数理解析研究所講究録
第 735 巻 1990 年 117-128

無限次元行列式とRogers-Ramanujan恒等式の一般化

名城大理工 加藤芳文(Yoshifumi Kato)

以下の内容はすべて次の2論文に書かれていますので、関心を持たれ詳しく知りたい方は御一読下さい。

[1] Y. Kato, The determinants of matrices whose elements decrease in diagonal direction, Studies in Appl. Math. vol. 78.

[2] Y. Kato & M. Koike, 同II-, to appear in Studies in Appl. Math.

2論文で取り扱っているのは次のことである。

$\boxed{\text{問題}}$ 次の無限次行列の行列式を求めよ.

$$A(a,q) = \begin{pmatrix} 1 & aq & & & \\ -1 & 1 & aq^2 & & \\ & -1 & 1 & aq^3 & \\ & & -1 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad |q|<1.$$

2種類の方法で計算することにより[1]で次の定理を得た.

$\boxed{定理}\boxed{1.}$

$$|A(a,q)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2} a^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{[W]\in W_{2k}^{0}/\mathcal{C}_{2k}} (I.T.[W]\,;\, q^k)_\infty .$$

ここで $(a\,;\,q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$ は q-アナログで用いられる無限積.

注意 1) $a=1, q$ のときは Rogers-Ramanujan 恒等式となる

2) $a \to a^2$ と読みかえると行列 $\begin{pmatrix} 0 & q & & & \\ -1 & 0 & q^2 & & \\ & -1 & 0 & q^3 & \\ & & -1 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

の固有値を計算することに相当.

3) 上記の固有値の分布を調べることは半導体の電子分布を求めることとも関連している.

記号の意味を後回しにし[2]で求めたalgorithm を使うと次のようになる. $1 \leqq k \leqq 8$. ($k=9$ でも計算済み)

$$|A(a,q)| = (-aq;q)_\infty (a^2q^3;q^2)_\infty (-a^3q^4;q^3)_\infty (-a^3q^5;q^3)_\infty$$
$$\times (-a^3q^6;q^3)_\infty (a^4q^5;q^4)_\infty (a^4q^6;q^4)_\infty (a^4q^7;q^4)_\infty^2 (a^4q^8;q^4)_\infty^2$$
$$\times (a^4q^9;q^4)_\infty (a^4q^{10};q^4)_\infty (-a^5q^6;q^5)_\infty (-a^5q^7;q^5)_\infty^2 (-a^5q^8;q^5)_\infty^3$$
$$\times (-a^5q^9;q^5)_\infty^4 (-a^5q^{10};q^5)_\infty^4 (-a^5q^{11};q^5)_\infty^4 (-a^5q^{12};q^5)_\infty^3 (-a^5q^{13};q^5)_\infty^2$$
$$\times (-a^5q^{14};q^5)_\infty (-a^5q^{15};q^5)_\infty (a^6q^7;q^6)_\infty (a^6q^8;q^6)_\infty^2 (a^6q^9;q^6)_\infty^4$$
$$\times (a^6q^{10};q^6)_\infty^6 (a^6q^{11};q^6)_\infty^8 (a^6q^{12};q^6)_\infty^9 (a^6q^{13};q^6)_\infty^{10} (a^6q^{14};q^6)_\infty^9$$
$$\times (a^6q^{15};q^6)_\infty^8 (a^6q^{16};q^6)_\infty^6 (a^6q^{17};q^6)_\infty^5 (a^6q^{18};q^6)_\infty^3 (a^6q^{19};q^6)_\infty^2$$
$$\times (a^6q^{20};q^6)_\infty (a^6q^{21};q^6)_\infty (-a^7q^8;q^7)_\infty (-a^7q^9;q^7)_\infty^3 (-a^7q^{10};q^7)_\infty^6$$
$$\times (-a^7q^{11};q^7)_\infty^{10} (-a^7q^{12};q^7)_\infty^{14} (-a^7q^{13};q^7)_\infty^{18} (-a^7q^{14};q^7)_\infty^{22} (-a^7q^{15};q^7)_\infty^{24}$$
$$\times (-a^7q^{16};q^7)_\infty^{25} (-a^7q^{17};q^7)_\infty^{24} (-a^7q^{18};q^7)_\infty^{22} (-a^7q^{19};q^7)_\infty^{19} (-a^7q^{20};q^7)_\infty^{16}$$
$$\times (-a^7q^{21};q^7)_\infty^{12} (-a^7q^{22};q^7)_\infty^{10} (-a^7q^{23};q^7)_\infty^{7} (-a^7q^{24};q^7)_\infty^{5} (-a^7q^{25};q^7)_\infty^{3}$$
$$\times (-a^7q^{26};q^7)_\infty^{2} (-a^7q^{27};q^7)_\infty (-a^7q^{28};q^7)_\infty (a^8q^9;q^8)_\infty (a^8q^{10};q^8)_\infty^3$$
$$\times (a^8q^{11};q^8)_\infty^{8} (a^8q^{12};q^8)_\infty^{14} (a^8q^{13};q^8)_\infty^{23} (a^8q^{14};q^8)_\infty^{31} (a^8q^{15};q^8)_\infty^{42}$$
$$\times (a^8q^{16};q^8)_\infty^{50} (a^8q^{17};q^8)_\infty^{59} (a^8q^{18};q^8)_\infty^{64} (a^8q^{19};q^8)_\infty^{67} (a^8q^{20};q^8)_\infty^{66}$$
$$\times (a^8q^{21};q^8)_\infty^{63} (a^8q^{22};q^8)_\infty^{58} (a^8q^{23};q^8)_\infty^{51} (a^8q^{24};q^8)_\infty^{45} (a^8q^{25};q^8)_\infty^{37}$$
$$\times (a^8q^{26};q^8)_\infty^{31} (a^8q^{27};q^8)_\infty^{24} (a^8q^{28};q^8)_\infty^{19} (a^8q^{29};q^8)_\infty^{14} (a^8q^{30};q^8)_\infty^{11}$$
$$\times (a^8q^{31};q^8)_\infty^{7} (a^8q^{32};q^8)_\infty^{5} (a^8q^{33};q^8)_\infty^{3} (a^8q^{34};q^8)_\infty^{2} (a^8q^{35};q^8)_\infty$$
$$\times (a^8q^{36};q^8)_\infty \cdots\cdots .$$

以下無限積が無限に続く。上式に関心がある人は $a=1$, q を代入してみて下さい。

$\boxed{W_{2k}^{\circ}/\mathcal{C}_{2k} \text{ と I.T.[W] の説明}}$

PとQを文字とする．次の word の集合を考る．

$$W_{2n} = \{ W = B_1 B_2 \cdots B_{2n} \mid B_i \text{のうち } n \text{個 } P,\ n\text{個 } Q \}.$$

W_{2n} には $2n$ 次巡回群 $\mathcal{C}_{2n}$ ($\ni g$: generator) が $g(B_1 B_2 \cdots B_{2n}) = B_2 B_3 \cdots B_{2n} B_1$ で作用．word $W = B_1 B_2 \cdots B_{2n}$ が次を満たすとき primitive と呼ぶ．

$$g^k(B_1 B_2 \cdots B_{2n}) \neq B_1 B_2 \cdots B_{2n} \quad \text{for} \quad 1 \leqq k \lneqq 2n.$$

任意の word は primitive word の巾となる。又 W_{2n}° で W_{2n} 中の primitive word からなる subset を表す．$^{\#}|W_{2n}| = \binom{2n}{n}$ より Möbius の反転公式を用いると

$$f(n) = {}^{\#}|W_{2n}^{\circ}| = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\binom{2d}{d},$$

$$g(n) = {}^{\#}\left|W_{2n}^{\circ}/\mathcal{C}_{2n}\right| = \frac{f(n)}{2n}$$

となる．例ば

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(n)$	1	1	3	8	25	75	245	800	2,700	9,225

PとQを無限次行列で表現する.

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & -1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \end{pmatrix},$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & aq & & & \\ & 0 & aq^2 & & \\ & & 0 & aq^3 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

従って $A(a,q) = I + \hat{P} + \hat{Q}$ となる. 又 $W = B_1 B_2 \cdots B_{2n} \in W_{2m}$ に対しても $\hat{W} = \hat{B_1}\hat{B_2}\cdots\hat{B_{2n}}$ とする. $\hat{W}$ は次の形をした行列であることに注意しよう.

対角

$$\begin{pmatrix} \overbrace{0 & & }^{s\text{個ゼロ}} & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & cq^n & & \\ & & & & & cq^{2n} & \\ & & & & & & cq^{3n} \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} = [s;\ c,\ q^n] \text{ とかく.}$$

初項 $c \neq 0$, 公比 q^n の等比数列

次の2つの写像は共に類関数となる.

$$\mathrm{trace} : W = B_1 B_2 \cdots B_{2m} \in W_{2m} \longrightarrow \underset{\left(\frac{c}{1-q^n}\right)}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{trace}\, \hat{W}}} \in \mathbb{C},$$

$$\mathrm{I.T.}: W = B_1B_2\cdots B_{2n} \in W_{2n} \longrightarrow \mathrm{I.T.}(\hat{W}) \in \mathbb{C}.$$
$$(\overset{\shortparallel}{c})$$

従って $\mathrm{trace}: \underset{W^0_{2n}/e_{2n}}{\overset{\cup}{W_{2n}/e_{2n}}} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{I.T.}: \begin{array}{ccc} W_{2n}/e_{2n} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [W] & \longrightarrow & \mathrm{I.T.}[W] \end{array}$

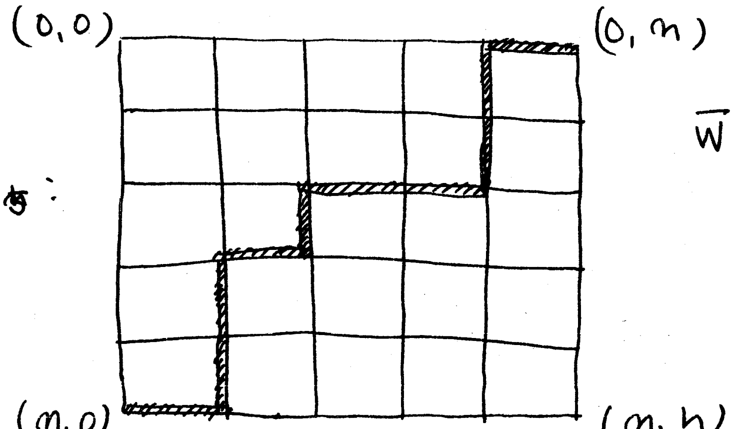
が well-defined. (註 原論文では $\mathrm{trace}[W] = |[W]| \times \mathrm{trace}\, W$ と定義しているが $|[W]|$ の部分はとった方がよい).

$\boxed{\mathrm{I.T.}[W] \text{ の計算法}}$

以上の説明により $\boxed{\text{定理 1.}}$ の意味は理解されたと思う。残る問題は I.T.[W] を効率よく計算するかということである。最も望ましいのは simultaneously な計算法であり、Rogers-Ramanujan 恒等式の完全な一般化ができたことになる。残念ながら現段階ではそれは求まっていない。しかし以下に述べるように Young 図形を用いた効率のよい algorithm がある。論文[2] 参照。

$n \times n$ 正方格子 L_n をとり下のように座標を入れる。

L_5:



$$\overline{W} = \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{Q}\,\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{P}\,\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{Q}\,\overline{P},$$

文字Pに対し右への1-step $\overline{P}$，文字Qに対し上への1-step $\overline{Q}$ を対応させる。すると $W=B_1B_2\cdots B_{2n}\in W_{2n}$ に対し $(n,0)$ から出発し $(0,n)$ に $2n$ stepsで達する $\underbrace{\text{path が}}_{\overline{W}=\overline{B}_1\overline{B}_2\cdots\overline{B}_{2n}}$ 一意に対応する。$\overline{W}$ と上辺と左辺で囲まれた部分はYoung図形とみなせる。そこで次のように定義する。

$$F(W)= W=B_1\cdots B_{2n} \text{ に対応したYoung図形のboxの数}$$

$$F([W])=\min\left\{F(W_i^{\ast}) \,\middle|\, \begin{array}{l} W_i=g^iW=B_{i+1}B_{i+2}\cdots B_i\in[W] \\ 0\leqq i\leqq 2n \end{array}\right\}.$$

次が成立。

$\boxed{\text{定理 2}}$ path $\overline{W}=\overline{B}_1\overline{B}_2\cdots\overline{B}_{2n}$ の subpath $\overline{B}_1\overline{B}_2\cdots\overline{B}_i$，$1\leqq i\leqq 2n$，の終点の座標を (a_i,b_i) とおくと

$$F(W_i)-F(W)=n\{n-(a_i+b_i)\}.$$

$\boxed{\text{定理 3.}}$ 上と同様の仮定のもとで

$$F([W])=F(W)-sn.$$

ここで $s=\max\{a_i+b_i-n \mid 0\leqq i\leqq 2n\}$.

$\boxed{\text{定理 4.}}$ $W=B_1B_2\cdots B_{2n}\in W_{2n}$ に対し

1) $\hat{W}=[s;(-1)^n a^n q^d, q^n]$,

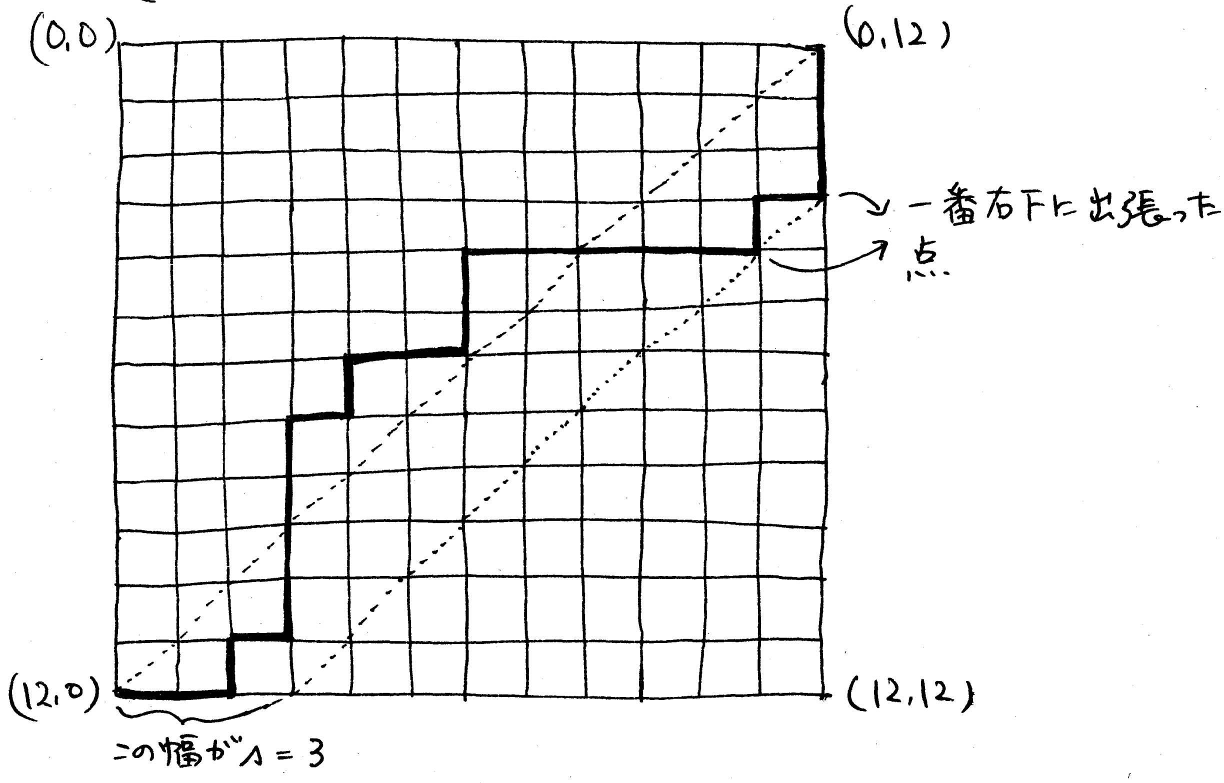
2) $\mathrm{I.T.}[W]=(-1)^n a^n q^d$,

ここで s は $\boxed{\text{定理 3}}$ と同じ．$d=\dfrac{n(n+1)}{2}-F([W])$.

このほかに $2\times n$ の standard Young tableau を使って I.T.[W] を計算する方法があるが [2] を参照して下さい。ただし本質的には $\boxed{\text{定理4}}$ の方法と同じ。上の結果を例を使って説明すると次のようになる。

$\boxed{\text{例}}$ $W = PPQPQQQQPQPPQQPPPPPQPQQ$

$(n=12)$



$F(W) = 77, \quad s = 3$

$F([W]) = 77 - 3\times 12 = 41$

$d = \dfrac{12\times 13}{2} - 41 = 37$

$\hat{W} = [3\,;\ a^{12}q^{37},\ q^{12}]$

$\text{I.T.}[W] = a^{12}q^{37}.$

今の場合　$F([W]) = F(W_{19}) = F(W_{21})$.

$\boxed{\text{予想}}$ 3 page の計算結果で $(-a^k q^l; q^k)_\infty$ を $(a^{2k} q^{2l}; q^{2k})_\infty / (a^k q^l; q^k)_\infty$ で置き換えマイナス(−)の符号をなくすと不思議なことに次の様な現象が起きていることに気がつく.

<u>例えば</u>

$k=3$ で

$$(a^3 q^4; q^3)_\infty (a^3 q^5; q^3)_\infty (a^3 q^6; q^3)_\infty = (a^3 q^4; q)_\infty$$

$k=4$ で

$$(a^4 q^5; q^4)_\infty (a^4 q^6; q^4)_\infty (a^4 q^7; q^4)_\infty^2 (a^4 q^8; q^4)_\infty^2$$
$$\times (a^4 q^9; q^4)_\infty (a^4 q^{10}; q^4)_\infty = (a^4 q^5; \underline{\underline{q}})_\infty (a^4 q^7; \underline{\underline{q}})_\infty$$

と modulous が q の factor の積になる.　→ modulus.

実際3 page の式は次のようになっている.

$$|A(a,q)| = \frac{S}{T},$$

$$S = (a^2 q^2; q)_\infty (a^4 q^5; q)_\infty (a^4 q^7; q)_\infty (a^6 q^7; q)_\infty$$
$$\times (a^6 q^8; q)_\infty^2 (a^6 q^9; q)_\infty (a^6 q^{10}; q)_\infty^3 (a^6 q^{11}; q)_\infty$$
$$\times (a^6 q^{12}; q)_\infty^2 (a^6 q^{13}; q)_\infty (a^6 q^{14}; q)_\infty (a^6 q^{16}; q)_\infty$$
$$\times (a^8 q^9; q)_\infty (a^8 q^{10}; q)_\infty^2 (a^8 q^{11}; q)_\infty^5 (a^8 q^{12}; q)_\infty^6$$
$$\times (a^8 q^{13}; q)_\infty^9 (a^8 q^{14}; q)_\infty^8 (a^8 q^{15}; q)_\infty^{11} (a^8 q^{16}; q)_\infty^8$$
$$\times (a^8 q^{17}; q)_\infty^{10} (a^8 q^{18}; q)_\infty^9 (a^8 q^{19}; q)_\infty^8 (a^8 q^{20}; q)_\infty^5$$

$$\times (a^8q^{21};q)_\infty^6 (a^8q^{22};q)_\infty^3 (a^8q^{23};q)_\infty^4 (a^8q^{24};q)_\infty^2$$
$$\times (a^8q^{25};q)_\infty^2 (a^8q^{26};q)_\infty (a^8q^{27};q)_\infty (a^8q^{29};q)_\infty$$
$$\times \cdots,$$

$$T = (aq;q)_\infty (a^3q^4;q)_\infty (a^5q^6;q)_\infty (a^5q^7;q)_\infty$$
$$\times (a^5q^8;q)_\infty (a^5q^9;q)_\infty (a^5q^{11};q)_\infty (a^7q^8;q)_\infty$$
$$\times (a^7q^9;q)_\infty^2 (a^7q^{10};q)_\infty^3 (a^7q^{11};q)_\infty^4 (a^7q^{12};q)_\infty^4$$
$$\times (a^7q^{13};q)_\infty^4 (a^7q^{14};q)_\infty^4 (a^7q^{15};q)_\infty^3 (a^7q^{16};q)_\infty^3$$
$$\times (a^7q^{17};q)_\infty^2 (a^7q^{18};q)_\infty^2 (a^7q^{19};q)_\infty (a^7q^{20};q)_\infty$$
$$\times (a^7q^{22};q)_\infty \times \cdots.$$

そこで次を予想として提出する。

予想 行列式 $|A(a,q)|$ は modulus q の型の factor $(a^kq^l;q)_\infty$ の無限個の積として表すことができる2つの関数 S, T の商 S/T として表わされる。

実際次の numerical な命題が成立している.

$\boxed{\text{命題}}$ $g(n) = \dfrac{f(n)}{2n}$ は次の congruence を満たす.

1) $g(n) \equiv 0 \pmod{n}$ if n : odd

2) $g(n) \equiv 0 \pmod{n}$ if $n = 2m$ even で m も even

3) $g(m) + g(2m) \pmod{n}$ if $n = 2m$ even で m は odd.

書き残したことを以下列記する。

1) 定理1の結果は対角線方向に減少する幾何級数を成分に持った無限次行列の行列式に対し容易に一般化できる。

2) 集合 W_{2n}/C_{2n} は p に対し○(白丸) q に対し●(黒丸)を対応させると白丸 n 個, 黒丸 n 個よりなる necklace の集合とみなせる。特に W^0_{2n}/C_{2n} はその中の primitive な necklace の集合とみなせる。

3) $k=9$ の場合の計算結果は次のようなので付け足してほしい。

$$
\begin{aligned}
&(-a^9q^{10};q^9)_\infty(-a^9q^{11};q^9)_\infty^{4}(-a^9q^{12};q^9)_\infty^{10}(-a^9q^{13};q^9)_\infty^{21}\\
&\times(-a^9q^{14};q^9)_\infty^{36}(-a^9q^{15};q^9)_\infty^{54}(-a^9q^{16};q^9)_\infty^{76}(-a^9q^{17};q^9)_\infty^{99}\\
&\times(-a^9q^{18};q^9)_\infty^{122}(-a^9q^{19};q^9)_\infty^{145}(-a^9q^{20};q^9)_\infty^{164}(-a^9q^{21};q^9)_\infty^{179}\\
&\times(-a^9q^{22};q^9)_\infty^{187}(-a^9q^{23};q^9)_\infty^{189}(-a^9q^{24};q^9)_\infty^{185}(-a^9q^{25};q^9)_\infty^{177}\\
&\times(-a^9q^{26};q^9)_\infty^{164}(-a^9q^{27};q^9)_\infty^{150}(-a^9q^{28};q^9)_\infty^{133}(-a^9q^{29};q^9)_\infty^{117}\\
&\times(-a^9q^{30};q^9)_\infty^{100}(-a^9q^{31};q^9)_\infty^{85}(-a^9q^{32};q^9)_\infty^{70}(-a^9q^{33};q^9)_\infty^{58}\\
&\times(-a^9q^{34};q^9)_\infty^{45}(-a^9q^{35};q^9)_\infty^{36}(-a^9q^{36};q^9)_\infty^{27}(-a^9q^{37};q^9)_\infty^{21}\\
&\times(-a^9q^{38};q^9)_\infty^{15}(-a^9q^{39};q^9)_\infty^{11}(-a^9q^{40};q^9)_\infty^{7}(-a^9q^{41};q^9)_\infty^{5}\\
&\times(-a^9q^{42};q^9)_\infty^{3}(-a^9q^{43};q^9)_\infty^{2}(-a^9q^{44};q^9)_\infty(-a^9q^{45};q^9)_\infty\\
&\times\cdots,
\end{aligned}
$$

Tの続き

$$\times(a^9q^{10};q)_\infty(a^9q^{11};q)_\infty^3(a^9q^{12};q)_\infty^6(a^9q^{13};q)_\infty^{11}$$
$$\times(a^9q^{14};q)_\infty^{15}(a^9q^{15};q)_\infty^{18}(a^9q^{16};q)_\infty^{22}(a^9q^{17};q)_\infty^{23}$$
$$\times(a^9q^{18};q)_\infty^{23}(a^9q^{19};q)_\infty^{24}(a^9q^{20};q)_\infty^{22}(a^9q^{21};q)_\infty^{21}$$
$$\times(a^9q^{22};q)_\infty^{19}(a^9q^{23};q)_\infty^{17}(a^9q^{24};q)_\infty^{14}(a^9q^{25};q)_\infty^{14}$$
$$\times(a^9q^{26};q)_\infty^{10}(a^9q^{27};q)_\infty^{9}(a^9q^{28};q)_\infty^{7}(a^9q^{29};q)_\infty^{6}$$
$$\times(a^9q^{30};q)_\infty^{4}(a^9q^{31};q)_\infty^{4}(a^9q^{32};q)_\infty^{2}(a^9q^{33};q)_\infty^{2}$$
$$\times(a^9q^{34};q)_\infty(a^9q^{35};q)_\infty(a^9q^{37};q)_\infty\times\cdots\cdots.$$

4) 以後考えることとしては.

i) 予想は正しいと思うが背後にどのような仕組みがあり何を反映しているのだろうか.

ii) $a=1, q$ の時の(originalな) Rogers-Ramanujan 恒等式と予想との関係.

iii) simultatneousな I.T.[W] の計算法はないか.