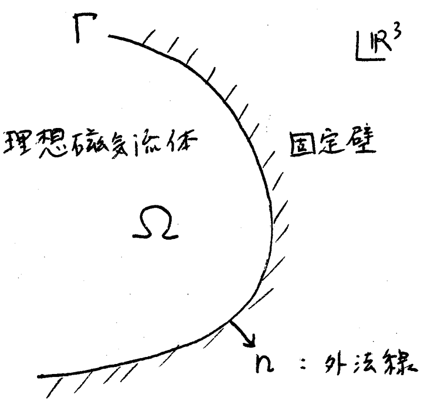
数理解析研究所講究録
第734巻 1990年 91-105

理想磁気流体力学の方程式系の初期境界値問題
(境界が完全導体壁の場合)

奈良女大理　柳沢　卓 (Taku Yanagisawa)
金沢大理　松村　昭孝 (Akitaka Matsumura)

理想磁気流体力学の方程式系は特にプラズマの運動を記述するものとして多くの考察がなされている。しかしながら数学的に初期境界値問題として捉えたとき、種々に物理的に課される境界での関係式に対しての整合性やそれらの下での初期境界値問題の適切性についての厳密な考察は少ないように思われる。以下境界が完全導体壁の場合に物理的にも数学的にも妥当と思われる境界条件の与え方の一つを提起しその下で得られている結果とその周辺を紹介する。

§1. 基礎方程式系



いま理想磁気流体が$\mathbb{R}^3$内の領域Ωを満しており、Ωは固定境界壁Γで囲まれているとしよう。説明及び方程式系の簡単化の為、運動は等エントロピー的とする。

無論、数学的にはエントロピーを含む方程式系に対しても以下の議論はまったく平行に成立する。このとき基礎方程式系は

$$
(0)\quad \begin{cases} \rho_p \dfrac{Dp}{Dt} + \rho \nabla\cdot u = 0, \\ \rho \dfrac{Du}{Dt} + \nabla p + \mu H\times(\nabla\times H) = 0, \\ \mu H_t + \nabla\times E = 0, \quad E = -\mu u\times H, \\ \nabla\cdot H = 0, \qquad (t,x)\in[0,T]\times\Omega. \end{cases}
$$

ここに $p = p(t,x)$: 圧力、$u = {}^t(u_1, u_2, u_3)(t,x)$: 流速、$H = {}^t(H_1, H_2, H_3)$: 磁場、$E = {}^t(E_1, E_2, E_3)$: 電場、$\rho = \rho(p)$: 密度 ($\rho_p = \partial\rho/\partial p > 0$ for $p > 0$), μ : 透磁率 (正定数)、$D/Dt = \partial_t + u\cdot\nabla$ 、$\nabla = {}^t(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$.

いま未知関数を

$$
U = \begin{pmatrix} q \\ u \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \frac{1}{2}|H|^2 \\ u \\ H \end{pmatrix}.
$$

と置くと (0) は次の対称双曲型方程式系に同等となる。

$$
(1)\quad A_0(U)U_t + \sum_{j=1}^{3} A_j(U)U_{x_j} = 0,
$$

$$
A_0(U) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha\,{}^tH \\ 0 & \rho I_3 & 0 \\ -\alpha H & 0 & I_3 + \alpha H\otimes H \end{pmatrix},
$$

$$A_j(U) = \begin{pmatrix} \alpha u_j & {}^t e_j & -\alpha\, {}^t H u_j \\ e_j & u_j & -I_3 H_j \\ -\alpha H u_j & -I_3 H_j & (I_3 + \alpha H \otimes H) u_j \end{pmatrix},$$

I_3 : 3×3 単位行列, $\alpha = \rho_p/\rho > 0$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, …

ここで $\nabla \cdot H = 0$ は初期時刻で成立すれば $\forall t \geq 0$ で成立することが分るから初期値への条件とし方程式系からは省略した。

初期境界値問題としては方程式系(1)を

(2) $U(0,x) = U_0(x)$ (初期条件),

(3) $M(x)\, U = 0$ on $[0,T] \times \Gamma$ (境界条件),

の下で考察する。ここに M : Γ 上滑らかな 7×7 行列。

線形非線形を問わずこれまでの一般論に於いては、Boundary Matrix $A(n) = \sum_{j=1}^{3} n_j A_j$ が境界条件 $MU = 0$ との兼合いにおいて本質的役割を果している。以下では完全導体壁の仮定から導かれる境界条件や Boundary Matrix の既存の一般論との整合性を調べることとする。

§2. 完全導体壁に対する境界条件

流速に対する境界条件は

(4) $u \cdot n = 0$ on $[0,T] \times \Gamma$

が自然なものであろう。電磁場に対する境界での関係式は(導出は例えば [12])

$$
(5)\quad
\begin{cases}
[n\times E] = 0, \\
[n\cdot B] = 0, \\
[n\times H] = J_\Gamma, \\
[n\cdot D] = \gamma_\Gamma,
\end{cases}
$$

ここに　$B = \mu H$, $D = \varepsilon E$,　ε：誘電率（正定数），

J_Γ：表面電流密度，　γ_Γ：表面電荷密度，

$[A] = A|_{\Gamma_+} - A|_{\Gamma_-}$,

Γ_+：Γの外側、　Γ_-：Γの内側，

が知られている。又外部固定壁内では完全導体であることから、つまり Γ_+ 上では $E=0$, $H=H_e(x)$（tに依らない）（これらも[12]参照）であることに注意して、以下では

$$
(6)\qquad n\times E = 0 \quad \text{on} \quad [0,T]\times\Gamma
$$

を課すべき境界条件と見做し、解が得られた後(5)により $H_e(x)$, γ_Γ, J_Γ が決定されると考えよう。条件(6)に $E=-\mu\, u\times H$ を代入し(4)に注意すると境界条件(4),(6)は次に同等

$$
(7)\qquad
\begin{cases}
(H\cdot n)\,u = 0, \\
u\cdot n = 0.
\end{cases}
\qquad \text{on} \quad [0,T]\times\Gamma
$$

いま磁場の方程式に $n\cdot$ を作用させ $\nabla\cdot H = 0$ と $u\cdot n|_\Gamma = 0$ に注意すれば Γ 上で

$$
(8)\qquad (H\cdot n)_t + (u\cdot\nabla)(H\cdot n) + \lambda(\nabla u)(H\cdot n) = 0,
$$

が成立することが分る。(ここに $\lambda(\nabla u)$ は ∇u に依存するスカラー関数)。Γ 上のベクトル場 u に対する特性曲線上で $(H\cdot n)$ を考えることにより、条件(7)はさらに次に同等であることが分る。

$$(9)\qquad \begin{cases} u\cdot n = 0 & \text{on}\quad [0,T]\times\Gamma_0, \\ u = 0 & \text{on}\quad [0,T]\times\Gamma_1, \end{cases}$$

ここに

$$\Gamma_0 = \{x\in\Gamma\ ;\ H_0\cdot n|_\Gamma = 0\},$$

$$\Gamma_1 = \{x\in\Gamma\ ;\ H_0\cdot n|_\Gamma \neq 0\},$$

H_0 : H の初期値.

さらにこのとき $\forall t\geq 0$ に対し Γ_0 上では $H\cdot n = 0$, Γ_1 上では $H\cdot n\neq 0$ が成立することに注意する。以下完全導体壁に対する境界条件を(9)としよう。次に条件(9)の下での Boundary Matrix $A(n)$ について述べる。簡単の為いま Ω は半空間 $\mathbb{R}^3_+ = \{x\in\mathbb{R}^3;\ x_1>0\}$ とする。このとき Boundary Matrix $A(n)$ は

$$A(n) = -A_1 = -\left(\begin{array}{c|ccc|c} \alpha u_1 & 1 & 0 & 0 & -\alpha u_1{}^t H \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & u_1 I_3 & & -H_1 I_3 \\ 0 & & & & \\ \hline -\alpha u_1 H & & -H_1 I_3 & & u_1(I_3 + H\otimes H) \end{array}\right),$$

故に(9)より $u_1|_\Gamma = 0$ を考えると

$$(10)\qquad A(n)|_\Gamma = -\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & 0 & & -H_1 I_3 \\ 0 & & & & \\ \hline 0 & & -H_1 I_3 & & 0 \end{array}\right).$$

一般論では Γ 上で $A(n)$ が $MU=0$ に対し Maximally Nonnegative であることが重要である。

定義 $A(n)$ が $MU=0$ に対し Γ 上 Maximally Nonnegative

$$\Updownarrow$$

$^\forall x \in \Gamma$ に対し

i) $\operatorname{Ker} M$ 上 $A(n)$: nonnegative,

ii) $\operatorname{rank} M = \#\{\lambda\,;\ A(n)$ の負の固有値$\}$

境界条件(9)に対し $A(n)$ が Maximally Nonnegative であることを見よう。$\bar{U} = {}^t(\bar{\xi}, \bar{u}, \bar{H}) \in \mathbb{R}^7$ とすれば (10) より

$$(11) \qquad {}^t\bar{U}\, A(n)|_\Gamma\, \bar{U} = 2H_1(\bar{u}_1\bar{H}_1 + \bar{u}_2\bar{H}_2 + \bar{u}_3\bar{H}_3),$$

故に (9) $M\bar{U}=0$ とすれば

$$x \in \Gamma_0 \longrightarrow (H\cdot n) = H_1 = 0,$$

$$x \in \Gamma_1 \longrightarrow \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0,$$

が従う為(11)より ${}^t\bar{U}\, A(n)|_\Gamma\, \bar{U} = 0$、つまり i) が示された。次に $x \in \Gamma_0$ なら $H_1 = 0$ より $A(n)|_\Gamma$ の固有値は $\lambda = \pm 1$, $\lambda = 0$（6重根）であり負の固有値は一つ、一方境界条件(9)は $u_1 = 0$ の一つ、従って ii) が成立する。$x \in \Gamma_1$ なら $H_1 \neq 0$ より $A(n)|_\Gamma$ の固有値は $\lambda = 0$、$\lambda = \pm|H_1|$（各々2重根）、$\lambda = \pm\sqrt{1+H_1^2}$ であり負の固有値は三つ、一方条件(9)は $u = 0$ で三つ、故にこの場合も ii) が成立することが分る。以上により境界条件(9)は数学的にも非常によい整合性を持つことが分る。

§3. 主要定理

ここでも簡単の為$\Omega = R^3_+$としよう。初期境界値問題(1),(2),(3)の解を構成する場合、通常線形化問題を考えその逐次近似を用い構成する。このとき上述の$A(n)$のMaximally Nonnegativeがあれば線形化方程式に対する基本L^2-energy不等式や解の一意性が成立し、さらに$A(n)$がΓ上rank一定を仮定すれば弱解の存在も示めされる。しかしながら特に非線形の解を作る為にはそれ以上に解のregularity特に境界近傍の法線方向導関数の評価が必要となる。この為の一番単純な仮定は

$$(12) \qquad A(n)\Big|_{\substack{x \in \Gamma \\ U = U_0}} \text{ が正則}$$

であり、この仮定の下に問題(1),(2),(3)の時間局所解がソボレフ空間H^m $(m \geq 3)$で構成出来る。(Rauch & Massey [6], Schochet [7], Ikawa [1] …等参照). 次に$A(n)|_\Gamma$が正則でないがrank一定の時は、線形化方程式についてRauch [5], Tsuji [9], 非線形問題については$A(n)|_\Gamma$が正則でない部分に対応する成分の法線方向導関数の評価が接線方向と同じorderまで回復出来ることを方程式の特殊性を利用したりそれを保証する様々な十分条件を仮定することで局所解の存在が示めされる(Schochet [7], Yanagisawa [10], Ohkubo [4], Kawashima & Yanagisawa & Shizuta [2], Majda & Osher [3]等)。$A(n)|_\Gamma$が正則でなく

rankも一定でないときは線形問題についての弱解の存在すらOpen Problemである。我々の場合を見てみよう。$A(n)$はΓ_0上でrank $=2$, Γ_1上rank 6 であることが容易に分る。それ故Γ_0もΓ_1も空でない場合は全く未解決である。そこで$\Gamma=\Gamma_0$ or $\Gamma=\Gamma_1$の場合を考える。

<u>$\Gamma=\Gamma_1$ の場合</u>：

Γ上で$A(n)$はrank $=6$であり、H_1-成分に当る行が一つ分degenerateしているが、方程式の性質を用い$\nabla\cdot H$を別途評価することで既存のShochet [7], Yanagisawa [10] 等の議論が全く平行に適用され、通常のSobolev空間H^m $(m\geq 3)$での時間局所解の存在が示めされる。

<u>定理1</u> $m\geq 3$（整数），$\bar{U}=(\bar{p},0,0)$（$\bar{p}$：与えられた正定数）とし次を仮定：

$$U_0-\bar{U}\in H^m(\Omega),\qquad \inf_{\Omega} p_0>0,$$

$$\nabla\cdot H_0=0 \text{ in } \Omega,\qquad \inf_{\Gamma}|H_0\cdot n|>0,$$

及び $m-1$ 次の compatibility 条件

$$\partial_t^k u(0)=0 \quad \text{on } \Gamma \qquad (0\leq k\leq m-1).$$

このとき $\exists T>0$ s.t. 問題(1)、(2)、(3)は唯一の解

$$U-\bar{U}\in\bigcap_{j=0}^{m} C^j(0,T;H^{m-j}(\Omega))$$

を持つ。

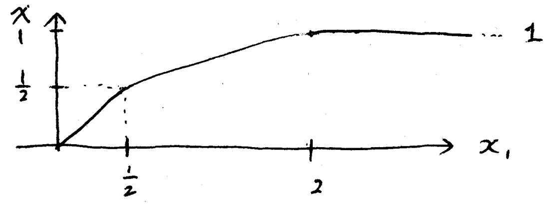
$\Gamma = \Gamma_0$ の場合：

Γ 上で $A(n)$ は rank = 2 と縮退の度合が強く、又 Euler 方程式系や $\Gamma = \Gamma_1$ の場合のような法線方向の評価を巧く回復させる方程式の構造を探すことも今の所成功していない。この為法線接線方向共に同じ order までの評価を必要とする既存の議論が全く適用出来ない。そこで解空間自体を粗く云って法線方向導関数の order を接線方向のそれの半分とする空間に変更することで解の構成に成功した（Yanagisawa & Matsumura [11]）。後にこの方向での非線形の議論は Chen Shuxing [8] に既にあることが分ったがこの方法も条件が強く単純には我々の場合に適用出来ない。$m > 0$（整数）として解空間 $X^m(0,T)$ を次で定義する。

$$X^m(0,T) = \{ \partial^\alpha \partial_{x_1}^k U \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)),\ |\alpha| + 2k \leq m \},$$

$$\partial = \{ \chi(x_1)\partial_{x_1},\ \partial_{x_2},\ \partial_{x_3},\ \partial_t \},$$

ここに $\chi(x_1)$ は次を満すもの：



$$\chi \in C^\infty(\bar{R}^1_+),$$

$$\chi' \geq 0$$

$$\chi = \begin{cases} x_1, & 0 \leq x_1 \leq 1/2 \\ 1, & x_1 \geq 2. \end{cases}$$

定理２　$m \geq 8$（整数），$\bar{U} = (\bar{p}, 0, 0)$（$\bar{p}$：正定数）として次を仮定する：

$$U_0 - \bar{U} \in H^m(\Omega), \quad \inf_{\Omega} \rho_0 > 0,$$

$$\nabla \cdot H_0 = 0 \ \text{in}\ \Omega, \quad H_0 \cdot n = 0 \ \text{on}\ \Gamma$$

及び $m-1$ 次の compatibility condition

$$\partial_t^k u_1(0) = 0 \quad \text{on}\ \Gamma \qquad (0 \le k \le m-1).$$

このとき $\exists T > 0$ s.t. 問題(1),(2),(3)は唯一の解

$$U - \bar{U} \in X^m(0,T)$$

を持つ。

注1) Ωが有界集合の内部や外部領域についても定理1,2に対応する結果が成立する。

注2) 本文でも述べたようにΓ上でBoundary Matrixのrankが変る場合を考察することは線形理論としても非常に興味ある問題である。

§4. 定理2の略証

基本的にはSchochet [7], Rauch [5], Tsuji [9]の議論の応用でなされる。いま

$$\tilde{U} - \bar{U} = (\tilde{\rho} - \bar{\rho}, \tilde{u}, \tilde{H}) \in X^m(0,T), \quad \tilde{u} \cdot n|_{\Gamma} = 0, \quad \tilde{H} \cdot n|_{\Gamma} = 0$$

としたとき線形問題

$$(13) \quad \begin{cases} L_{\tilde{U}}(U) \equiv A_0(\tilde{U}) U_t + \sum_{j=1}^{3} A_j(\tilde{U}) U_{x_j} = 0 \\ U(0) = U_0(x), \quad u \cdot n|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

を考え、(13)の解$\tilde{U}$が存在し再び$U - \bar{U} \in X^m(0,T)$,

$H\cdot n|_\Gamma=0$ を満し、しかるべき Energy 不等式が成立すれば、通常の逐次近似法で解が構成される。ここで線形化方程式についても、$H_0\cdot n|_\Gamma=0$ より $H\cdot n|_\Gamma=0$ $(\forall t\geq 0)$ が従うことは自明でないことに注意する。半空間の場合は比較的容易に確められるが、Ω一般の時は線形化に工夫が必要となる(この部分は白田平氏の idea による)。今 U_0 は簡単のため十分滑らかとし、以下証明の手順を粗く示そう。既存の結果にもちこむ為にまず $\tilde U$ を初期条件と境界条件を保ったまま

$$U_\delta-\bar U\in\bigcap_{i=1}^{m+1}C^i(0,T;H^{m+1-i}),$$
$$U_\delta-\tilde U\to 0\quad\text{as }\delta\to 0\quad\text{in }X^m(0,T),$$

と平滑化する。次に Schochet の idea を用い問題を非特性化する。つまり $\varepsilon>0$ として (13) を次に変形する:

$$(14)\quad\begin{cases}A_0(\tilde U_\delta)U_t+\sum_{j=1}^{3}A_j(\tilde U_\delta)U_{x_j}+\varepsilon U_{x_1}=\varepsilon\hat U_{x_1},\\ U(0)=U_0,\quad u\cdot n|_\Gamma=0.\end{cases}$$

ここに $\hat U$ は compatibility 条件を保つ為め補正項であり

$$\begin{cases}\hat U-\bar U\in\bigcap_{i=1}^{m+2}C^i(0,T;H^{m+2-i}),\\ \partial_t^k\hat U(0)=\partial_t^k U(0)\qquad k=0,\dots,m-1,\end{cases}$$

を満すものとして構成する。問題(14)は境界条件 $u\cdot n|_{\Gamma}=0$ に対し Boundary Matrix $A(n)$ が Maximally Nonnegative であり、$\varepsilon>0$ より $A(n)$ が Γ 上 Nonsingular となり、既存の結果から(14)には

$$U^{\varepsilon,\delta}-\overline{U}\in\bigcap_{i=1}^{m+1}C^{i}(0,T;H^{m+1-i})$$

なる解が存在する。それ故あとは(14)に対する ε、δ に依存しない $X^m(0,T)$ でのアプリオリ評価を出せばよいことになる。これは(13)において、必要なだけ滑らかな解に対してのアプリオリ評価と結果的に同等である。まず

$$\int_0^t \langle U, L_{\tilde{U}}(U)\rangle_{L^2(\Omega)}\,d\tau=0$$

を計算する通常の L^2-energy 評価法により $A(n)$ が Maximally Nonnegative に注意すれば $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ の評価は容易に従う。いま

$$A_j(\tilde{U})=\begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{2} & \overbrace{\quad}^{5} \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc} P_j & Q_j \\ {}^tQ_j & R_j \end{array}\right)\begin{array}{l}\}2\\ \}5\end{array}\qquad (0\le j\le 3)$$

$$U=\begin{pmatrix}V\\ W\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}\rho-\overline{\rho}\\ u_1\end{pmatrix},\quad W=\begin{pmatrix}u_2\\ u_3\\ H\end{pmatrix},$$

とおく。ここで

$$(15)\quad\begin{cases} P_1|_{\Gamma}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\ :\ \text{nonsingular}\\[1ex] Q_1|_{\Gamma}=R_1|_{\Gamma}=0\end{cases}$$

であることに注意する。

接線方向導関数の評価は $|\alpha| \le m$ として

$$\int_0^t < \partial^\alpha U, \partial^\alpha L_{\tilde{v}}(U) > d\tau$$

$$= \int_0^t < \partial^\alpha U, L_{\tilde{v}}(\partial^\alpha U) > d\tau + \int_0^t < \partial^\alpha U, [\partial^\alpha, L_{\tilde{v}}] U > d\tau$$

$$= 0$$

について行う。ここでは交換子 $[\partial^\alpha, L_{\tilde{v}}]U$ の評価のうち項

$$(16) \qquad \begin{pmatrix} \partial P_1 & \partial Q_1 \\ \partial^t Q_1 & \partial R_1 \end{pmatrix} \partial^{\alpha-1} \partial_{x_1} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$$

の境界近傍での扱いが本質的となるが、Rauch [5], Tsuji [9] の議論を用い (15) に注意すれば、

$$(17) \quad \begin{cases} \partial_{x_1} V = -P_1^{-1} \{ P_0 V_t + Q W_t + \sum_{j=2}^{3} (P_j V_{x_j} + Q_j W_{x_j}) + Q_1 W_{x_1} \}, \\ Q_1 W_{x_1} = \int_0^1 (\partial_{x_1} Q_1)(t, \theta x_1, x_2, x_3)\, d\theta \cdot (x_1 \partial_{x_1}) W_1, \\ \partial Q_1 \partial^{\alpha-1} \partial_{x_1} W = \int_0^1 (\partial_{x_1} \partial Q_1)(t, \theta x_1, x_2, x_3)\, d\theta \cdot (x_1 \partial_{x_1}) \partial^{\alpha-1} W, \\ \dots \text{etc}, \end{cases}$$

より (16) は全て接線方向微分と見做すことが出来る。法線方向微分については V については (17) の第一式を用い評価し、W については

$$(18) \quad R_0 \overline{W}_t + \sum_{j=1}^{3} R_j \overline{W}_{x_j} = -\left({}^tQ_0 \overline{V}_t + \sum_{j=1}^{3} {}^tQ_j \overline{V}_{x_j}\right)$$

について $R_1|_\Gamma = 0$ を用い評価を行う。より詳しい議論については Yanagisawa & Matsumura [11]、及びこの準備中の本編を参照して頂きたい。

参考文献

[1] M. Ikawa : Mixed problem for a hyperbolic system of the first order, Publ. Res. Inst. Math. Sci. kyoto Univ. 7 (1971/72), 427-454.

[2] S. Kawashima, T. Yanagisawa and Y. Shizuta : Mixed problems for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Proc. Japan Acad. 63 Ser. A (1987), 243-246.

[3] A. Majda and S. Osher : Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 607-675.

[4] T. Ohkubo : Well posedness for quasi-linear hyperbolic mixed problems with characteristic boundary, to appear in Hokkaido Math. J.

[5] J. Rauch : Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity, Trans. Amer. Math.

Soc. 291 (1985), 167-187.

[6] J. Rauch and F. Massey : Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems, Tran. of the A.M.S., vol. 189 (1974), 303-318.

[7] S. Schochet : The compressible Euler equations in a bounded domain : Existence of solutions and the incompressible limit, Commn. Math. Phys. 104 (1986), 49-75.

[8] Chen Shuxing : On the initial-boundary value problems for quasilinear symmetric hyperbolic system with characteristic boundary (in chinese), Chinese Ann. of Math. 3 (1982), 223-232.

[9] M. Tsuji : Regularity of solutions of hyperbolic mixed problems with characteristic boundary, Proc. Japan Acad., 48 (1972), 719-724.

[10] T. Yanagisawa : The initial boundary value problem for the equations of ideal magneto-hydro-dynamics, Hokkaido Math. J. 16 (1987), 295-314.

[11] T. Yanagisawa and A. Matsumura : Initial boundary value problem for the ideal magneto-hydro-dynamics with perfectly conducting wall condition, Proc. Japan Acad. 64 A (1988), 191-194.

[12] 電気磁気学II、現代電気工学講座、オーム社.