数理解析研究所講究録
第 735 巻 1990 年 172-191



# 単体的複体上の完全交叉 Hodge algebra について.

阪大 D1 寺井 直樹
(Naoki Terai)

Hodge 代数は不変式論に現れる様々な環が共通にもつ性質をうまく抽出した既念であり, De Concini - Eisenbud - Procesi [1] において公理化されている。その後, 日本においても渡辺敬一氏, 日比孝之氏によって Hodge 代数の中でも特に重要な ordinal Hodge 代数 (ASL) がかなり詳しく調べられている。

[1] においては, square-free Hodge 代数が定義され, また, square-free Hodge 代数に対し, ある単体的複体が一意的に定まることが示されている。そこで, 本原稿では, square-free Hodge 代数とそれに対応する単体的複体の間の関係に注目し, その square-free Hodge 代数を対応する単体的複体上の Hodge 代数と呼ぶことにし, それについて考察する。より具体的に言えば, [3], [4] などで用いられている方法を適用することによって, square-free Hodge 代数が完全交叉 (以下 C.i.

と略す）となるためには，対応する単体的複体は，どのようなものでなければならないかということを調べる。

## §1. Hodge 代数の定義

[1]に従って必要な定義，記号を述べる。$H=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ を有限集合とし，$k$ を commutative field とし，R を commutative $k$-algebra とし，$H \hookrightarrow R$ なる injection が与えられているとする。この injection によって $H \subset R$ とみなす。$x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ $(i_1, \cdots i_n \geq 0)$ の形の元を H 上の monomial と言う。(より正確に言うならば，H から $\mathbb{N}\cup\{0\}$ への写像 $H \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ $(x_j \mapsto i_j)$ のことを H 上の monomial と言う。) $\mathrm{Supp}\, x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} = \{x_j \mid i_j > 0\}$ と定義し，これを $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ の support と言う。また H 上の monomial 全体の集合を M で表す。M の subset $\Sigma$ が order ideal of monomials であるとは，$\Sigma$ が "$M \in \Sigma$, $N \in M$ ならば，$M \cdot N \in \Sigma$" を満たすことである。また monomial $M$ が $\Sigma$ に関して standard であるとは，$M \notin \Sigma$ であることとする。$\Sigma$ の generator とは自分以外のどんな $\Sigma$ の元によっても割れない $\Sigma$ の元のことである。$\leq$ を H 上の半順序とし，$\tilde{H}=(H, \leq)$ とする。このとき，次の公理が満たされるならば，R を $\Sigma$ によって支配され，$\tilde{H}$ によって生成される $k$-Hodge 代数と言う。

(Hodge-1) Rは、$\Sigma$に関する standard monomial 全体の集合 M\Σを基底にもつ $k$-vector space である。
(Hodge-2) $N$を$\Sigma$の generator とするとき、

(*)　$N = \sum_i r_i M_i$ ; $0 \neq r_i \in k$

と言う異なる standard monomial の linear combination による$N$の表現が存在し、任意の$x \in \mathrm{Supp}\, N$及び任意の$M_i$に対し、ある$y_i \in \mathrm{Supp}\, M_i$が存在して、$y_i < x$が成り立つ。

また同じ情況で、Rが少なくとも(Hodge-2)を満たすとき、Rを$\Sigma$によって支配され、$\tilde{H}$によって生成される quasi $k$-Hodge 代数と言う。関係(*)を$N$に関する straightening relation と言う。straightening relation の右辺は0でもよいが、(Hodge-2)よりどんな$M_i$も1とはなりえない。

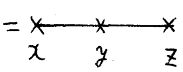
もし全ての straightening relation の右辺が0であるとき、(すなわち、任意の$N \in \Sigma$に対して、Rにおいて$N = 0$であるとき)、Rは discrete であるという。order ideal $\Sigma$ of monomials が square-free な monomial で生成されているとき$\Sigma$、あるいは$\Sigma$によって支配される Hodge 代数を square-free と言う。また、$\tilde{H}$における半順序によって比較不可能な2元の積全体で$\Sigma$が生成されているとき、Rは ordinal Hodge代数あるいは algebra with straightening laws (ASL)と言う。

このとき、$\Sigma$は そのsupportが全順序集合でないような全てのmonomialからなっている。

$R$を$\Sigma$によって支配され、$\hat{H}$によって生成される$k$-Hodge代数とする。このとき、ある grading $R=\bigoplus_{n\geq 0}R_n$ が存在して、$R_0=k$ で $H$の各元が斉次な次数正の元となるとき、$R$を次数つき$k$-Hodge代数と言う。特に$H\subset R_1$となるとき、$R$を斉次次数つき$k$-Hodge代数という。

$\Delta$を頂点集合$H$上の単体的複体とする。(すなわち、$\Delta$は$H$のsubsetの集合で、(i) 任意の$x\in H$に対して、$\{x\}\in\Delta$, (ii) $\sigma\in\Delta$, $\tau\subset\sigma$ ならば $\tau\in\Delta$ を満たすものである。)
$\Sigma_\Delta=\{M\in\mathcal{M}\mid \mathrm{Supp}\,M\notin\Delta\}$ と定義すると、$\Sigma_\Delta$は order ideal of monomials となる。このとき、$H$に適当な半順序構造$\leqq$を入れて、$R$が$\Sigma_\Delta$によって支配され、$\hat{H}=(H,\leqq)$によって生成される$k$-Hodge代数となるとき、$R$を単体的複体$\Delta$上の$k$-Hodge代数という。特に、$\Delta$上のdiscrete $k$-Hodge代数を$\Delta$のStanley-Reisner ringと言い、$k[\Delta]$と表す。

*Example*

$\Delta=$  , $R=\dfrac{k[x,y,z]}{(xz-y^2)}$ とすると

$R$は$\Delta$上の$k$-Hodge algebra ただし $x, z>y$ とする。

## §2. 基本的性質

本節で Hodge代数についての基本的性質を列挙する。

**性質1.**

R を単体的複体 $\Delta$ 上の斉次次数つき $k$-Hodge 代数とする。このとき、$P_R(\lambda) = P_{k[\Delta]}(\lambda)$ である。特に $\dim R = \dim k[\Delta]$ である。ただし、$P_R(\lambda)$ は R の Poincaré 級数で、形式的巾級数 $P_R(\lambda) = \sum_{n \geq 0} (\dim_k R_n) \lambda^n$ と定義する。

**性質2.**

$\Delta$ を次元 $d$ の単体的複体とし、$\Delta$ の $i$-単体の個数を $f_i$ で表す。($i = -1, 0, \cdots, d$)。ただし、$\phi \in \Delta$ より $f_{-1} = 1$ とする。このとき、

$$P_{k[\Delta]}(\lambda) = \frac{f_i \lambda^{i+1}}{(1-\lambda)^{i+1}}$$

である。特に $\dim k[\Delta] = d + 1$ である。

Hodge代数が何故環論的に興味深いかと言うと、次の定理が成り立つからである。

**定理**

R を次数つき $k$-Hodge 代数とし、$R_0$ をそれに対応する discrete Hodge 代数とする。(すなわち、R における全ての

straightening relation を "$=0$" と言う形にしたものが $R_0$ である。)
このとき、

$R_0$ が Cohen-Macaulay ⇒ $R$ が Cohen-Macaulay

$R_0$ が Gorenstein ⇒ $R$ が Gorenstein

$R_0$ が complete intersection ⇒ $R$ が complete intersection

が成り立つ。

つまり、$R_0$ と $R$ は $k$-vector space として同型であるが、さらに、環論的にも、$R_0$ から $R$ へ重要な性質を遺伝しているのである。一般に逆は成り立たない。たとえば、[1], [7] 参照。
しかし、$R$ を特に斉次次数つき ASL に限れば、

$R$ が complete intersection ⇒ $R_0$ が complete intersection

が成立する。そこで、$R$ をもう少し広く、単体的複体上の Hodge 代数とすれば、同じことが成り立つだろうか？残念ながら、これは成り立たない。それでは、$R$ が c.i であることと、$R_0 = k[\Delta]$ が c.i. であることには、どれぐらいの隔りがあるのだろうか。そのことについて、次の節で述べる。

## §3. 分類

<u>定理</u>

$\Delta$を次元$d$の、頂点集合$H$上の単体的複体とする。ただし、$\#(H)=n$とする。このとき次の(i),(ii)は同値である。

(i) $k[\Delta]$はc.i.

(ii) $\Delta$は、

$$\Delta = \dot{\Delta}(m_1) * \dot{\Delta}(m_2) * \cdots * \dot{\Delta}(m_g) * \underbrace{\Delta(0) * \cdots * \Delta(0)}_{\ell\text{個}}$$

と表せる。ただし、$g = n - d - 1$, $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_g + g + \ell$, $m_1, m_2, \cdots, m_g \geqq 1$, $\ell \geqq 0$とする。

さらに$\Delta$が(i),(ii)の条件を満たすとき、$k[\Delta]$を自然に次数つき環と見なすと、

$$P_{k[\Delta]}(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{g}(1+\lambda+\cdots+\lambda^{m_i})}{(1-\lambda)^{d+1}}$$

記号の説明

$\Delta(m) := 2^{\{0,1,\cdots,m\}}$ ( $\{0,1,2,\cdots,m\}$の全てのsubsetを単体とするようなm次元の単体的複体 )

$\dot{\Delta}(m) := \Delta(m) \setminus \{\{0,1,\cdots,m\}\}$

$\Delta_1, \Delta_2$をそれぞれ頂点集合$V_1, V_2$上の単体的複体とし、$V_1 \cap V_2 = \phi$とする。このとき、頂点集合$V_1 \cup V_2$上の単体的複体$\Delta_1 * \Delta_2$を

$\Delta_1 * \Delta_2 := \{\sigma \cup \tau \mid \sigma \in \Delta_1, \tau \in \Delta_2\}$

によって定義し、これを$\Delta_1$と$\Delta_2$の *simplicial join* と言う。

$\Delta_i$を頂点集合$V_i$上の単体的複体とする。ただし、$i=1,2,\cdots,l$。今、任意の$i, j$ $(i \neq j)$に対して $V_i \cap V_j = \phi$ とするとき、

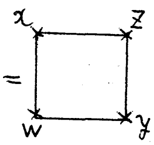
$$\Delta_1 * \Delta_2 * \cdots * \Delta_l := ((\cdots((\Delta_1 * \Delta_2) * \Delta_3) * \cdots) * \Delta_{l-1}) * \Delta_l$$

によって、頂点集合$V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_l$上の単体的複体$\Delta_1 * \Delta_2 * \cdots * \Delta_m$を定義する。

証明　[16] 参照

なお、石田正典氏のご指摘によりまして、この結果のさらに一般的な場合が、中島晴久氏によって与えられていることがわかりました。この場を借りて、お礼申し上げます。

<u>Example</u>

$\Delta = \{\overset{x}{\cdot}\ \ \overset{y}{\cdot}\} * \{\overset{z}{\cdot}\ \ \overset{w}{\cdot}\} =$ 


とすると

$$k[\Delta] = \frac{k[x, y, z, w]}{(xy, zw)}$$

さて次に、$\Delta$上に斉次次数つき c.i. $k$-Hodge代数Rが存在するならば、$\Delta$がどの様なものになるかと言うことを Hodge

代数のKrull次元が、1, 2, 3次元の場合について、それぞれ調べる。まず、そのために必要となる補題を引用しておく。

補題 [11, Corollary 3.4]

形式的巾級数 $P(\lambda)$ がある $d$ 次元の c.i. 斉次次数つき環 $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ ($R_0 = k$ は体とする) の Poincaré series であるための必要十分条件は、$P(\lambda)$ が

$$P(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{t} (1+\lambda+\cdots+\lambda^{g_i})}{(1-\lambda)^d}$$

(ただし $t \geqq 0$, $g_1, \cdots, g_t > 0$)

と言う形をもつことである。

この補題と、先に述べた性質1, 2を組合せることにより、次のことがわかる。

定理

$\Delta$ を単体的複体とし、$k$ を体とする。このとき $\Delta$ 上に、1次元斉次次数つき c.i. $k$-Hodge代数 が存在するならば、次のいずれかの場合である。

(i) $\Delta = \Delta(0)$ (1点) で $R = k[\Delta] = k[X]$

(ii) $\Delta = \dot{\Delta}(1)$ (2点) で $R = k[\Delta] = k[X, Y]/(XY)$

定理

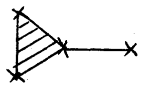
$\Delta$を単体的複体とし、$k$を体とする。このとき、$\Delta$上に2次元斉次次数つきC.i $k$-Hodge代数が存在するならば、$\Delta$は次のいずれかである。

(i) $\Delta(1)$

(ii) $\Delta(1) * \Delta(0)$

(iii) $\dot{\Delta}(2)$

(iv) $\dot{\Delta}(1) * \dot{\Delta}(1)$

(v) 

ただし、斜線部は2-単体でない。

また逆に$\Delta$が(i)〜(v)のときには、$\Delta$上に2次元斉次次数つきC.i $k$-Hodge代数が存在する。

証明

$\Delta$上に2次元斉次次数つきC.i $k$-Hodge代数$R$が存在すると、性質1, 2より、

$$P_R(\lambda) = 1 + \frac{f_0 \lambda}{1-\lambda} + \frac{f_1 \lambda^2}{(1-\lambda)^2}$$

ただし、$f_i$は$\Delta$の$i$-単体の個数とする $(i=0, 1)$。

一方、$R$はC.iだから、補題より、

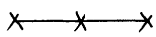
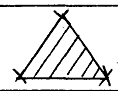
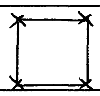
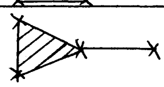
$$P_R(\lambda)=\frac{\prod_{i=1}^{t}(1+\lambda+\cdots+\lambda^{g_i})}{(1-\lambda)^2}$$

$(t\geqq 0,\ g_1, g_2, \cdots, g_t > 0)$

と表せる。従って、

$$(1-\lambda)^2+f_0\lambda(1-\lambda)+f_1\lambda^2=\prod_{i=1}^{t}(1+\lambda+\cdots+\lambda^{g_i})$$

よって、$g_1+g_2+\cdots+g_t\leqq 2$ で右辺は次の4種類に限られ、その各々に対して、$f_0, f_1$は一意的に定まる。そこから、$f_0, f_1$についての条件を満たす単体的複体の種類も限られてくる。([17] *Graph Diagrams* 参照) 以上のことは次の様に表に表わされる。

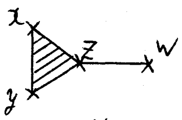
| | $P_R(\lambda)$の分子 | $f_0$ | $f_1$ | $f_0, f$から定まる単体的複体 |
|---|---|---|---|---|
| (i) | $1$ | 2 | 1 |  $=\Delta(1)$ |
| (ii) | $1+\lambda$ | 3 | 2 |  $=\dot{\Delta}(1)*\Delta(0)$ |
| (iii) | $1+\lambda+\lambda^2$ | 3 | 3 |  $=\dot{\Delta}(2)$ |
| (iv) | $(1+\lambda)^2$ | 4 | 4 |  $=\dot{\Delta}(1)*\dot{\Delta}(1)$ |
| (v) | $(1+\lambda)^2$ | 4 | 4 |  |

逆に$\Delta$が(i)〜(v)の各々の場合に、$\Delta$上に斉次次数つきc.i. $k$-Hodge代数$R$が存在することを示す。$\Delta$が(i)〜(iv)のときは、$R=k[\Delta]$ととればよい。$\Delta$が(v)のときは、次の例より従う。

Q.E.D.

Example

$\Delta$ を




なる単体的複体とする。このとき、

$$R = k[X, Y, Z, W] \big/ (XW - XZ,\ YW)$$

とすれば、Rは$\Delta$上の2次元斉次次数つきC.i $k$-Hodge代数となる。ただし、Rにおける straightening relation は

$x w = x z$

$y w = 0$

$x y z = 0$

で $z < x$, $z < w$ とする。

証明

$z' = w - z$ とすれば、

$$R = k[X, Y, Z', W] \big/ (XZ', YW)$$

より、RはC.iである。また$\Sigma_\Delta$の生成元は、$xw, yw, xyz$ で、$k[X, Y, Z, W]$において、

$XYZ = -Y(XW - XZ) + X(YW)$

よって $XYZ \in (XW - XZ,\ YW)$。従ってRにおいて、

$$xyz = 0$$

$$xw = xz$$

$$yw = 0$$

これらは、明らかに(Hodge−2)を満たす。よってRは擬k-Hodge代数。またRはC.i.より

$$P_R(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1-\lambda)^4} = \frac{(1+\lambda)^2}{(1-\lambda)^2} = P_{k[\Delta]}(\lambda)$$

である。よって次の補題より、kはk-Hodge代数である。

補題

Δを単体的複体とし、kを体とする。このとき、次の(i),(ii)は同値である。

(i) RはΔ上の斉次次数つきk-Hodge代数である。

(ii) RはΔ上の斉次次数つき擬k-Hodge代数で、

$$P_R(\lambda) = P_{k[\Delta]}(\lambda)$$

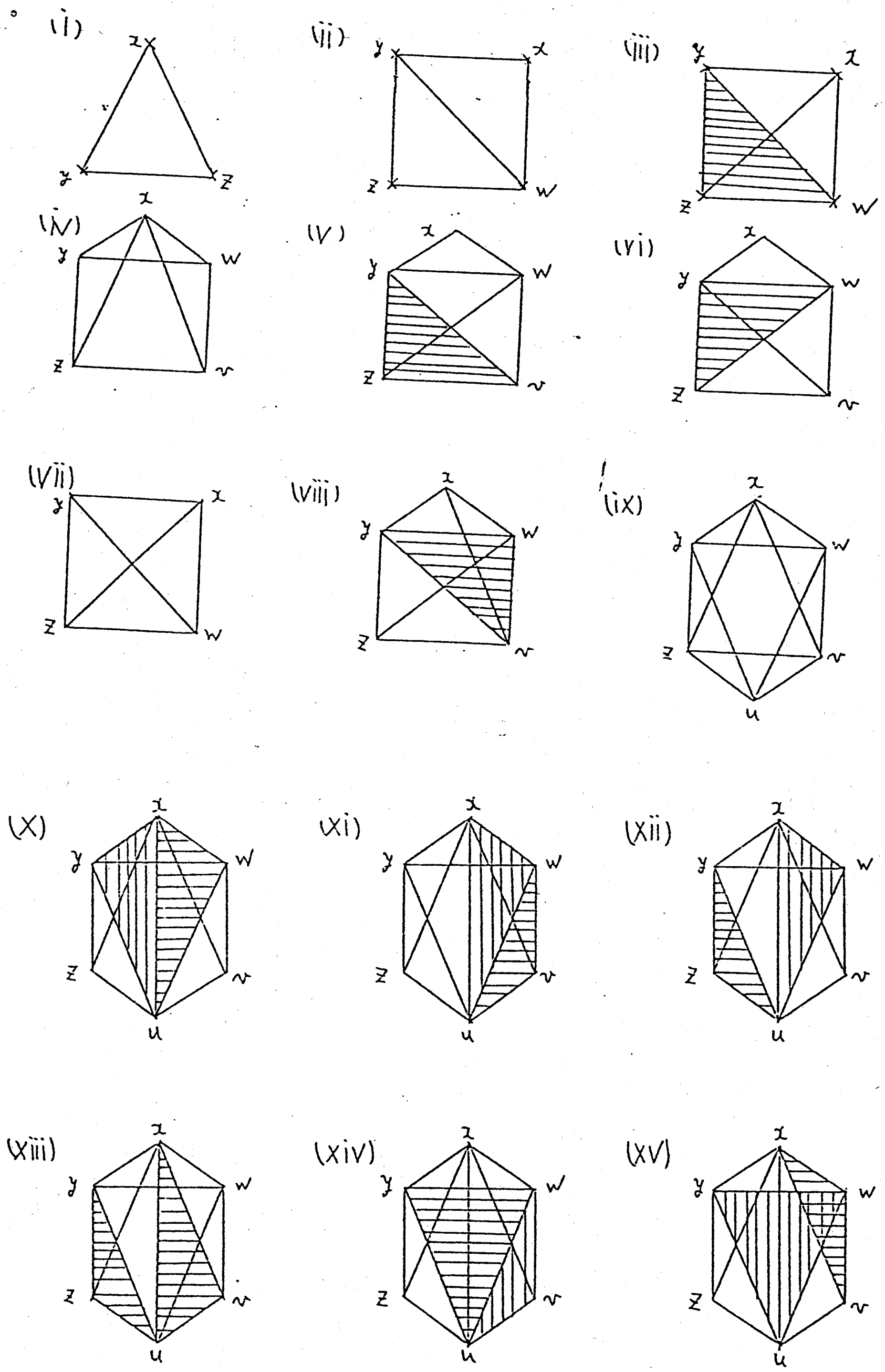
を満たす。

さて、次にHodge代数が3次元の場合の分類を述べる

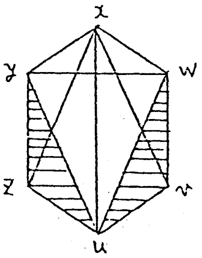
定理

Δを単体的複体とし、kを体とする。このとき、Δ上に3次元斉次次数つきC.i. k-Hodge代数が存在するならば、Δは

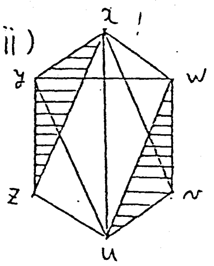
次のいずれかである。ただし、斜線の三角形のみ2-単体でない。



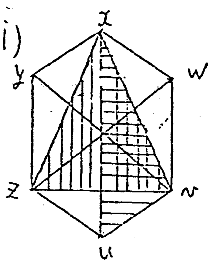
(xvi)



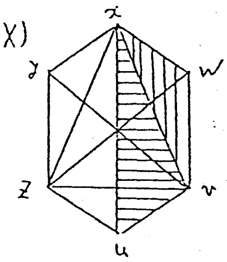

(xvii)



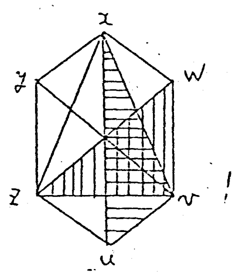

(xviii)



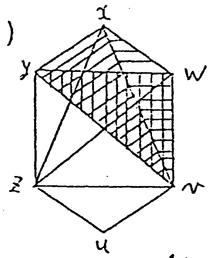

(xix)




(xx)

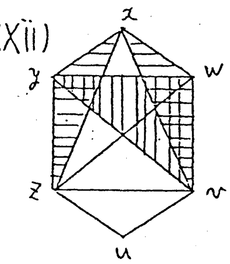



(xxi)

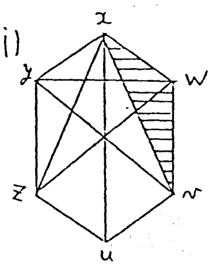



ただし #(k)≠2 とする.

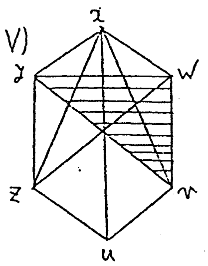
(xxii)



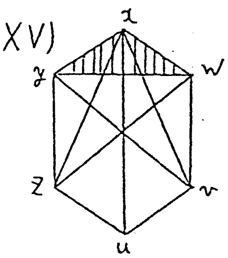

(xxiii)




(xxiv)




(xxv)




また逆に $\Delta$ が (i)〜(xxv) のときには、$\Delta$ 上に 3 次元斉次次数つき完全交叉 $k$-Hodge 代数が存在する。

証明は 2 次元の場合と方針は同じであるが、Poincaré 級数から定まる単体的複体の上に必ずしも、斉次次数つき C.I.

$k$-Hodge代数が存在しないので、情況は少しやっかいになる。
（[16] 参照）

Remark

単体的複体 $\Delta$ が (i)〜(XXV) のそれぞれの場合について、$\Delta$ 上に斉次次数つき c.i. $k$-Hodge代数として、例えば次の様なものが存在する。

(i) $R = k[x, y, z]$

(ii) $R = \dfrac{k[w, x, y, z]}{(xz)}$

(iii) $R = \dfrac{k[w, x, y, z]}{(wyz)}$

(iv) $R = \dfrac{k[v, w, x, y, z]}{(vy, wz)}$

(v) $R = \dfrac{k[v, w, x, y, z]}{(vx - vy, xz)}$

(vi) $R = \dfrac{k[v, w, x, y, z]}{(vx - wy, xz)}$

(vii) $R = \dfrac{k[w, x, y, z]}{(wxyz)}$

(viii) $$R = \frac{k[v, w, x, y, z]}{(vwy,\ xz)}$$

(ix) $$R = \frac{k[u, v, w, x, y, z]}{(ux,\ vy,\ wz)}$$

(x) $$R = \frac{k[u, v, w, x, y, z]}{(vy,\ vz - ux,\ wz)}$$

(xi) $$R = \frac{k[u, v, w, x, y, z]}{(vy + wx,\ vz - xz,\ wz + uw + yz)}$$

(xii) $$R = \frac{k[u, v, w, x, y, z]}{(vy - uy,\ vz - ux,\ wz)}$$

(xiii) $$R = \frac{k[u, v, w, x, y, z]}{(vy - wy,\ vz,\ wz - ux - uz)}$$

(xiv) $$R = \frac{k[u, v, w, x, y, z]}{(vy - wy,\ vz,\ wz - uw - ux)}$$

(xv) $$R = \frac{k[u, v, w, x, y, z]}{(vy,\ vz - uw,\ wz - wx - xz)}$$

(xvi) $$R = \frac{k[u, v, w, x, y, z]}{(vy,\ vz - uv - uz,\ wz - wx)}$$

(xvii) $$R = \frac{k[u, v, w, x, y, z]}{(vy - xy,\ vz,\ wz - uw)}$$

(xviii) $R = \dfrac{k[u, v, w, x, y, z]}{(uw - wz,\ uy,\ wy - vx)}$

(xix) $R = \dfrac{k[u, v, w, x, y, z]}{(uw - uv - vw,\ uy - ux - xz,\ wy)}$

(xx) $R = \dfrac{k[u, v, w, x, y, z]}{(uw - ux - wz + xz,\ uy - uv - yz,\ wy)}$

(xxi) $R = \dfrac{k[u, v, w, x, y, z]}{(uw - avw,\ ux - vx,\ uy - yz)}$

ただし、$a \in k \setminus \{0, 1\}$ とする。

(xxii) $R = \dfrac{k[u, v, w, x, y, z]}{(uw - vw,\ ux,\ uy - yz)}$

(xxiii) $R = \dfrac{k[u, v, w, x, y, z]}{(uw,\ uy - vx,\ vz - yz)}$

(xxiv) $R = \dfrac{k[u, v, w, x, y, z]}{(uw - vw,\ uy - xy,\ vz)}$

(xxv) $R = \dfrac{k[u, v, w, x, y, z]}{(uw - wx,\ uy,\ vz)}$

系

$k$ を体とし、$\Delta$ を $\Delta$ 上に3次元斉次次数つき C.I. $k$-Hodge 代数が存在する単体的複体とする。このとき $k[\Delta]$ は Cohen-Macaulay ring となる。

Reference

[1] C. De. Concini, D. Eisenbud, and C. Procesi : Hodge algebras Astérisque 91 (1982)

[2] D. Eisenbud : Introduction to algebras with straightening laws, in "Ring theory and algebra III" Dekker 1980

[3] 渡辺敬一 : Study of algebras with straightening laws of dimension 2 in "Algebraic and Topological Theories — to the memory of Dr. Takehiko Miyata" p.p 622 – 639 (1985)

[4] 日比孝之, 渡辺敬一 : Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains I, Hiroshima Math. J. 15 (1985) pp 27–54

[5] 日比孝之, 渡辺敬一 : Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains II, Hiroshima Math, J. 15 (1985) pp. 321–340

[6] 日比孝之 : Study of three-dimensional algebras with straightening laws which are Gorenstein domains III Hiroshima Math. J. 18 (1988) pp. 299 – 308

[7] 日比孝之 : Affine semigroup ring and Hodge algebras 修士論文 (1983)

[8] 日比孝之 : Every affine graded ring has a Hodge structure,

Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino Vol 44° 2 (1986)
[9] 日比孝之：On ASL domains with # Ind A ≦ 2,
第4回可換環論シンポジウム報告集(軽井沢) 1982
[10] 日比孝之：Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws, in "Commutative algebra and Combinatorics" Advanced Studies in Pure math. Voll 11, North-Holland Amsterdam 1987 pp 91-109
[11] R. Stanley: Hilbert functions of graded algebras, Advances in math. 28 (1978) pp 57-83
[12] R. Stanley: "Combinatorics and Commutative algebra" Progress in math, Vol 41. Birkhäuser, Boston 1983
[13] M. Hochster: Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, in "Ring Theory Ⅲ" Dekker 1977 pp 171-223
[14] G. Reisner: Cohen-Macaulay quotient of polynomial rings Advances in math 21 (1976) pp 30-49
[15] 中島晴久：Equivariant subvarieties of torus embeddings which are local complete intersections, preprint
[16] 寺井直樹：斉次次数つき完全交叉Hodge代数をもつ単体的複体の分類について，修士論文
[17] F. Harrary: "Graph theory" Reading Massachusetts 1969