数理解析研究所講究録
第 735 巻 1990 年 140-156

Weyl群のSpringer表現と hyperplane complementのcohomology

東京理科大 理工 庄司俊明
(Toshiaki Shoji)

§0. 序. Weyl群 W の鏡映に関する hyperplane complement から生じる Poincaré 多項式と, W の Springer 表現との間に奇妙な関係のある事が Spaltenstein [S] により指摘されていた。この Spaltenstein の予想は例外群の場合には, 彼自身により確められていたが, 古典群の場合にはまだ未確認だった。ここでは, 予想が古典群(D_{2n+1} 型を除いて)の場合にも成立する事を報告したい。以下は. G. I. Lehrer との共同研究である。

§1. Hyperplane complement の cohomology.
W を Euclid 空間 $V_{\mathbb{R}}$ 上に実現された有限 Coxeter 群とし, $V = V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ をその複素化とする。$\mathcal{A}$ を W の鏡映から生じる V の(複素化された)超平面全体の集合とし, V の hyperplane complement $M = V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ を考える。

$$P_M(t) = \sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{C}} H^i(M, \mathbb{C}) t^i$$

をMのPoincaré多項式とする。次の事実は古典的である。

定理 1.1. (Arnold, Brieskorn)

$$P_M(t) = \sum_{w \in W} t^{n(w)} = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + m_i t),$$

但し，$\ell = \dim V$，$m_1, m_2, \cdots, m_\ell$ は W の exponents，$n(w)$ は w を鏡映の積として書いた時の最小個数（$= \mathrm{rank}(w-1)$）である。

上の定理は，Orlik-Solomon により次の様に一般化された。X を $\mathcal{A}$ に含まれる超平面いくつかの共通部分として得られる V の部分空間とする。X の超平面 $\mathcal{A}_X$ を

$$\mathcal{A}_X = \{ H \cap X \mid H \in \mathcal{A},\ H \cap X \subsetneqq X \}$$

で定義する。$M_X = X - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_X} H$ とおき，M_X の Poincaré 多項式 $P_{M_X}(t)$ を考える。この時，

定理 1.2. (Orlik-Solomon [OS])

$$P_{M_X}(t) = \prod_{i=1}^{k} (1 + m_i(X) t)$$

と表せる。但し，$k = \dim X$，$m_1(X), \cdots, m_k(X)$ は正の整数。

注意. Orlik-Solomon は，各 X に対し $P_{M_X}(t)$ を計算し定理を得た。$m_1(X), \cdots, m_\ell(X)$ の意味ははっきりしない。寺尾[T]の結果によれば，$\mathcal{A}_X$ が X の free arrangement になる場合には，M_X の Poincaré 多項式は一次式の積に分解し，$\{m_i(X)\}$ は $\mathcal{A}_X$ に対応する generalized exponents に一致する事が分っている。上の場合の多くの X に対し，$\mathcal{A}_X$ が free arrangement になる事が確められているが，すべてそうなるかどうかはまだ分っていない。

§2. Spaltenstein の予想

G を複素 reductive Lie 群，B を G の Borel 部分群，W を G の Weyl 群とする。G の unipotent 元 u に対して

$$\mathcal{B}_u = \{ gB \in G/B \mid g^{-1}ug \in B \}$$

とおく。$\mathcal{B}_u$ は $\mathcal{B} = G/B$ の closed subvariety になる。Springer により $\mathcal{B}_u$ の cohomology $H^i(\mathcal{B}_u, \mathbb{C})$ 上に W の表現が定義されている。これを W の Springer 表現と言う。W の Springer 表現は，有限体上定義された reductive 代数群に対しても，ℓ-adic cohomology を使って構成できる。それは有限代数群の Deligne-Lusztig の virtual character と密接に関係している。即ち，G を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された連結 reductive 代数群，

$F: G \to G$ を対応する Frobenius map, $G^F = G(\mathbb{F}_q)$ を F の固定点からなる有限群とする。G の F-stable な maximal torus T, $\theta: T^F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ に対し G^F の Deligne-Lusztig virtual character $R_T^G(\theta)$ が構成される。但し，$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は ℓ-進数体 $\mathbb{Q}_\ell$ の代数的閉包，$(\ell \neq ch(\mathbb{F}_q))$ である。G^F_{uni} を G^F の unipotent 元全体の集合とすると，$R_T^G(\theta)|G^F_{uni}$ は θ によらない。G^F_{uni} 上の類関数 $Q_T^G = R_T^G(\theta)|G^F_{uni}$ を G の T に関する Green 関数という。次の事実が知られている。

<u>定理</u> 2.1. (Springer, Kazhdan)　G を $\mathbb{F}_q$ 上 split type, $p = ch(\mathbb{F}_q)$, q は十分大きいと仮定する。この時 G^F_{uni} の各共役類 (in G) に"良い"代表元 u が選べ，

$$Q_{T_w}^G(u) = \sum_{i \geq 0} \mathrm{Tr}(w, H^{2i}(\mathcal{B}_u, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))\, q^i$$

と表わせる。但し T_w は $w \in W$ に対応する G の F-stable な maximal torus である。

<u>注意</u>. $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ のいずれの場合にも，$\mathcal{B}_u$ の odd cohomology は 0 になる事が知られている。E_8 の場合，上の"良い"代表元の取り方には，q に少し条件がつく。

再び $G/\mathbb{C}$ に戻る。Springer－Kazhdan の定理を踏まえて，形式的に G の unipotent 元 u に対し，

$$Q_u(w) = \sum_{i\geq 0} \mathrm{Tr}(w, H^{2i}(\mathcal{B}_u, \mathbb{C}))t^i$$

とおく。$w \in W$ を動かす事により Q_u は係数が W の指標環 $\mathcal{R}(W)$ にある多項式環 $\mathcal{R}(W)[t]$ の元とみなす事ができる。

以上の準備のもとに Spaltenstein の予想を述べる。今 Δ を G の maximal torus T に対応する root 系，$\Pi \subset \Delta$ を simple root 系とする。Weyl 群 $W = N_G(T)/T$ は $V = \mathrm{Lie}\, T$ 上に鏡映群（その複素化）として実現できる。各 $J \subset \Pi$ に対し，$X = X_J$ を $X_J = \bigcap_{\alpha \in J} H_\alpha$ で定義する。但し，H_α は鏡映 $r_\alpha \in W$ に関する V の超平面である。Orlik－Solomon の結果より

$$P_{M_{X_J}}(t) = \prod_{i=1}^{k} (1 + m_i(X_J)t)$$

と分解できる。

一方，P_J を type J の G の parabolic subgroup，L_J を P_J の Levi subgroup とする。（L_J の simple root 系は J で与えられる。）L_J の regular unipotent element を u_J とし，"Green 関数" Q_{u_J} を考える。この時

予想 2.2. (Spaltenstein)

$$\langle Q_{u_J}, \rho \rangle_W = \sum_{i=1}^{k} t^{m_i(X_J)},$$

但し，ρ は W の reflection character，$\langle\ ,\ \rangle_W$ は W の指標に関する内積である。

注意 (i). $J=\phi$ (空集合) の場合は，$u_J=1$ で $Q_{u_J}=Q_1=\sum_{i\geq 0} H^{2i}(\mathcal{B},\mathbb{C})t^i$ となる。又，graded W-module として，$\oplus H^{2i}(\mathcal{B},\mathbb{C})$ は $S(V^*)/I$ と同型になる事が知られている。ここに，$S(V^*)$ は V 上の polynomial functions の algebra，I は定数項を持たない W-不変な polynomial functions で生成された $S(V^*)$ の ideal である。一方この場合，$X_J=V$ で $\{m_i(X_J)\}=\{m_i\}$ は Weyl 群の exponents である。この場合に予想の成立する事は，知られていた。

(ii). 有限体上の代数群に対して，Green 関数 $Q^G_{T_w}$ を計算する algorithm が存在する。特に例外群に対しては $Q^G_{T_w}$ は全て計算され，Green 関数の表が出来ている。この表を使って，個々の $H^i(\mathcal{B}_u,\mathbb{C})$ への Springer 表現は，完全に決定される。又，$m_i(X_J)$ は Orlik-Solomon により全て与えられているので，これらにより予想を例外群の場合に検証する事は可能である。実際 Spaltenstein は例外群の場合に確め

る事により上述の予想に到達した。しかしGreen関数を計算するalgorithmは、Springer表現の個々の情報，例えば$H^{2i}(\mathcal{B}_u,\mathbb{C})$における$\rho$の重複度などについては、無力である。全てのGreen関数を計算して始めて全てのSpringer表現が分り，従ってρの重複度も計算できるわけだが、これでは、古典群に関しては役に立たない。直接ρの重複度を計算する工夫が必要になる。

我々の結果は，

定理 2.3. (Lehrer－Shoji [LS]) GをA_n型，B_n型，C_n型，およびD_{2n}型のいずれかとする。この時予想は成立する。

注意. D_{2n+1}型の場合は，まだ分っていない。以下の証明は，個々の場合にρの$H^{2i}(\mathcal{B}_u,\mathbb{C})$における重複度を計算して，Orlik-Solomonの結果と比較する事により得られる。Case-by-caseの検証によらない一般的な証明が望まれる。

§3. 証明の概略.

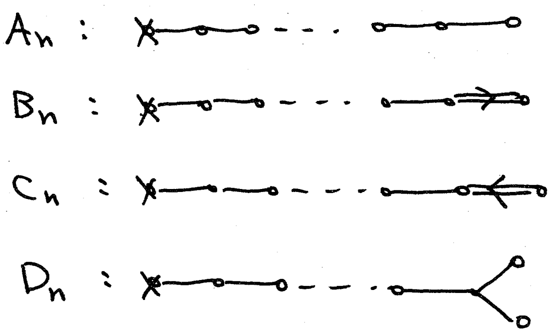
それぞれの場合に、ρと$H^{2i}(\mathcal{B}_u)=H^{2i}(\mathcal{B}_u,\mathbb{C})$との重複度を計算する事が目標である。先ず、次の定理が出発点である。

定理3.1. (Borho-MacPherson) PをGのparabolic subgroup, W_Pを対応するWのWeyl subgroupとする。Gのunipotent元uに対し, $\mathcal{P}_u = \{ gP \in G/P \mid g^{-1}ug \in P \}$とおく。この時

$$H^i(\mathcal{B}_u, \mathbb{C})^{W_P} \simeq H^i(\mathcal{P}_u, \mathbb{C}),$$

但し, 左辺は$H^i(\mathcal{B}_u, \mathbb{C})$の$W_P$-fixed point subspaceを意味する。

以下では, 次の様にDynkin図形から1頂点を除いて得られるmaximal parabolic subgroup Pを考える。



この時, 次の事実は容易に分る。

(3.2)
$$1_{W_P}^{W} = \begin{cases} 1 + \rho & W : A_n\text{型の場合}. \\ 1 + \rho + \xi & W : B_n, C_n, D_n\text{型の場合}. \end{cases}$$

但し, ρはWのreflection表現, ξはYoung図形 $(\square\!\square\!\square, \phi)$に対応する $\deg \xi = n-1$ の既約表現である。(ρは$(\square\!\square\!\square, \square)$

に対応し，$\deg \rho = n$ である。）

所で一般に，$i=0$ の時 $H^0(\mathcal{B}_u) \simeq 1_W$，$i>0$ の時 $\langle H^i(\mathcal{B}_u), 1_W \rangle_W = 0$ となる事が知られている。従って Frobenius の相互律により

(3.3) $i>0$ に対し

$$\dim H^{2i}(\mathcal{P}_u) = \begin{cases} \langle \rho, H^{2i}(\mathcal{B}_u) \rangle_W & A_n \text{型} \\ \langle \rho + \xi, H^{2i}(\mathcal{B}_u) \rangle_W & B_n, C_n, D_n \text{型}. \end{cases}$$

となる事が分る。A_n 型の場合には (3.3) から直ちに ρ の重複度が計算できる。実際，この場合 $\mathcal{P}_u \simeq \mathbb{P}(\mathrm{Ker}(u-1))$，射影空間であり，良く知られている様に

$$H^{2i}(\mathcal{P}_u) = \begin{cases} \mathbb{C} & i=0,1,\cdots,\dim \mathcal{P}_u \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

従って，

$$\langle \rho, Q_u \rangle_W = t + t^2 + \cdots + t^{\dim \mathcal{P}_u}$$

を得る。

他の場合にも $H^{2i}(\mathcal{P}_u)$ を計算する事により $\rho+\xi$ と $H^{2i}(\mathcal{B}_u)$ との内積は計算できる。しかし定理を示す為には ρ と ξ を分離する必要がある。その為に $H^{2i}(\mathcal{B}_u)$ を $\overline{W}$-module $H^{2i}(\mathcal{B})$ と

比較する事を考える。自然な埋め込み $\iota: \mathcal{B}_u \hookrightarrow \mathcal{B}$ より $\iota^*: H^{2i}(\mathcal{B}) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{B}_u)$ が誘導されるが，ι^* は W-equivariant になる事が分っている。又，$j: \mathcal{P}_u \hookrightarrow \mathcal{P}$ より $j^*: H^{2i}(\mathcal{P}) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{P}_u)$ が導かれる。一方，自然な写像 $G/B \longrightarrow G/P$ より $p_u: \mathcal{B}_u \longrightarrow \mathcal{P}_u$ が定義され，$p_u^*: H^{2i}(\mathcal{P}_u) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{B}_u)$ を得る。次の命題は Borho-MacPherson の定理（定理3.1）の精密化である。

<u>命題</u>3.4. p_u^* により $H^{2i}(\mathcal{P}_u) \xrightarrow{\sim} H^{2i}(\mathcal{B}_u)^{W_P}$ が誘導され次の図式は可換になる。

$$
\begin{array}{ccc}
H^{2i}(\mathcal{B})^{W_P} & \xrightarrow{\ \iota^*\ } & H^{2i}(\mathcal{B}_u)^{W_P} \\
{\scriptstyle p_1^*}\ \wr\uparrow & & \uparrow\wr\ {\scriptstyle p_u^*} \\
H^{2i}(\mathcal{P}) & \xrightarrow{\ j^*\ } & H^{2i}(\mathcal{P}_u)
\end{array} .
$$

次の Lemma は命題3.4より直ちに得られる。（以下では，W-module V の ρ,ξ-isotypic part を $V_{\rho,\xi}$ で表わす事にする。）

<u>Lemma</u> 3.5. ある $i>0$ に対し，$j^*: H^{2i}(\mathcal{P}) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{P}_u)$ は全射であり，$H^{2i}(\mathcal{B})_{\rho,\xi} = H^{2i}(\mathcal{B})_\chi$ $(\chi \in \{\rho,\xi\})$ と仮定する。（即ち，$H^{2i}(\mathcal{B})_{\rho,\xi}$ は．ρ 又は ξ のどちらか一方のみ）。
この時．$H^{2i}(\mathcal{B}_u)_{\rho,\xi} = H^{2i}(\mathcal{B}_u)_\chi$ であり，

$$\dim H^{2i}(\mathcal{B}_u)_\chi = \dim H^{2i}(\mathcal{P}_u).$$

実際、仮定より $H^{2i}(\mathcal{B})_{\rho,\xi} \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{B}_u)_{\rho,\xi}$ は全射となり、従って Lemma が成立する。

所で、W-module $\bigoplus H^{2i}(\mathcal{B})$ の構造は §2 の注意に述べた様によく知られている。そこで、$H^{2i}(\mathcal{B})$ に $1, \rho, \xi$ の現われる pattern を表にすると次の様になる。

$H^*(\mathcal{B})$の次数	0	1	2	3	・	・・・	$2n-2$	$2n-1$
B_n型, C_n型	1	ρ	ξ	ρ	・・・・・		ξ	ρ

	0	1	2	・・・・	$2n-2$	$2n-1$	$2n$	・・・	$4n-3$	$4n-2$
D_{2n}型	1	ρ	ξ	・・・・	ξ	2ρ	ξ	・・・	ρ	ξ

	0	1	2	・・・・	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	・・・	$4n-1$	$4n$
D_{2n+1}型	1	ρ	ξ	・・・・	ρ	$\rho+\xi$	ρ	・・・	ρ	ξ

これより Lemma 3.5 の2番目の仮定に関して次が成り立つ。

(3.6.) (i) G が B_n, C_n, D_{2n} 型の時、全ての $i>0$ に対し Lemma 3.5 の仮定が満される。

(ii) G が D_{2n+1} 型の場合、$i=2n$ (この時 $H^{2i}(\mathcal{B})_{\rho,\xi} = \rho+\xi$) を除いて Lemma 3.5 の仮定が満たされる。

Lemma 3.5 の最初の仮定については，次が成り立つ。

<u>命題</u> 3.7. (i) G が C_n 型の時，各 u に対し，$j^*: H^{2i}(\mathcal{P}) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{P}_u)$ は全ての $i \geq 0$ について，全射．

(ii) G が B_n, D_n 型の時，各 u に対し，j^* は高々1個の i を除いて全射．

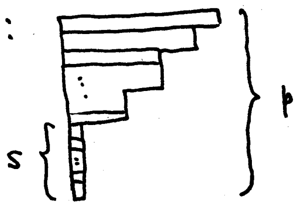
<u>注意</u> (i). 命題3.7の証明は，cohomology の完全列

$$0 \longrightarrow H_c^{2i}(\mathcal{P}-\mathcal{P}_u) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{P}) \longrightarrow H^{2i}(\mathcal{P}_u) \longrightarrow H_c^{2i+1}(\mathcal{P}-\mathcal{P}_u) \longrightarrow 0$$

を通じて，$H_c^{2i+1}(\mathcal{P}-\mathcal{P}_u)=0$ を示す事により得られる。又，Lemma 3.5 を適用して ρ の重複度を求める為には $H^{2i}(\mathcal{P}_u)$ の次元の決定が必要になる。つまり我々の方針は，ρ の重複度の決定に，$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_u$, $\mathcal{P}-\mathcal{P}_u$ の cohomology の計算を利用する事にある。

(ii). 命題3.7の(ii)で除外される i は次の通りである。$G=SO_N(\mathbb{C})$ を $GL_N(\mathbb{C})$ に埋め込み，unipotent な u を Jordan 標準形により $u=u_\lambda$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$, $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_p>0$ と N の partition で表わす。今 s を $\lambda_i=1$ となる i の個数とする。即ち，

$u = u_\lambda$, λ :



この時, G: B_n型 ($N=2n+1$) ならば p は奇数, G: D_n型 ($N=2n$) ならば p は偶数である。いずれの場合も,

s : 奇数 $\Longrightarrow$ j^* は全ての i に対して全射

s : 偶数 $\Longrightarrow$ j^* は $i = p - \frac{s}{2} - 1$ の時全射ではなく, その他の i に対しては全射.

である。

以上の議論をまとめると, $\mathfrak{P}_u$ の cohomology を計算する事により次の事実が示される。ここまでの議論は任意の unipotent 元 (即ち, $u = u_J$ とならないものも含めて) で成立する事に注意する。

(3.8.) 任意の unipotent 元 u に対し, ρ の $H^{2i}(\mathcal{B}_u)$ における重複度は, 以下の場合に計算できる。

- C_n型 …… 全ての i.
- B_n, D_{2n}型 … 高々1個の i を除いて全ての i.
- D_{2n+1}型 …… 高々2個の i を除いて全ての i.

C_n型に関しては，(3.8)より直ちに定理が得られる。B_n，D_{2n}型の場合もう1つ情報があれば残りのiも決める事が出来る。実際$u=u_J$については次の事実が知られている。

<u>定理</u>3.9.（Alvis-Lusztig）Gをreductive群，$u=u_J$をL_Jのregular unipotent elementとする。この時

$$\bigoplus_{i\geq 0} H^{2i}(\mathcal{B}_u) \simeq \mathrm{Ind}_{W_J}^{W} 1 .$$

この定理により，B_n，D_{2n}型の場合，$u=u_J$については残りのiに対してもρの重複度が計算でき，定理を得る。D_{2m+1}型の場合には，まだ不定性が残ってしまう。

参考までに以下に各$X=X_J$に対応する$\{m_i(X_J)\}$を記しておく。

A_n型：　$\{1, 2, \cdots, n-|J|\}$

B_n型：　$\{1, 3, 5, \cdots, 2n-2|J|-1\}$

D_n型：　$\{1, 3, 5, \cdots, 2n-2|J|-1\}$

（JがD_m型$(m\geq 2)$の成分を持つ場合）

〃　：　$\{1, 3, 5, \cdots 2n-2|J|-3, k+n-|J|-1\}$

（JがA型のk個の成分から成る場合）.

この表から分る様に，A_n型，B_n型に対応する$\{m_i(X_J)\}$はそれぞれ$A_{n-|J|}$，$B_{n-|J|}$型のWeyl群のexponentsに一致する。実際これらの場合$\mathcal{A}_X$はrank $n-|J|$のWeyl群W'のCoxeter arrangement（即ちW'に対応する$\mathcal{A}$）に一致している。しかし，D型の場合，$\mathcal{A}_X$はCoxeter arrangementにはならない。

注意．定理3.9は$u=u_J$に対してしか適用できないが，Green関数の"Ennola duality"を使う事により実はB_n，D_{2n}型の場合，全てのuに対してρの重複度を計算する事が出来る。Ennola dualityはGreen関数をqの多項式としてみて$-q$を代入した結果を記述するもので，例えばA_n型に対しては

$$Q^{G^+}_{T_w}(u)(q) = Q^{G^-}_{T_{ww_0}}(u)(-q)$$

と表わされる。但し，左辺は$GL_n(\mathbb{F}_q)$に対するqの多項式としてみたGreen関数，右辺は$U_n(\mathbb{F}_{q^2})$のGreen関数である。又$w_0\in W$は最長元を表わす。同様の$q\leftrightarrow -q$に関する等式は，より複雑な形ではあるが全ての群に対して成立し，B_n，C_n，D_{2n}型の場合はGの"inner duality"を与え，D_{2n+1}型の場合は．A_n型と同様に$G^+\leftrightarrow G^-$のdualityを与える。所でGのinner duality $q\leftrightarrow -q$は．WのSpringer表現に

一種の parity の条件を与える。（例えば，B_n, C_n, D_{2n} 型の場合，ρ の $H^*(\mathcal{B})$ に表われる次数は常に奇数，ξ は常に偶数（3.5の表参照）。）これにより定理3.9を使わずに残りの i の場合を決定する事が出来る。この場合でも，D_{2n+1} 型は除外される事に注意する。以下に C_n 型の場合を含めて，ρ と ξ の $H^*(\mathcal{B}_u)$ における重複度を Q_u との内積の形で表にしておく。各場合を通じて $u=u_\lambda$, $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$, $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_p>0$ と表わす。又，s は命題3.7の後の注意(ii)と同様である。

<u>B_n 型，D_{2n} 型.</u>

(a) s：奇数の場合

$$B_n\text{型}:\quad\begin{cases}\langle Q_{u_\lambda},\rho\rangle = q+q^3+\cdots+q^{p-2}\\ \langle Q_{u_\lambda},\xi\rangle = q^2+q^4+\cdots+q^{p-3}\end{cases}$$

$$D_{2n}\text{型}:\quad\begin{cases}\langle Q_{u_\lambda},\rho\rangle = q+q^3+\cdots+q^{p-3}\\ \langle Q_{u_\lambda},\xi\rangle = q^2+q^4+\cdots+q^{p-2}\end{cases}$$

(b) s：偶数の場合

$$B_n\text{型}:\quad\begin{cases}\langle Q_{u_\lambda},\rho\rangle = q+q^3+\cdots+q^{p-2}\\ \langle Q_{u_\lambda},\xi\rangle = q^2+q^4+\cdots+q^{p-3}+q^{p-s/2-1}\end{cases}$$

$$D_{2n}\text{型}:\quad\begin{cases}\langle Q_{u_\lambda},\rho\rangle = q+q^3+\cdots+q^{p-3}+q^{p-s/2-1}\\ \langle Q_{u_\lambda},\xi\rangle = q^2+q^4+\cdots+q^{p-2}\end{cases}$$

C_n 型

$$\langle Q_{u_\lambda}, \rho \rangle = \begin{cases} q + q^3 + \cdots + q^{p-1} & p: \text{偶数} \\ q + q^3 + \cdots + q^{p-2} & p: \text{奇数} \end{cases}$$

$$\langle Q_{u_\lambda}, \xi \rangle = \begin{cases} q^2 + q^4 + \cdots + q^{p-2} & p: \text{偶数} \\ q^2 + q^4 + \cdots + q^{p-1} & p: \text{奇数} \end{cases}$$

References

[LS] G. I. Lehrer and T. Shoji; On Flag varieties, Hyperplane complements and Springer representations of Weyl groups. Preprint.

[OS] P. Orlik and L. Solomon; Coxeter arrangements, in Proc. Sympos. Pure Math., 40 (1983), 167–189.

[S] N. Spaltenstein; Contribution to "Open problems in Algebraic groups", Katata, Taniguchi Foundation 1983.

[T] H. Terao; Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepard-Todd-Brieskorn formula, Invent. Math., 63 (1981), 159–179.