数理解析研究所講究録
第735巻 1990年 165-171

単体的凸多面体と Lefschetz の強定理

東北大理　小田忠雄

Tadao Oda

この報告の文献に関する細部以外は城崎シンポジウム報告集掲載のもの [8] と同じである.

r次元実ベクトル空間W内のr次元単体的凸多面体Qを考える. $0 \leq j \leq r-1$ に対し, Q の j次元面の個数を f_jとしたとき, $f = f(Q) := (f_0, \ldots, f_{r-1})$ のことを Q の fベクトルと呼ぶ. さらに $f_{-1} := 1$, $f_r := 1$ とするといろいろ好都合である.

$$h_l := \sum_{j=0}^{l} \binom{r-j}{l-j} (-1)^{l-j} f_{j-1} \qquad (0 \leq l \leq r)$$

としたとき, h ベクトル $h = h(Q) := (h_0, \ldots, h_r)$ は明かに fベクトルと同値な情報を与える. 両者の関係を t 変数の母関数の言葉で表せばもっと簡潔に

$$\sum_{l=0}^{r} h_l t^l = \sum_{j=0}^{r} f_{j-1}(t-1)^{r-j}$$

となる.

$h_r = 1 (= h_0)$ は Euler の関係式の言い替えであるが, もっと一般に **Dehn-Sommerville の等式**

$$h_l = h_{r-l} \qquad (l = 0, 1, \ldots, r)$$

が成立する.

1971 年に McMullen [4] は次のような予想をたてた. すなわち, 与えられた整数列

$$(h_0, \ldots, h_r)$$

がある r次元単体的凸多面体の h ベクトルとなるための必要十分条件は, 上記の Dehn-Sommerville の等式をみたし, さらにある体 k上の次数付き多元環 $R = \bigoplus_{l=0}^{[r/2]} R^l$であって, $R^0 = k$をみたし, かつ k上 R^1で生成されるものが存在して

$$h_l - h_{l-1} = \dim_k R^l \qquad (0 \leq l \leq [r/2])$$

をみたすことである．ただし，$h_{-1} := 0$ とし，$[r/2]$ は $r/2$ 以下の最大の整数である．特に，h ベクトルは単峠的 (unimodal) である．すなわち

$$1 = h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_{[r/2]} = h_{[(r+1)/2]} \geq \cdots \geq h_{r-1} \geq h_r = 1$$

をみたす．

1980 年に，Billera-Lee [1], [2] が十分性を，Stanley [9] が必要性を証明した．

後者の証明は，トーリック多様体の理論を通して代数幾何における Lefschetz の強定理を使用している．もっと初等的な証明があるはずとの McMullen の挑戦を受けて試み始めたのが [5] である．まだ未完成であるが，この方針で証明できるものと期待している．

単体的とは限らない凸多面体の場合には，頂点がすべて有理点なら，h ベクトルはトーリック多様体の交叉コホモロジー群の次元として定義するのが正しいということを Stanley [10] が示している．

単体的な場合の初等的証明の問題は，トーリック多様体の交叉コホモロジー群の初等的計算や，Gelfand, Kapranov, Zelevinskij の最近の結果とも関連が深い (詳細については [6], [7] 参照)．

1 マーク付き単体的完備凸多面錐分割

トーリック多様体の理論に現れる扇の概念から格子の情報や有理性の条件を取り除いたものを考える．

以後，r次元実ベクトル空間 $W \cong \mathbf{R}^r$ を固定する．W内の**凸多面錐**とは，ある $w_1, \ldots, w_s \in W$の非負一次結合全体，すなわち

$$\sigma := \mathbf{R}_{\geq 0} w_1 + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0} w_s$$

と表せる部分集合のことである．ただし，$\mathbf{R}_{\geq 0}$は非負実数の全体を意味する．σの**次元** $\dim \sigma$ とは，σの張る最小の $\mathbf{R}$ 部分空間 $\mathbf{R}\sigma = \sigma + (-\sigma)$ の次元を意味する．$\{w_1, \ldots, w_s\}$ として一次独立なものが選べるとき，σは**単体的**であるという．

Wの双対空間を $Z := \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(W, \mathbf{R})$ とし，双対双一次形式を $\langle\ ,\ \rangle : Z \times W \to \mathbf{R}$ とする．τがσの**面**である ($\tau \prec \sigma$と表記する) とは，ある $z_0 \in Z$が $\langle z_0, w \rangle \geq 0$, $\forall w \in \sigma$かつ $\tau = \sigma \cap \{z_0\}^{\perp}$をみたすことである．

Wの**凸多面錐分割**とは，W内の凸多面錐の有限集合Πであって，次のような性質をみたすものである．

- すべての$\sigma \in \Pi$は**強凸**，すなわち$\sigma \cap (-\sigma) = \{O\}$ をみたす．
- $\sigma \in \Pi$のすべての面τはまたΠに属する．
- $\sigma, \sigma' \in \Pi$の共通集合$\sigma \cap \sigma'$はσおよびσ'の面である．

Πの**台**を$|\Pi| := \bigcup_{\sigma\in\Pi}\sigma$と定義し，$|\Pi| = W$をみたす$\Pi$を**完備**という．また，各$\sigma \in \Pi$が単体的であるとき，$\Pi$を**単体的**という．

$0 \leq j \leq r$に対し，$\Pi(j) := \{\sigma \in \Pi \mid \dim\sigma = j\}$とする．$\Pi$の**マーク付け**とは，各$\rho \in \Pi(1)$内に原点$O$と異なる$w_\rho \in \rho$を指定することである．このとき，$\rho = \mathbf{R}_{\geq 0} w_\rho$となる．

我々にとって重要なのは次の例である．W内のr次元凸多面体Qを考える．適当な平行移動により，原点OがQの内点であると仮定しても一般性を失わない．原点Oを頂点としてQの各面が張る凸多面錐の全体Πは明かにWの完備凸多面錐分割であり，Qの頂点全体の集合$\{w_\rho \mid \rho \in \Pi(1)\}$がそのマーク付けを与える．$Q$が単体的凸多面体なら，$\Pi$は単体的である．$Q$の凸性により，我々は$\Pi$に関して**区分的に線形かつ強凸**であって，各$\rho \in \Pi(1)$に対し$\eta(w_\rho) := 1$をみたす実数値関数$\eta : W \to \mathbf{R}$を得る．すなわち，各$\sigma \in \Pi$に対して$z_\sigma \in Z$が存在し，

$$\eta(w) \geq \langle z_\sigma, w\rangle, \qquad \forall w \in \sigma$$

かつ等号が成立するには$w \in \sigma$が必要十分である．簡単のためηのことを**ゲージ関数**と呼ぶことにしよう．

2 Chow 環

ΠをWのマーク付き単体的完備凸多面錐分割とする．各$\rho \in \Pi(1)$に対する文字x_ρを変数とする多項式環$S := \mathbf{R}[x_\rho \mid \rho \in \Pi(1)]$を通常の次数付きで考えよう．square-free な単項式の集合

$$\{x_{\rho_1}x_{\rho_2}\cdots x_{\rho_s} \mid \rho_1,\ldots,\rho_s \in \Pi(1) \text{ は相異なりかつ } \rho_1 + \cdots + \rho_s \notin \Pi\}$$

で生成されるSのイデアルをIとし，一次形式の集合

$$\left\{\theta(z) := \sum_{\rho\in\Pi(1)} \langle z, w_\rho\rangle x_\rho \;\middle|\; z \in Z\right\}$$

で生成されるイデアルをJとしたとき，A:=S/(I+J) をΠの **Chow 環**と呼ぶ．ちなみに，S/Iは Stanley-Reisner 環と呼ばれる．

$$A = A^0 \oplus A^1 \oplus \cdots \oplus A^l \oplus \cdots \oplus A^r$$

となることが判る．Πが単体的であるから，任意の$\sigma \in \Pi(l)$は相異なる$\rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_l \in \Pi(1)$により$\sigma = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_l$と一通りに書ける．そこで，単項式$x_{\rho_1}x_{\rho_2}\cdots x_{\rho_l}$の$A^l$における像を$v(\sigma)$と書く．特に$v(\{O\}) = 1 \in A^0$である．定義により次のことが判る．

- $A^l = \sum_{\sigma\in\Pi(l)} \mathbf{R}v(\sigma)$.
- 各$z \in Z$に対し一次関係式$\sum_{\rho\in\Pi(1)}\langle z, w_\rho\rangle v(\rho) = 0$が成立する．

- $\sigma, \sigma' \in \Pi$に対し

$$v(\sigma)v(\sigma') = \begin{cases} 0 & \sigma+\sigma' \notin \Pi, \\ v(\sigma+\sigma') & \sigma+\sigma' \in \Pi \text{ かつ } \sigma\cap\sigma' = \{O\}, \\ ? & \text{その他の場合}. \end{cases}$$

Πに関し区分的に線形な関数$\eta : W \to \mathbf{R}$が与えられたときA^1の元$\overline{\eta} := \sum_{\rho\in\Pi(1)} \eta(w_\rho)v(\rho)$が決まる．上記の一次関係式によりすべての$z \in Z$に対し$\overline{\eta+z} = \overline{\eta}$となる．この事実を使うと，$1 \le l \le r$に対し$\overline{\eta}$倍写像$A^{l-1} \to A^l$は，$\tau \in \Pi(l-1)$ に対する$v(\tau) \in A^{l-1}$を

$$\overline{\eta}v(\tau) = \sum_{\rho\in\Pi(1),\ \rho+\tau\in\Pi(l)} (\eta(w_\rho) - \langle z_\tau, w_\rho\rangle)\, v(\rho+\tau)$$

に写すことが判る．ただしz_τはすべての$w \in \tau$に対して$\eta(w) = \langle z_\tau, w\rangle$ をみたすZの適当な元である．特にηがΠに関して強凸であるとき，上記の係数 $(\eta(w_\rho) - \langle z_\tau, w_\rho\rangle)$ は正とできることに注目して頂きたい．

3 石田複体のコホモロジー

完備トーリック多様体Xの場合に正則微分形式の層のコホモロジー$H^j(X, \Omega_X^l)$を記述するのに威力を発揮した石田複体の類似を考える．

ΠをWのマーク付き単体的完備凸多面錐分割とする．各$0 \le l \le r$に対し，石田複体$C^\cdot(\Pi, \mathcal{G}_l)$, δ を

$$\cdots \to C^j(\Pi, \mathcal{G}_l) := \bigoplus_{\sigma\in\Pi(j)} \bigwedge^{l-j} \sigma^\perp \xrightarrow{\delta} C^{j+1}(\Pi, \mathcal{G}_l) := \bigoplus_{\xi\in\Pi(j+1)} \bigwedge^{l-j-1} \xi^\perp \to \cdots$$

とする．ただし，$\sigma \in \Pi(j)$, $\xi \in \Pi(j+1)$ に対して，コバウンダリー写像δの (σ, ξ) 成分は，σがξの面でないとき 0 写像とし，一方$\sigma \prec \xi$のときには，$\xi^\perp := \{z \in Z \mid \langle z, w\rangle = 0,\ \forall w \in \xi\}$が$\sigma^\perp := \{z \in Z \mid \langle z, w\rangle = 0,\ \forall w \in \sigma\}$ の余次元 1 の部分空間となり，かつある$\rho \in \Pi(1)$により$\xi = \rho+\sigma$となるため，$z_1 \in \sigma^\perp \supset \xi^\perp \ni z_2, \ldots, z_{l-j}$に対して$z_1 \wedge z_2 \wedge \cdots \wedge z_{l-j}$を$\langle z_1, w_\rho\rangle z_2 \wedge \cdots \wedge z_{l-j}$に写す写像と定義する．

ことのき，Mayer-Vietoris の定理の一般化および二重複体のスペクトル列により，消滅および双対に関する次の結果を得る．

定理 1 各$0 \le l \le r$に対して

$$H^j(\Pi, \mathcal{G}_l) = \begin{cases} A^l & j = l \\ 0 & j \ne l \end{cases}$$

が成立する．さらに，任意のjおよびlに対して双対性

$$H^j(\Pi, \mathcal{G}_l)^* = \left(\bigwedge^r W\right) \otimes_{\mathbf{R}} H^{r-j}(\Pi, \mathcal{G}_{r-l}).$$

も成立する．ただし$*$は双対空間を意味する．

この定理により完全列

$$0 \to C^0(\Pi, \mathcal{G}_l) \xrightarrow{\delta} C^1(\Pi, \mathcal{G}_l) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C^j(\Pi, \mathcal{G}_l) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C^l(\Pi, \mathcal{G}_l) \to A^l \to 0$$

を得る. 定義により

$$\dim_{\mathbf{R}} C^j(\Pi, \mathcal{G}_l) = \binom{r-j}{l-j} \sharp\Pi(j) \qquad (0 \le j \le l)$$

であるから,

$$h_l := \dim_{\mathbf{R}} A^l = \sum_{j=0}^{l} \binom{r-j}{l-j} (-1)^{l-j} \sharp\Pi(j) \qquad (0 \le l \le r)$$

となる. また双対性により $h_l = h_{r-l}$を得る. Πが単体的凸多面体 Q から得られているときには$\sharp\Pi(j) = f_{j-1}$であり, fベクトルと h ベクトルとの関係式および Dehn-Sommerville の等式が得られることになる.

さて, Πに関して区分的に線形かつ強凸な関数$\eta : W \to \mathbf{R}$ も与えられているとしよう. (第 1節の最後に述べた例のように, Πが r次元単体的凸多面体 Q から得られている場合のゲージ関数が重要な例である.) このとき $r+1$ 次元ベクトル空間

$$\widetilde{W} := W \times \mathbf{R}$$

を考える. $\sigma \in \Pi$に対して$\widetilde{\sigma} := \{(w, \eta(w)) \mid w \in \sigma\}$ は$\widetilde{W}$の凸多面錐であり $\dim \widetilde{\sigma} = \dim \sigma$ が成り立つ. $\widetilde{W}$の不完備な単体的凸多面錐分割

$$\widetilde{\Pi} := \{\widetilde{\sigma} \mid \sigma \in \Pi\}$$

はηの**グラフ**ともいうべきものである. 台 $|\widetilde{\Pi}| := \bigcup_{\sigma\in\Pi} \widetilde{\sigma}$が$\eta$の通常の意味でのグラフである. 各$\rho \in \Pi(1)$ に対し, $\widetilde{w}_\rho := (w_\rho, \eta(w_\rho))$ を$\widetilde{\rho}$のマークと考えることができる. ηがΠに関して区分的に線形かつ強凸であるからηの **epigraph**

$$\mathrm{epi}(\eta) := \{(w, \lambda) \in \widetilde{W} \mid \lambda \ge \eta(w)\}$$

は$\widetilde{W}$の $r+1$ 次元凸多面錐であり, しかも $\mathrm{epi}(\eta)$ 自身以外の $\mathrm{epi}(\eta)$ の面の全体は$\widetilde{\Pi}$と一致する.

この$\widetilde{\Pi}$に対しても石田複体を同様に定義すると, 次のことが判る.

定理 2 各$0 \le l \le r+1$ に対して

$$j \ne l-1, l \text{ なら} \qquad H^j(\widetilde{\Pi}, \widetilde{\mathcal{G}}_l) = 0$$

が成立する. また, 任意の j, lに対して双対性

$$H^j(\widetilde{\Pi}, \widetilde{\mathcal{G}}_l)^* = \left(\bigwedge^{r+1} \widetilde{W}\right) \otimes_{\mathbf{R}} H^{r-j}(\widetilde{\Pi}, \widetilde{\mathcal{G}}_{r+1-l})$$

も成立する.

さらに, 簡単な計算によって次のことが判る.

命題 3 任意の $1 \leq l \leq r$に対して

$$0 \to H^{l-1}(\tilde{\Pi}, \tilde{\mathcal{G}}_l) \to A^{l-1} \xrightarrow{\overline{\eta}倍} A^l \to H^l(\tilde{\Pi}, \tilde{\mathcal{G}}_l) \to 0$$

は完全列である.

この命題および双対性により, Lefschetz の強定理の我々が必要とする帰結に関して次のことが判る.

系 4 次は同値である.

- $l < r/2+1$ なら$\overline{\eta}$倍 : $A^{l-1} \to A^l$は単射.
- $l < r/2+1$ なら $H^{l-1}(\tilde{\Pi}, \tilde{\mathcal{G}}_l) = 0$.
- $l > r/2$ なら$\overline{\eta}$倍 : $A^{l-1} \to A^l$は全射.
- $l > r/2$ なら $H^l(\tilde{\Pi}, \tilde{\mathcal{G}}_l) = 0$.

$H^r(\tilde{\Pi}, \tilde{\mathcal{G}}_r) = 0$ は比較的容易に証明できる. 従って $H^0(\tilde{\Pi}, \tilde{\mathcal{G}}_1) = 0$ でもあり, $h_{r-1} \geq h_r$ および $h_0 \leq h_1$が判る.

今のところ, さらに $H^{r-1}(\tilde{\Pi}, \tilde{\mathcal{G}}_{r-1}) = 0$ も証明でき, 従って $H^1(\tilde{\Pi}, \tilde{\mathcal{G}}_2) = 0$ も判る. その結果として, $h_{r-2} \geq h_{r-1}$および $h_1 \leq h_2$も判ったことになる. この証明には, 3 次元単体的凸多面体の辺からなる枠組 (framework) の**剛性**に関する Cauchy, Dehn, Weyl, Alexandrov の定理の証明に対する Gluck [3] のアイデアを使う.

アフィン・トーリック多様体 Uが孤立特異点のみを持つとき, その交叉コホモロジー群に関して

$$i \text{ が奇数なら} \qquad IH^i(U, \mathbf{R}) = 0$$

という既知の事実の初等的証明が得られれば, 類似の方法で上記系 4における同値な性質が実際にみたされることを初等的に証明できるはずである.

参考文献

[1] L. J. Billera and C. W. Lee, Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial convex polytopes, Bull. Amer. Math. Soc. (New Ser.) 2 (1980), 181–185.

[2] L. J. Billera and C. W. Lee, A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial convex polytopes, J. Combin. Theory (A) 31 (1981), 237–255.

[3] H. Gluck, Almost all simply connected closed surfaces are rigid, in *Geometric Topology, Proc. of Conf. at Park City, Utah, February 19–22, 1974* (L. C. Glaser and T. B. Rushing, eds.), Lecture Notes in Math. 438, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975, 225–239.

[4] P. McMullen, The number of faces of simplicial polytopes, Israel J. Math. 9 (1971) 559–570.

[5] T. Oda, Simple convex polytopes and the strong Lefschetz theorem, a special issue of J. Pure Appl. Algebra dedicated to the sixtieth birthday of Professor Hideyuki Matsumura (T. Hibi and J. D. Sally, eds.), to appear.

[6] T. Oda, Geometry of toric varieties, in *Proc. Conf. on Algebraic Groups and Applications, Hyderabad, December, 1989*, to appear.

[7] , T. Oda and H. S. Park, Linear Gale transforms and Gelfand-Kapranov-Zelevinskij decompositions, to appear.

[8] 小田忠雄, 単体的凸多面体と Lefschetz の強定理, 1989 代数幾何学シンポジューム記録 (1990 年 1 月, 城崎大会議館).

[9] R. Stanley, The number of faces of a simplicial convex polytope, Adv. in Math. 35 (1980), 236–238.

[10] R. Stanley, Generalized h-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results, in *Commutative Algebra and Combinatorics* (M. Nagata and H. Matsumura, eds.), Advanced Studies in Pure Math. 11, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987, 187–213.