ったばあいに，(7) をみたす $U \in C([0,T]; H^3) \cap C^1([0,T]; H^2)$ として一意に定まるという意味である．

さて一方，POISSON方程式をNEWTONポテンシアルで解く方については，次が容易に証明できる．

命題2（[7]）　mは非負の整数とする．$\rho \in H^{2+m}(\mathbb{R}^3) \subset C^m(\mathbb{R}^3)$ が台コンパクトなら，$g(x) = -\mathrm{grad}\,\Phi(x)$ は $H^{3+m}(\mathbb{R}^3)$ に属し，

$$\|g\|_{3+m} \leqq C_{III}(1 + R[\rho])^{5/2} \|\rho\|_{2+m}$$

をみたす．ここに $C_{III} = C_{III}(m)$．

命題1，命題2をくみあわせれば，$\rho \mapsto \hat{\rho}$ の不動点を次のようなところで求めることができる.

I） $m \geqq 0$，$1 < \gamma \leqq (5+m)/(m+3)$ の場合は，

$$X_{\mathrm{I}} = \{ \rho \in C([0,T]; H^{2+m}(\mathbb{R}^3)) \mid \rho \geqq 0,$$

$$R[\rho(t)] \leqq R[\rho^0] + 1, \ |||\rho|||_{2+m} \leqq C_{\mathrm{I}}(U^0, m) \}$$

ただし，Tは充分小さくとる. X_{I} に距離

$$\mathrm{dis}(\rho_{(1)}, \rho_{(0)}) = |||\rho_{(1)} - \rho_{(0)}|||_{2+m}$$

をいれると完備になり，$\rho \mapsto \hat{\rho}$ は縮小写像となる.

II） $m \geqq 1$，$1 < \gamma \leqq 3$ の場合は，

$$X_{\mathrm{II}} = \{ \rho \in L^\infty(0,T; H^{2+m}(\mathbb{R}^3)) \cap C([0,T]; H^{1+m}) \mid$$

$$\rho \geqq 0, \ R[\rho(t)] \leqq R[\rho^0] + 1, \ |||\rho|||_{2+m} \leqq C_{\mathrm{II}} \|\rho^0\|_{2+m} \}$$

で T を充分さくとり，距離

$$\mathrm{dis}(\rho_{(1)}, \rho_{(0)}) = |||\rho_{(1)} - \rho_{(0)}|||_{1+m}$$

をいれればよい.

こうして，定理1が証明される.

§3　定理1の改良の必要性

このようにして［7］［9］でまがりなりに初期値問題(1)(2)(3)(4)の C^1-級解の存在が得られたのであるが，そのときから定理1の不充分性が気づかれていた. そのひとつは，解の一

意性が U をまわってしかいえず，(ρ, v, S) についての一意性が不明であることである．ρ の台の外で v を修正しても ($S = \mathrm{const}$ なら) やはり解であるから，一意性の問題は自明でない．

もっと致命的な欠点は次のことである．簡単のため $S=0$ としよう．このとき，$6/5 < \gamma \leq 2$ にたいして (1)(2)(3) は次の形の台コンパクトな球対称定常解をもつ．

$$\rho = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma A^2}\right)^{\frac{1}{2-\gamma}} \theta(A|x|)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad v=0, \quad S=0$$

ここに $\theta(r)$ は LANE-EMDEN 方程式の解：

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dr} + \theta^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0, \quad \theta\Big|_{r=0} = 1, \quad \frac{d\theta}{dr}\Big|_{r=0} = 0$$

であり ([1]，第IV章参照)，A は任意の正の定数である．ところが，この解にたいしては，$w \sim \mathrm{Const}\,(R-r)^{1/2}$ $(r \uparrow R)$，ただし，$R = R[\rho]$，となり，この解は，定理I の扱う範囲 $(U^0 \in H^3(\mathbb{R}^3))$ を大いに逸脱しているのである．つまり，定理1で構成した解の範囲は狭すぎて，これではこの定常解を捕捉しえない：すなわち，定理1で構成したのは，次の意味で「おとなしい」解に限られているのである．

定義．(ρ, v, S) が (1)(2)(3) の $0 \leq t < T$ でのおとなしい解であるとは，i) $(\rho, v, S) \in C^1([0, T) \times \mathbb{R}^3)$，

$\rho \geq 0$, $\rho(t)$は台コンパクトで, (1)(2)(3)′ がみたされ,

ii) $\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \in C^1([0,T)\times\mathbb{R}^3)$ で, しかもρの台の外で

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \qquad (i=1,2,3)$$

がなりたつ. これにたいして, i) のみをみたす解を古典解とよぶ.

すなわち, 定理1で構成したのは, おとなしい解のみであり, 一方球対称定常解は, 古典解だがおとなしくない, ということになる.

§4. 大域的におとなしい解の非存在.

われわれが次に考えたのは, こうして作ったおとなしい局所解は, 時間∞まで大域的に延長できるかどうかという問題であった. これは, SIDERIS [11] に触発されたものである. われわれは, まず, 重力を無視した場合を扱った. すなわち, 方程式(1-1),-2),-3)で $-\partial\Phi/\partial x_i$ の項をおとし, (3)を無視した問題を考える. これを$(1)_0$ (2) とする.

定理2 ([8]). $(\rho(t), v(t), S(t))$ が $0\leq t<T$ での

(1)。(2)のおとなしい解とし，$(\rho(0), v(0))$ は台がコンパクトで，$\rho(0) \not\equiv 0$ とする．このとき，T は有限である．

この結論の証明は，次の2ステップからなる．

第1ステップ．まずおとなしい解については，台が広がらないことがわかる：

$$\mathrm{Supp}(\rho(t), v(t)) \subset \mathrm{Supp}(\rho(0), v(0)).$$

第2ステップ．おとなしい解に沿っては，総質量

$$M = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(t,x)\,dx$$

と総エネルギ

$$E = \int \left[\frac{1}{2}\rho(t,x)\,|v(t,x)|^2 + \frac{1}{\gamma-1}p(t,x)\right]dx$$

が保存される（tに依らない）ことに注意して，次の函数に着目する：

$$H(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(t,x)\,|x|^2\,dx. \tag{9}$$

すると，一方で $H(t) \leqq \frac{1}{2}MR^2$（$R$は $\mathrm{Supp}(\rho(0), v(0))$ の半径），他方で

$$H''(t) = \int (\rho v^2 + 3p)\,dx \geqq \inf(2, 3(\gamma-1))E \equiv \alpha E$$

が得られ，これから

$$T \leqq -\frac{H'(0)}{\alpha E} + \sqrt{\frac{\alpha^2 M - 2H(0)}{\alpha E} + \frac{H'(0)^2}{\alpha^2 E^2}}$$

という存在時間の制限を得るわけである．

もっとも，これは，有限時間で解がおとなしくなくなる

ということを証明したにすぎず，それでは具体的に何が起ってておとなしくなくなるかという疑問に答えたわけではない．おそらく台の境界でショックが起こるかなにかするのだろうが，今のところ全くわからない．

同じ結論が，自己重力のある元の(1)(2)(3)のおとなしい解についてもなりたつのではないかということが次に考えたことである．しかし，重力を無視した場合と同様に2ステップで考えるとすると，台の評価をまずしなければならないが，重力のあることによって同じようにはいかない．しかし，まず，球対称の場合に限って結果を得た．ここに，球対称というのは，$\rho=\rho(t,|x|)$, $v=\frac{x}{|x|}V(t,|x|)$, $S=S(t,|x|)$ の形の解であり，方程式は次のようになる．

$$
(1)_r \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+V\dfrac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\dfrac{\partial V}{\partial r}+\dfrac{2}{r}\rho V=0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial V}{\partial t}+V\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial r}+\rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}=0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial t}+V\dfrac{\partial S}{\partial r}=0 \qquad\qquad (0\le r=|x|<+\infty) \end{cases}
$$

$$
(2) \qquad p=\rho^{\gamma}e^{S}
$$

$$
(3)'_r \qquad \Phi(t,r)=-4\pi\int_0^{\infty}K(r,s)\rho(t,s)s^2ds,
$$

$$
K(r,s)=\begin{cases} \dfrac{1}{r} & (s\le r) \\ \dfrac{1}{s} & (r\le s) \end{cases}
$$

こうした球対称解に話を限れば，次の結果を得る．

定理3（[10]）（$\rho(t), v(t), S(t)$）が $0 \leq t < T$ での(1)(2)(3)の球対称なおとなしい解とし，（$\rho(0), v(0)$）の台がコンパクトで，$\rho(0) \neq 0$ ならば，T は有限である．

この証明は，ステップ1だけで終る．じっさい，$R(t) \equiv \sup\{r \mid \rho(t, r) \neq 0 \text{ or } V(t, r) \neq 0\}$ は

$$R(t) \leq R(0) - \frac{M}{2R(0)^2} t^2$$

をみたすことがわかる．総質量 $M = 4\pi \int \rho r^2 dr$ が正であれば，$T \leq \sqrt{2R(0)^3/M}$ でないと星は自己重力で一点につぶれてしまうということがでて，証明が終る．

この場合も，限界までおとなしければ，collapseしかないということだけで，実際はその限界までに何かがおこっておとなしくなくなるのである．球対称でない場合も事情は同じだろうと予想しているが，今のところ（その証明に）成功していない．

§5　おとなしくない古典解にたいするひとつの情報

定理3の証明は，1ステップで終ったのであるが，重力のある場合にも，定理2の証明の第2ステップで(9)で定義

した $H(t)$ を利用すれば，おとなしくない古典解の挙動についての情報をひとつひきだすことができる．すなわち，(1)(2)(3) の古典解に沿って総質量

$$M=\int \rho(t,x)\,dx$$

と総エネルギ

$$E=\int\left[\frac{1}{2}\rho(t,x)v(t,x)^2+\frac{1}{\gamma-1}p(t,x)\right]dx-\frac{1}{2}\iint\frac{\rho(t,x)\rho(t,y)}{|x-y|}\,dx\,dy$$

は保存される．そこで $H(t)$ を考えると，

$$H''(t)=\int(\rho v^2+3p)\,dx-\frac{1}{2}\iint\frac{\rho(t,x)\rho(t,y)}{|x-y|}\,dx\,dy$$

を得る．したがって，$3\geqq 1/(\gamma-1)$ すなわち $\gamma\geqq 4/3$ なら $H''(t)\geqq E$ となる．こうして，次が得られる．

定理4 ([10]) $(\rho(t), v(t), S(t))$ が $0\leq t<+\infty$ での (1)(2)(3) の古典解（おとなしくない）とし，$E>0$, $\gamma\geqq 4/3$ ならば，$\liminf_{t\to+\infty} R(t)/t\geqq\sqrt{E/M}$．ここに $R(t)=\sup\{|x|\mid \rho(t,x)\neq 0\}$．

この定理から，たとえば，次のようなことがわかる．§3で考えた球対称定常解については

$$E=\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}\int p\,dx$$

であることがわかる．したがって，$\gamma=4/3$ のとき，初期密度分布 ρ^0 がこの球対称定常解に等しく，$S^0\equiv 0$ とし，v^0 に

小さな摂動を与えると，その解は，もし $0 \leq t < +\infty$ に存在したとしても，$\liminf R(t)/t > 0$ をみたさなければならない．したがって，$\gamma = 4/3$ の球対称定常解は，この意味で「不安定」である．

§6 結語

EULER-POISSON方程式について現時点までに得られた結果を総括してみた．結果がいくつか得られたとはいえ，あまりにも遅々としている．それにもまして，おとなしくない古典解の，球対称定常解を含む範囲での局所的存在定理を証明すること，大域解の存在を明らかにすることは，重要な問題である．これは，基礎理論からの構築を要するかもしれない．この方程式は，そういう点で，豊富な内容をもつと思われるので，この方程式を考察する人がふえ，上記の問題が近い将来に解決されることを期待したい．

一九八九年一月八日 記

引用文献

|1| S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure, Univ. of Chicago Press, 1938.

|2| T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Arch. Rational Mech. Anal., 58(1975), 181-205.

|3| S. Klainerman and A. Majda, Compressible and incompressible fluids, Comm. Pure Appl. Math., 35(1982), 629-651.

|4| P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of schock waves, SIAM Reg, Conf. Lecture No.11, Philadelphia, 1973.

|5| P. Ledoux and T. Walraven, Variable stars, Handbuch der Physik, Bd. LI (1958), Springer, Berlin, 353-604.

|6| A. Majda, Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Variables, Springer, 1984.

|7| T. Makino, On a local existence theorem for the evolution equation of gaseous stars, Patterns and Waves, North-Holland/Kinokuniya, 1986, 459-479.

|8| T. Makino, S. Ukai and S. Kawashima, Sur la solution à support compact de l'équation d'Euler compressible, Japan J. of Appl. Math., 3(1986), 249-257.

|9| T. Makino and S. Ukai, Sur l'existence des solutions locales de l'équation d'Euler-Poisson pour l'évolution d'étoiles gazeuses, J. of Math. of Kyoto U niv., 27(1987), 387-399.

|10| T. Makino and B. Perthame, Sur les solution à symétrie sphérique de l'équation d'Euler-Poisson pour l'évolution d'étoiles gazeuses, to appear in Japn J. of Appl. Math.

|11| T. Sideris, Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids, Comm.Math.Phys. 101(1985) 475-485.