

モンスターと Coxeter 群  $Y_{444}$

北詰 正顕 (岐阜大 教養)

Masaaki Kitazume

本稿では,

Conway, Norton, Soicher : The Bimonster, the group  $Y_{555}$ , and the projective plane of order 3, in "Computer in algebra" pp. 27-50 (lecture notes 111, Dekker, 1988)

の紹介を試みる。もちろん, すべてを記すことはできないので, 原論文を読む (証明のささやかな "改良" を含む) 道しるべのつもりである。

まず, 群の構造に関する記号をここにまとめておくことにする。

記号  $X.Y$  で群  $X$  の群  $Y$  による, ある拡大を表す。すなわち  $G \cong X.Y$  とは,  $G$  が  $X$  と同型な正規部分群をもち, 商群  $G/X$  が  $Y$  と同型であることを意味する。さらに  $X:Y$  と書いたら, その拡大が分裂していることを表し,  $X \cdot Y$  は非分裂であることを表す。さらに拡大して  $X.Y.Z$  等という記号も用いる。

また, 位数  $n$  の巡回群を, 単に  $n$  と書き, 素数  $p$  に対し, 位数  $p^n$  の elementary Abel 群を  $p^n$  と表す。その他, Lie 型 / 散在型単純群を表す記号については,

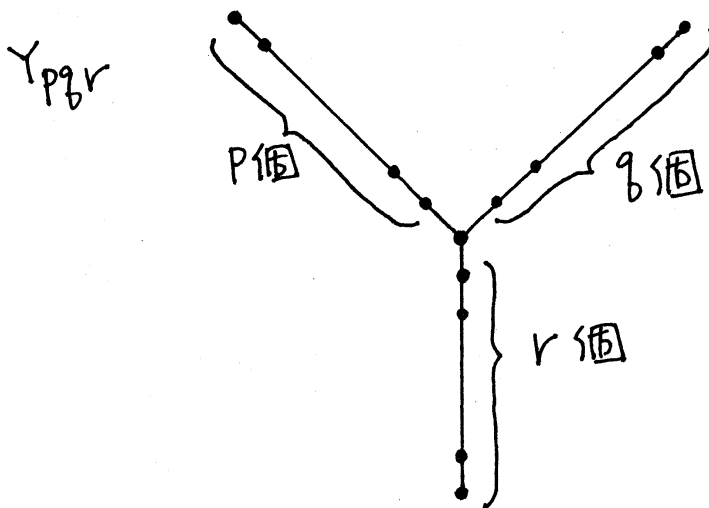
鈴木通夫: 群論 (上 / 下) (岩波書店), 有限単純群 (紀伊国屋書店) を参照されたい。

1. Coxeter diagram  $Y_{pqr}$  .

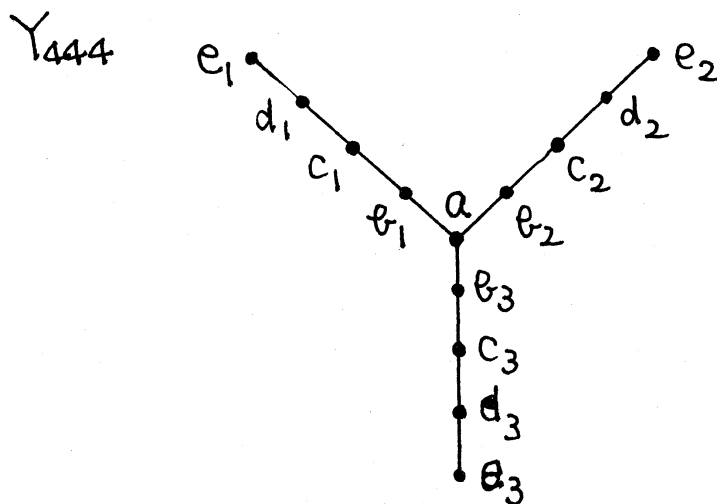
図 1 のように, 1 点を中心として  $Y$  の字の形に, それぞれ  $p, q, r$  個の点

が結ばれている図形を  $Y_{pqr}$  と呼ぶことにする。これを Coxeter diagram とみて、群を定義する生成元と関係式を表すものとする。すなわち、各点は  $x^2 = 1$  をみたす元  $x$  を表し、2つの元  $x, y$  について、対応する2点が結ばれていないとき  $(xy)^2 = 1$ 、結ばれているとき  $(xy)^3 = 1$  という関係式が与えられるものとする。このとき、生成される群を  $\langle Y_{pqr} \rangle$  と表す。  
 $\langle Y_{221} \rangle$ ,  $\langle Y_{321} \rangle$ ,  $\langle Y_{421} \rangle$  は、それぞれ  $W(E_6)$ ,  $W(E_7)$ ,  $W(E_8)$  としておなじみであろう。さらに関係式を付け加えたものを考えるときは、(例えば、関係式を記号 (#) で表すとして)  $\langle Y_{pqr}, (\#) \rangle$  などと表す。

(図1)



(図2)



2. Bimonster and  $Y_{444}$ .

記号  $M$  で，散在型単純群 Monster を表す。本稿の主役は，この  $M$  ではなく Wreath 積  $M \wr 2$  である。すなわち，直積  $M \times M$  と，2つの  $M$  を入れ換える位数 2 の作用を考え，その半直積として得られる群である。この群を Bimonster と呼ぶ。本稿の第一の主題は，Bimonster  $M \wr 2$  と Coxeter 群  $Y_{444}$  に関する，次の予想である。なお， $Y_{444}$  の各元には，図 2 のように名前がついているものとする。

$$(\text{予想}) \quad M \wr 2 \cong \langle Y_{444}, (ab_1c_1ab_2c_2ab_3c_3)^{10} = 1 \rangle.$$

ここで付け加えられた関係式を，今後  $(\#)$  と表すことにする。また，左辺の群を  $Y^*$  と表すことにする。

この予想に関連する結果として，以下のものがある。

$$(1) \text{ [Djokovic]} \quad \langle Y_{442}, (\#) \rangle \cong 3 \cdot F_{24}.$$

(  $F_{24}$  は Fischer の 3-transposition 群，その交換子群が単純群 )

$$(2) \text{ [Soicher: J.Alg 121]} \quad \langle Y_{443}, (\#) \rangle \cong M \times 2 \quad \text{が正しければ，予想も正しい。}$$

予想を証明する一つの方法は，いわゆる Coset enumeration を実行することである。雑にいうと，群  $G$  の位数を知るために，位数のわかっている部分群  $H$  をとり，生成元の  $G/H$  上の置換表現を，与えられた関係式を用いて求めるのである。これには，Coxeter-Todd の方法という， $|G/H| < \infty$  ならば有限時間内に終了するアルゴリズムが知られている。もちろん，一般には計算機を使用する。しかし， $|G/H|$  の有限性にどれほどの確信があろうとも，かかる時間の order は何も保証されない。上記 (1) の  $F_{24}$  の場合であれば，

$|G/H|$  は約 30 万 (6 桁) であるが, Monster となると 20 桁程になる。少なくとも現時点では, 計算機による証明は不可能であろう。本稿で紹介する論文でも Coset 計算は頻繁に用いられるが,  $|G/H|$  はおよそ 3 万程度までである。

### 3. $Y_{444}$ and $Y_{555}$ .

予想の証明については前節で述べたとおりとして, 本節では, 予想を立てる段階, すなわち, Bimonster が群  $\langle Y_{444} \rangle$  の商群になることについて説明することにする。

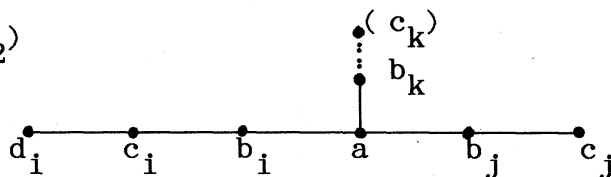
さて, 本稿 (および講演) の題目には  $Y_{444}$  を掲げたが, 原論文では  $Y_{555}$  になっている。実は, 話の出発点になるのは, Bimonster が  $\langle Y_{555} \rangle$  の商群になるという観察なのである。とすると, 予想の主張を考え合わせると, 群  $Y^* = \langle Y_{444}, (\#) \rangle$  も  $\langle Y_{555} \rangle$  の商群であるはずである。すなわち,  $Y^*$  に  $Y_{555}$  の関係式をみたす生成元がある。このことは, 後の話の準備としても重要であるので, 順を追って見て行くことにしよう。

(1) まず, 元  $f_{ij}$  を

$$f_{ij} = (ab_i c_i d_i b_j c_j b_k)^9$$

と定義する (ただし,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ )。これは,  $a - b_k$  の作る  $Y_{321}$  (つまり,  $W(E_7)$  またはその商群。図 3) の Coxeter element の 9 乗で,  $W(E_7)$  の Coxeter number は 18 であるから,  $f_{ij}^2 = 1$  が成り立つ。さらに, この元は  $W(E_7)$  の中心の生成元であり, 従って, 定義の式に出てくる各元と可換である。また, 定義から  $e_j, d_k, e_k$  とも可換である。

(図 3)  $Y_{321}$  ( $Y_{322}$ )



(2) 次に,  $c_k$  を加えた  $Y_{322}$  を考える (図 3)。Coset 計算により,

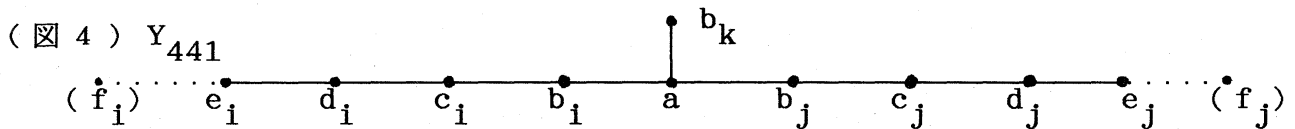
$$\langle Y_{322}, (\#) \rangle \cong \Omega_7(3):2$$

が得られ, この群において,  $f_{ij} = f_{ik}$  が成立する。(1) より,  $f_{ij}$  は  $d_j$  とも可換である。

(3) さて, 元  $f_i$  を  $f_i = f_{ij} = f_{ik}$  として, 定義する。ここで, 図 4 のように  $Y_{441}$  を考える。(2) で得られた関係式を加えて,

$$\langle Y_{441}, [f_{ij}, d_j] = 1 \rangle \cong \Omega_{10}^-(2):2$$

が Coset 計算から得られ, この群で  $(f_{ij} \cdot e_i)^3 = 1$  が成立する。



以上で,  $Y_{444}$  に  $f_i$  ( $i=1,2,3$ ) を加えたものが,  $Y_{555}$  の関係式をみたすことが示されたことになる。

(4) Bimonster の話に移る前に,  $\langle Y_{555} \rangle$  と関係式 (#) について述べておく。 $Y_{555}$  には, 始めから元  $f_i$  が存在するが, それとは別に  $f_{ij}$  を (1) のように定義することは可能である。上記のように両者が一致する状況を考えると,  $Y_{552}$  において

$$\langle Y_{552}, f_i = f_{ij} = f_{ik} \rangle \cong \Omega_8^+(3):2$$

となり, この群で (#) が成立することがわかる。

このことは, Bimonster が  $\langle Y_{444}, (\#) \rangle$  の商群になることを示す際に使われるが, さらに次のようなこともわかる。上の式の左辺の群の定義は,  $j$  と  $k$  について対称である。これは, 添字  $j, k$  を取り替えることが群の自己同型になることを意味する。従って,  $Y^*$  において, 添字  $i, j, k$  の置換は  $Y^*$  の自己同型になっている。

ここで、 $Y_{555}$  に含まれる affine type の diagram について触れておくことにする。すなわち、 $Y_{222}, Y_{331}, Y_{521}$  ( $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ ) である。これらが生成する  $Y^*$  の部分群は次のようである (Coset 計算による)。

$$\langle Y_{222}, (\#) \rangle \cong 3^5 : W(E_6)$$

$$\langle Y_{331}, [f_{ij}, d_j] = 1 \rangle \cong (2\text{-group}) \cdot W^*(E_7)$$

$$\langle Y_{521}, f_i = f_{ij}, (f_{ij}e_i)^3 = 1 \rangle \cong W^*(E_8)$$

ここで、 $W^*(E_n)$  と書いたのは、 $W(E_n)$  の (位数 2 の) 中心による商群である。用いられた関係式は、上記の (1)-(4) にすでに現れており、たがいに関連しあっているものである。こじつけた言い方をすれば、 $Y_{444}$  (もしくは  $Y_{555}$ ) が有限群になる (であろう) ための条件は、これら affine type の群が有限になるということである。関係式に  $f_i$  や  $f_{ij}$  が出てくるのは、Coxeter element の振舞いを決定するという意味で納得できるとして、それでは、 $(\#)$  には何か意味はあるのだろうか? 数学的な意味付けがあれば面白いと思う。

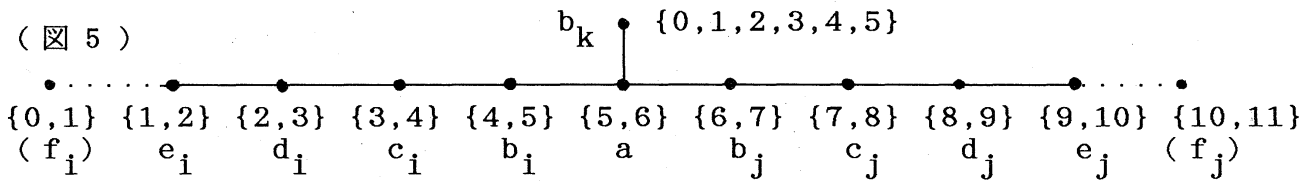
次に進む前に (3) に現れた直交群  $\Omega_{10}^-(2):2$  について触れておこう。この群は、特に話の後半部でよく現れるのである。そこで、原論文にある、この群の簡潔な構成を紹介しておく。(当面は飛ばして読んで差し支えない。)

$\Delta = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$  (12点集合) とし、 $V_0$  を  $\Delta$  の部分集合で偶数個の元からなるもの全体を表す。 $V_0$  において、和を対称差で定義 (i.e.  $X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ ) することにより、 $V_0$  を 2 元体上のベクトル空間とみなせる。さらに、 $V \ni X$  に対し、 $f(X) = \frac{1}{2}|X|$  (左辺を mod 2 で 2 元体の元とみなす) とすると、 $f$  は  $V_0$  上の 2 次形式で付随する symplectic 計量は  $(X, Y) = |X \cap Y|$  で与えられる。さらに、 $f$  は 10 次元空間  $V = V_0 / \langle \Delta \rangle$  上の非退化な minus type の (i.e.  $(\cdot, \cdot)$ ) に関する極大全等方部分空間の次元

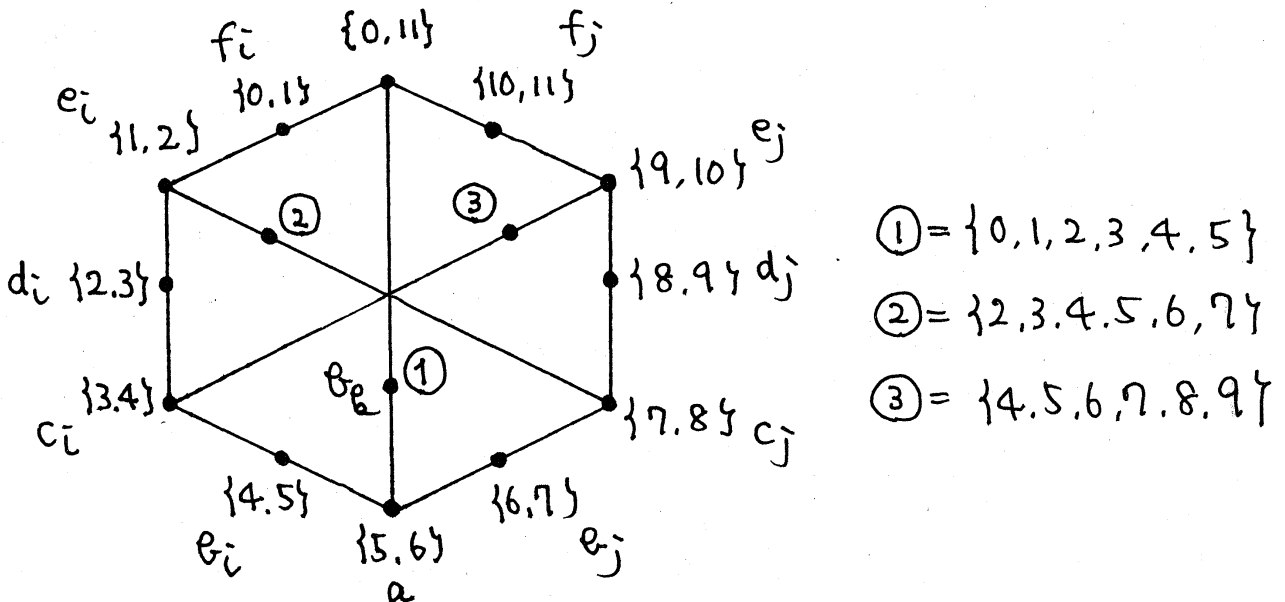
が 4 の) 2 次形式であることがわかる。ここで、 $V$  の元  $X$  に対し  $X$  に関する reflection  $r_X$  を

$$r_X(Y) = Y + (X, Y) \cdot X$$

と定義する。問題の群  $\Omega_{10}^{-}(2):2$  は、 $f$  を不変にする reflection 全体で生成される群である。具体的には、 $\Delta$  の 2 および 6 個の元からなるものに関する reflection が生成元となる。 $Y_{441}$  の関係式をみたすものは、図 5 のようにとればよい。ただし、図 5 では  $r_X$  のかわりに単に  $X$  を書いた。これに、 $f_i, f_j$  ( $\{0,1\}, \{10,11\}$ ) を加えたものが  $Y_{551}$  になるが、さらに元を加えて図 6 のような diagram も作れる。これは、後で頻繁に用いられる。また  $r_{\{i,i+1\}}$  は  $\Delta$  上の置換として互換  $(i i+1)$  になることも注意しておこう。



(図 6)



4. Bimonster and  $Y_{555}$ .

ここで, Bimonster が  $\langle Y_{555} \rangle$ ,  $\langle Y_{444} \rangle$  の商群になることを述べる。

予備知識としては, 次のことを認めてもらえばよい。

(1) Bimonster は, 対称群  $S_5$ ,  $S_4$  と同型な部分群  $X_5 \supset X_4$  を含み, その中心化群について

$$C(X_5) \cong S_{12}, \quad C(X_4) \cong \Omega_{10}^-(2):2$$

が成り立つ。

(2)  $X_5$  は  $C(X_5)$  の自然な  $S_5$  ( $S_{12}$  の 12 次置換表現の 7 点固定群) と共役。

(3) Bimonster は  $X_5$  と  $C(X_4)$  で生成される。

これらは, Monster に関する事実から導かれる。筆者も, 完全には確認していないが, 以下のことから上記 (1)-(3) を納得することはできるであろう。

(a) Monster は, 極大部分群  $(A_5 \times A_{12}):2$  をもつ。

(b) (a) の  $A_5$  の部分群  $2^2$  について, その正規化群は

$$N(2^2) \cong 2^2 \cdot {}^2E_6(2):S_3$$

で,  $S_3$  は  ${}^2E_6(2)$  に外部自己同型として作用し, その作用が自明に働く部分群は  $\Omega_{10}^-(2)$  と同型である。

(c) Monster は  $(A_5 \times A_5 \times A_5) \cdot S_3$  という極大部分群をもつ。

なお, 原論文では Bimonster に関して

$$C(S_2 \times S_3) \cong 2 \times F_{23} \quad (S_2 \times S_3 \text{ は (1) の } S_5 \text{ の部分群})$$

という事実も使われている。今回の報告の一つの目的は, これが不要であることを紹介することである。これは, 原論文でも本質的に使われているわけではない。次節で述べる 26 node theorem の証明で, 位数が高々  $2 \cdot |F_{23}|$  である部分群を構成し, そこで得られる関係式を用いていた。上記の事実はその部分群の構造を特定するために使われていた。本稿では, 証明を改良し



て、その部分を回避したのである。

さて、本節の目的である Bimonster が  $\langle Y_{444}, (\#) \rangle$  の商群になることを、簡単に述べておこう。

まず、(1) で保証される部分群  $X_5 \times C(X_5) (\cong S_5 \times S_{12})$  を考える。(2) より  $C(X_5)$  の自然な  $S_5$  をとれば、その centralizer も  $S_{12}$  と同型であるこれで、( $Y_{555}$  の関係式を満たすはずの) 16 個の元が得られている。この段階で確定しない関係式は  $C(X_4)$  の中で確かめられる。さらに、 $C(X_4)$  の構造から  $f_i = f_{ij} = f_{ik}$  が得られ、前節の (4) で見たように (#) が得られる。以上、書き急いだ感もあるが、精密な議論は原論文に譲ることにする。

#### 5. The 26 node theorem.

次の定理が原論文の主定理というべき 26 node theorem である。群  $Y^*$  の性質として述べてあるが、Bimonster においても成立する。

##### 定理 (The 26 node theorem)

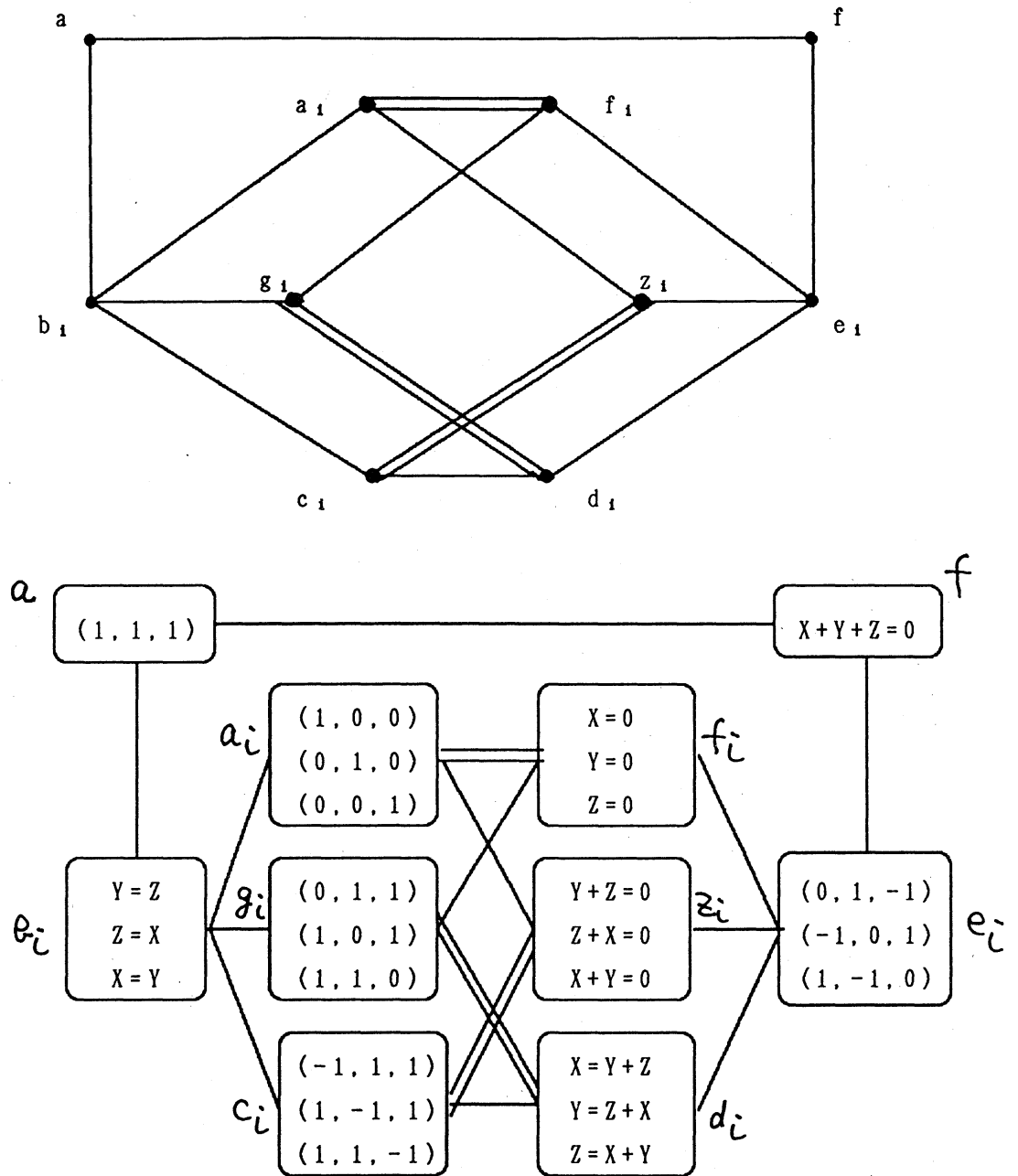
群  $Y^*$  に、 $Y_{444}$  の 13 個の生成元に加えて、13 個の元  $z_i, a_i, f_i, g_i, f$  が存在して、それらの Coxeter diagram は 3 元体上の射影平面の点と線の incidence graph (点と線を vertex とし、包含関係があるとき結ぶ) に一致する。さらに、群  $Y^*$  のある自己同型が、graph の全自己同型群を与える。

図 7 として、Coxeter diagram の概略図、および、射影平面との対応を掲げておく。

この特殊な 26 元の存在が、どのような数学的内容を含んでいるのかは、筆者には判らない。26 元に数学的な意味を与えるような Monster (もしくは

Bimonster) の構成法があれば, 非常に面白いと思う。

( 図 7 )



以下、この定理を証明する。前節で予告した、筆者の改良版である。

行うべきことは、(1) 総計 26 個の元のうち残されたものを定義し、(2) それらの間の関係式を調べ、(3) graph の全自己同型群に相当する群  $Y^*$  の自己同型を与える、の 3 段階である。しかし、(2) については、(3) が済んでしまえば、群の自己同型により 2 元の積の位数が不変であることから自然と得られる。そこで、以下では (2) については一切気にしないことにする。

さて、定理の  $f_i$  というのは 3 節で定義したものに他ならない。繰返しになるが、これらを付け加えたときの diagram は  $Y_{555}$  である。まず、 $Y_{555}$  の 2 本の枝の部分から生成される  $S_{12}$  に注目する。これを  $S(i)$  と表す。すなわち、 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  として

$$S(i) = \langle f_j, e_j, d_j, c_j, b_j, a, b_k, c_k, d_k, e_k, f_k \rangle$$

とおく。このとき、 $\pi(j, k) = (f_k e_k d_k c_k b_k a b_j c_j d_j e_j f_j)^2$  と定義する。特に  $\pi = \pi(1, 2)$  とおく。これらは、 $S(i)$  の生成元を、 $f_j = (0 \ 1)$ ,  $e_j = (1 \ 2)$   $\dots$ ,  $e_k = (9 \ 10)$ ,  $f_k = (10 \ 11)$  と 12 文字  $(0 - 11)$  の互換とみなしたとき  $(0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10)(1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11)$  という位数 6 の元である。容易に、 $\pi(k, j) = \pi(j, k)^{-1}$  がわかる。また、すぐ後で改めて定義するが、互換  $(0 \ 11)$  に対応する元を  $a_i (= e_k^\pi = e_j^{\pi^{-1}})$  とおく。

先に (3) として述べた graph の自己同型のうち、射影平面の点と線を保つ  $L_3(3)$  が、今定義した内部自己同型  $\pi$  と、3 節 (4) で  $Y^*$  の自己同型であることが示されている "添字の付け換え" で生成される。この "添字の付け換え" を  $\sigma(i, j)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) と表す。なお、点と線を入れ換える作用についてはは別個に扱う。

まず、新たな 13 個の元の定義を列挙しておく。

- (i)  $f_i$  (すでに定義済み)
- (ii)  $a_3 = e_2^\pi$  ( $a_1, a_2$  は右辺の添字を  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  として定義)
- (iii)  $z_1 = b_3^\pi$  ( $z_2, z_3$  は (ii) と同様)

(iv)  $f = z_3^\pi$

(v)  $g_3 = a_2^\pi$  ( $g_1, g_2$  は (ii) と同様)

(ii) の  $a_3$  および  $a_1, a_2$  は, すでに ((0 11) として) 定義したものである。その定義から  $\sigma(i, j)$  が  $a_i$  達に対しても, 添字の付け換えとして働くことがわかる。(iii)以降についても同様のことを確かめることで,  $\sigma(i, j)$  の作用が確定する。なお, (ii) に述べた定義の仕方から, 添字の 3-cycle (1 2 3) の作用は決るので, ある  $\sigma(i, j)$  の作用が決れば他の  $\sigma(i', j')$  も確定する。さらに, 同時に  $\pi$  の作用も調べてゆく。 $\pi$  の作用については, 結果を cycle分解の形で書いておく。

$$(c_3)(d_3)(e_3)(f_3)(f_1 d_1 b_1 b_2 d_2 f_2)(e_1 c_1 a c_2 e_2 a_3)$$

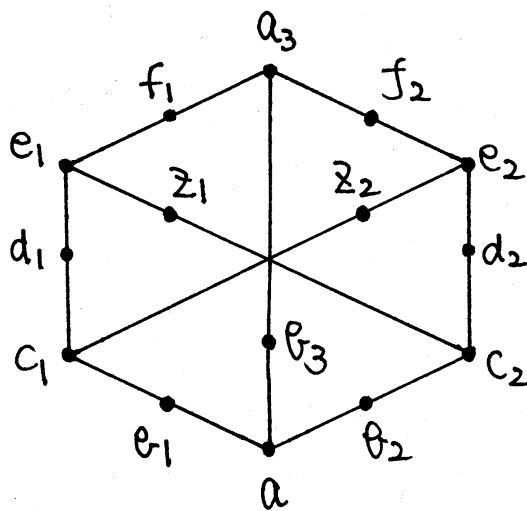
$$(b_3 z_1 z_2)(z_3 f)(a_2 g_3 a_1)(g_1 g_2)$$

このうち上の行については,  $\pi$  の定義から始めの 4 元と可換であり,  $S(3)$  ( $\cong S_{12}$ ) の中で 2 つの 6-cycle が容易に確認できる。

以下では, 次のように定義する部分群  $G(i)$  が活躍する。

$$G(i) = \langle S(i), b_i \rangle$$

(図 8)  $G(3) \cong \Omega_{10}^-(2):2$



このとき,  $f_j, f_k$  は, その定義から生成元としては不要である。従って,  $G(1)$  は 3 節 (3) でみたように  $\Omega_{10}^-(2):2$  と同型である。3 節の最後に述べたように生成元を考えておくところからの話がわかりやすい (図 8)。(3) について書いておく。 $G(3) \supset S(3) \ni \pi$  であり,  $\pi$  を  $\Delta$  上の置換とみたものは先に書いたような 2 つの 6-cycle の積である。図には, 定義したばかりの  $z_1, z_2$  も出ているが, これについては, すぐに説明する。

まず,  $G(3)$  について,

(a)  $\pi$  の (共役による) 作用の  $b_3$  を含む orbit の長さは 3 .

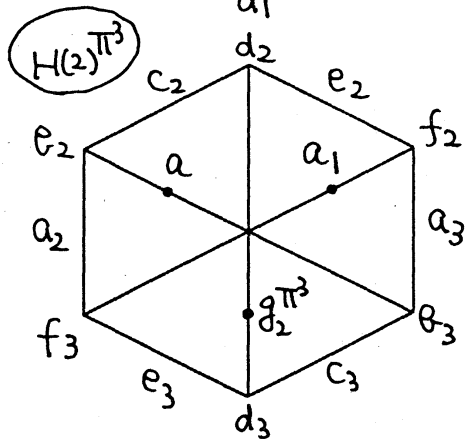
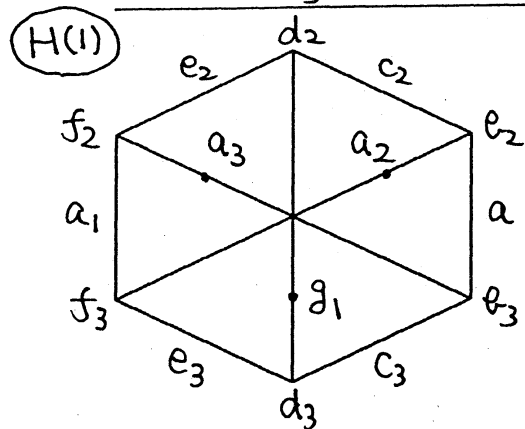
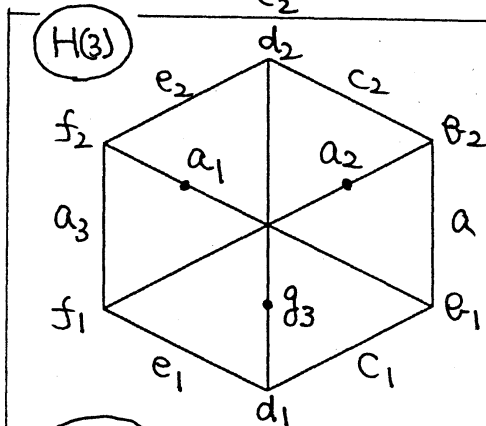
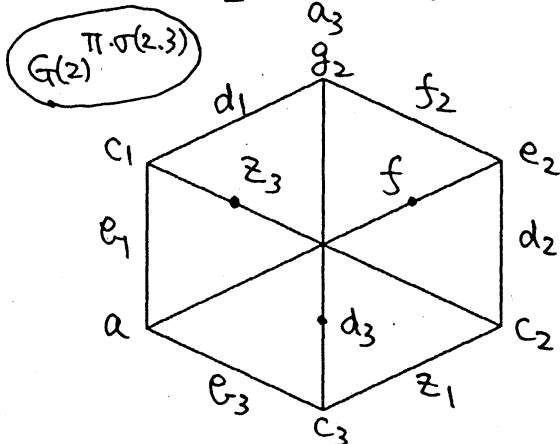
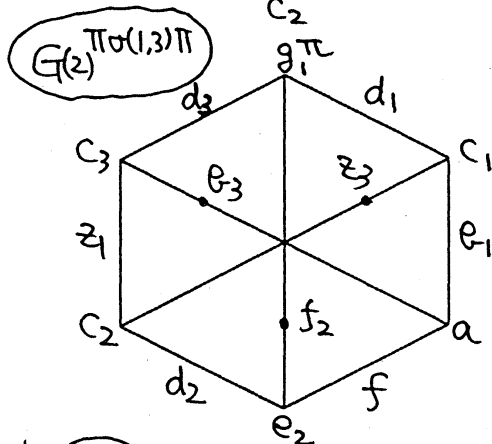
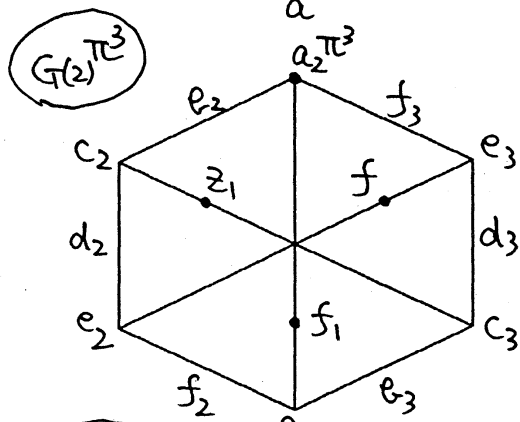
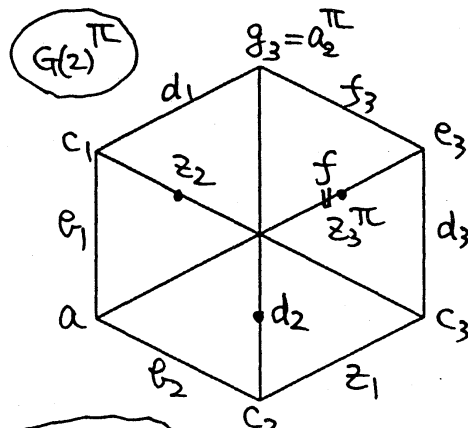
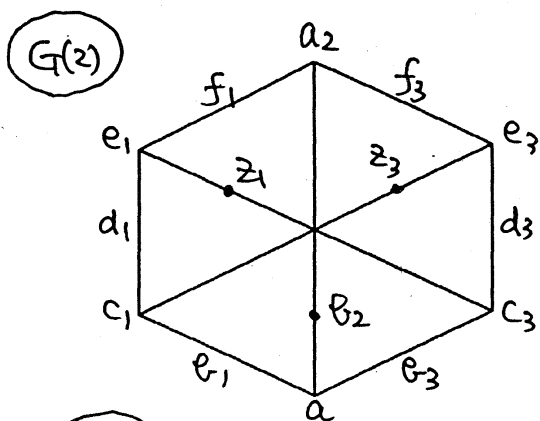
(b)  $b_3^\pi = (ab_1c_1d_1b_2b_3)^5 f_1$  .

が成り立つ。(a) については, 図 8 の対応から明らか。(b) についての証明は省略する。さて, 定義の (iii) より,  $z_1 = b_3^\pi$  で, 上記 (b) より  $\sigma(2,3)$ -不変。よって,  $z_2 (= b_1^{\pi(2,3)})$  は  $\sigma(3,1)$ -不変。すなわち, 図 8 にあるように,  $z_2 = b_3^{\pi(2,1)} = b_3^{\pi^{-1}}$  である。上記 (a) より,  $z_2 = b_3^{\pi^2}$  となり,  $\sigma(i,j)$  の作用と共に  $\pi$  の作用 ( $b_3 z_1 z_2$ ) も確定した。

次に, 群  $G(2)$  および  $G(2)^\pi$  を考える。以下の議論に現れる群 ( $G(i)$  の仲間) については, 図 9 に掲げてある。群  $G(2)^\pi$  に (iv), (v) で定義される  $f, g_3$  が含まれているが, これらは生成元としては不要である。 $G(2)^\pi$  の残りの生成元の集合は,  $\sigma(1,2)$ -不変である。元  $f$  は, これらの生成元との関係から一意に定まり, これから  $f = f^{\sigma(1,2)}$ , 同様に  $g_3 = g_3^{\sigma(1,2)}$  が得られる。定義から  $f^{\sigma(1,2)} = z_3^{\pi^{-1}}$  ゆえ,  $f = z_3^\pi = z_3^{\pi^{-1}}$  となり  $\pi$  の 2-cycle ( $z_3 f$ ) がわかった。同様にして,  $g_3 = a_2^\pi = a_1^{\pi^{-1}}$  を得る。ただし  $a_1^\pi = a_2$  は示されておらず 3-cycle ( $g_3 a_1 a_2$ ) は, まだ未確定である。

次に  $G(2)^\pi$  において,  $f = z_1^3 c_2 c_3 b_2 b_3 d_2 d_3 e_2 e_3 f_2 f_3 c_2 c_3 d_2 d_3 e_2 e_3$  が確かめられ, 従って,  $f^{\sigma(2,3)} = f$  である。これで  $\sigma(i,j)$  達の  $f$  への (自明な) 作用が確定した。

( 9 )



次は、 $G(2)^{\pi \sigma(1,3)\pi}$  と  $G(2)^{\pi \sigma(2,3)}$  とを比べると、 $g_2$  と  $g_1^\pi$  以外の元は双方に共通している。これから  $g_2 = g_1^\pi$  がわかる。 $g_1 = g_2^\pi$  が証明できれば  $\pi$  の cycle  $(g_1 g_2)$  は確定する。

現時点で証明し残しているのは、 $g_1 = g_2^\pi$ 、 $a_1^\pi = a_2$  だけである。この2つについては、新たに部分群  $H(i) = \langle S(i), g_i, a_j, a_k \rangle$  を登場させる必要がある。図で見れば、 $(S(i) \ni a_i$  を加えた) diagram は  $H(i)$  のものと全く同じ形である。結論だけに留めるが、coset計算から  $H(i)$  も  $\Omega_{10}^-(2):2$  と同型であることがわかる。これから、 $H(3)$  を考えれば、 $a_1$  を含む  $\pi$  ( $\in S(3)$ ) -orbit の長さは3である ( $G(3)$  に対する  $(a)$  と同じ)。従って、 $a_1^\pi = a_2$  である。さらに、 $H(1)$  と  $H(2)^{\pi^3}$  とを比べて  $g_1 = g_2^\pi$  を得る。

これで、26個の元の定義と、graph の自己同型としての  $\langle \pi, \sigma(i,j) \rangle$  の作用がすべて決定した。これが  $L_3(3)$  と同型な群を作ることは省略する。

最後に、射影平面の点と線を入れ換える位数2の自己同型について簡単に述べておく。原論文では、もっと簡単なことしか述べられていないので、以下に述べるより簡単なことなのかも知れない。

天下り式に、 $\alpha$  を cycle 分解の形で定義する。

$$\begin{aligned} & (ad_1 a_3 d_3)(b_1 e_1 f_2 c_2)(c_1 f_1 e_2 b_2) \\ & (b_3 g_3)(z_1 a_1)(z_2 a_2) \\ & (c_3 f_3)(d_3 e_3) \end{aligned}$$

第1段は、 $S(3)$ 上に位数4で働くように、第2段は、 $G(3)$ と  $H(3)$ を入れ換えるように定義されている。 $G(3)$ 、 $H(3)$ は実際同型な群で、 $\alpha$ がその同型を与えるように作ってある。証明すべきことは、これが  $Y^*$ の自己同型であることである。それには、 $\alpha(Y_{444})$ において (#)に相当する関係式が成り立つことを示せばよい ( $Y^* = \langle Y_{444}, (\#) \rangle$ だから)。(＃)を示すには、3節

(4) で用いた関係式  $f_i = f_{ij} = f_{ik}$  に "相当する" 関係式 (以下 (##) と表すことにする) を示せばよい。元の関係式は  $H(j)$ ,  $H(k)$  で成り立っているものである。ところが,  $\alpha$  は同型  $H(3) \cong G(3)$  を与えるから, (##) は  $H(3)$  でも成立する。さらに ( $\alpha$  の定義の第3段のおかげで),  $\alpha$  は  $G(2)$  と  $G(2)^\alpha (= H(2)^{\alpha^{-1}})$  の同型も与える。従って  $G(2)^\alpha$  でも (##) は成立する。従って,  $\alpha(Y_{444})$  で (#) に相当する式は確かに成立する。

以上で, 26 node theorem の証明を終る。

## 6. Sporadic simple groups and 26.

Monster を筆頭に, 総計 26 個ある散在型単純群であるが, その中でも特に注目されるべき 4 つの群として  $M$  (Monster),  $Co.1$  (Conway群),  $M_{24}$  (Matheu群), および  $F_{24}$  (Fischer群) がある。

この中でも, よく知られているのが  $M$ ,  $Co.1$ ,  $M_{24}$  の関係である。群論的には, 極大部分群として  $Co.1$  は  $2^{11}:M_{24}$  を含み,  $M$  は  $2^{1+24} \cdot Co.1$  を含む ( $2^{1+24}$  は位数  $2^{25}$  の extra-special 2-群)。これらの関係をよく説明するのが,  $M_{24}$  を全自己同型群にもつ Golay code と,  $2 \cdot Co.1$  (いわゆる  $\cdot 0$ ) を全自己同型群にもつ Leech lattice の関係である。さらに, これらを用いて Griess がある (非結合的) 可換代数を定義し, その全自己同型群として定義されるのが (現在の) Monster  $M$  の定義である。しかし, 歴史的に見ると Monster の (Fischer による) 発見の道筋は, 3-transposition 群  $F_{24}$  達の研究から,  $\{3,4\}$ -transposition 群  $F_2$  (Baby monster) が発見され,  $2 \cdot F_2$  を位数 2 の元の中心化群にもつ単純群として  $M$  が発見された, というのが大筋である。

前節の 26 node theorem を興味深いものと感じる理由の一つは,  $Y_{444}$  の subdiagram が生成する (と信じられている) 群の列が, Fischer のたどった道に現れる群をことごとく含んでいるということである。Fischer の通った



道を同じように進むことはできなくとも、その道筋を見ることはできる、その“地図”が与えられているように思えるのである。

そこで、現在の定義とこの地図とを結び付けることができたなら、すばらしいことだと思われる。実は、その手がかりかも知れないことが、26 という数字と共に現れているのである。

$Y^*$  (または Bimonster) の 26 個の元を、定理にあるように射影平面の点と線とみなす。1 個の点 (線) は 4 個の線 (点) と incidence である (i.e. 包含関係がある)。点  $P$  に対し、 $P$  を通るひとつの線と、線上の  $P$  以外の 3 点に対応する元は  $W(D_4)$  を生成する。この  $W(D_4)$  は 4 とおり考えられるが、この 4 つの  $W(D_4)$  の中心が一致するのであるという。この中心の生成元 (位数 2) を  $P^*$  とおく。13 個の点を  $P_1, \dots, P_{13}$  として、すべての  $P_i^*$  が生成する群について  $\langle P_i^* \rangle \cong 2^{13}$  が成立する。13 個の線  $L_i$  についても同様のことが成り立つから  $\langle L_i^* \rangle \cong 2^{13}$  となる。さて、注目すべきは、これらすべてが生成する群について  $\langle P_i^*, L_i^* \rangle \cong 2^{1+26}$  が成り立つというのである。

これは、まさに  $M$  の極大部分群  $2^{1+24} \cdot \text{Co.1}$  と関係するものであろう。現段階では、これ以上のことは述べられないが、これらすべて (可換代数と  $Y_{444}$ ) を説明する (Bi)Monster の構成があって然るべきと思われてならないのである。数学 (特に群論) をやっているとき、8 とか 24 とかが特別な数字であることが多い ( $E_8$  や Leech lattice)。しかし、(小学生程度の耳学問だが) super string など物理学では、10 か 26 が重要なのだと聞く。すでに Monster は物理学からも注目されているということだが、24 と 26 の比較から、Bimonster の方が重要な群なのかも知れない。

