数理解析研究所講究録
第 735 巻 1990 年 206-214

凸多面体の Ehrhart 多項式に関する幾つかの結果

日 比 孝 之 （名古屋大学理学部）
Takayuki Hibi

序。凸多面体をめぐる‘数え上げ’の組合せ論の研究の歴史には、ふたつの大きな流れがある。一方は、１７５２年に発見された Euler の公式 $v-e+f=2$ を源とする凸多面体の面の数え上げの研究であり、他方は、Minkowski らによって創設された「数の幾何」から派生した、凸多面体に含まれる格子点の数え上げの話題である。

本稿では、後者の範疇に属している、凸多面体に含まれる格子点の数え上げから定義される Ehrhart 多項式と呼ばれるものを考察する。なお、前者の研究の興亡の歴史は [H_1] に集約してあるので、そちらを参照されたい。いずれにしても‘数え上げ’の組合せ論の究極的な目標（と言うか、哲学）は、離散的な数学現象から自然に生起する有限数列の組合せ論的な特徴付けを探す、ということである。我々は、組合せ論の伝統的な手法を継承しつつも、可換環論や代数幾何学、特に、Cohen - Macaulay 環やトーリック多様体などの理論を武器として研究を展開している。

【１】凸多面体と δ − 列

有理凸多面体 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^N$ と整数 $n\geq 1$ に対し、$\mathcal{P}$ に含まれる有理点 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$ で $n\alpha_i\in\mathcal{P}$ $(1\leqq{}^\forall i\leqq N)$ となるものの個数を $i(\mathcal{P},n)$ で表す。即ち

$$i(\mathcal{P},n):=\#(n\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^N)$$

である。但し、$n\mathcal{P}:=\{n\underline{\alpha}\,;\,\underline{\alpha}\in\mathcal{P}\}$ であり、$\#(X)$ は有限集合 X の要素の個数を表す。函数 $i(\mathcal{P},n)$ は１９５５年頃 *lycée* の先生であった Ehrhart 博士が考察した [Ehr]。彼は、$\mathcal{P}$ が整凸多面体、つまり、各頂点が $\mathbb{Z}^N$ に属する凸多面体、であれば $i(\mathcal{P},n)$ は次数 d （$=\mathcal{P}$ の次元）の多項式で、更に $i(\mathcal{P},0)=1$ であることを示した。そこで $\mathcal{P}$ が整凸多面体のとき $i(\mathcal{P},n)$ を $\mathcal{P}$ の Ehrhart 多項式と呼ぶことにしよう。

我々は、整凸多面体の Ehrhart 多項式を直接研究するのではなく、その母函数から生起する或る有限数列を考察の対象とする。次元 d の整凸

多面体 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^N$ から、整数の数列 $\delta_0,\delta_1,\delta_2,\cdots$ を、公式

$$(☆)\qquad (1-\lambda)^{d+1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} i(\mathcal{P},n)\lambda^n\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i\lambda^i$$

で定義する。このとき $i(\mathcal{P},n)$ が n に関する次数 d の多項式であることから $\delta_i=0$ $({}^\forall i>d)$ が従う。そこで、数列 $\delta(\mathcal{P})=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_d)$ を $\mathcal{P}$ の δ ー列と呼ぶことにする。すると

$$\delta_0=1\ ,\quad \delta_1=\#(\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^N)-(d+1) \tag{1}$$

である。また $\mathcal{P}$ の境界を $\partial\mathcal{P}$ で表すと、

$$\delta_d=\#(\partial\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^N) \tag{2}$$

となる。他方、$N=d$ とすると、$\mathcal{P}$ は通常の体積 $\mathrm{vol}(\mathcal{P})$ を持つが、それは $i(\mathcal{P},n)$ の n^d の係数と一致する。つまり

$$(\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_d)/d!\ =\ \mathrm{vol}(\mathcal{P}) \tag{3}$$

となる。等式（２）と（３）については、例えば [Sta_3, pp. 235 - 241] を参照せよ。更に、$\delta(\mathcal{P})$ は非負、つまり

$$\delta_i\geqq 0 \qquad (0\leqq {}^\forall i\leqq d) \tag{4}$$

である [Sta_2] 。

【２】δ ー列の線形不等式

我々の最終目標は、組合せ論の伝統的哲学に立脚した、整凸多面体から生起する δ ー列の組合せ論的特徴付けを探せ、というきわめて明確なものである。

そこで、まず、任意の整凸多面体の δ ー列に関して何が言えるか、ということを問い掛けてみよう。

定理 次元 d の整凸多面体 $\mathcal{P}$ の δ ー列を $\delta(\mathcal{P})=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_d)$ と置く。

（i）（[H_2]）任意の $0\leqq i\leqq[(d-1)/2]$ に対して線形不等式

$$\delta_d+\delta_{d-1}+\cdots+\delta_{d-i} \leqq \delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_i+\delta_{i+1} \qquad (5)$$

が成立する。

（ii）（[Sta$_4$]）$\delta_j \neq 0$, $\delta_{j+1}=\delta_{j+2}=\cdots=\delta_d=0$ とせよ。このとき、線形不等式

$$\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_i \leqq \delta_j+\delta_{j-1}+\cdots+\delta_{j-i} \qquad (6)$$

が任意の $0 \leqq i \leqq [j/2]$ に対して成立する。

線形不等式（5）と（6）を示すときの鍵となるのは、単項式で生成された Cohen - Macaulay 環［Hoc］の規準加群の理論［Sta$_1$］である。

【3】双対凸多面体と対称 δ－列

単体的凸多面体の h －列に関する Dehn - Sommerville の定理とは、次元 d の単体的凸多面体の i 次元の面の個数を f_i $(0 \leq i < d)$、更に $f_{-1}=1$ とするとき

$$(\bigstar) \quad \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i}$$

で定義される数列 $h_0, h_1, \cdots, h_d$ が対称、つまり $h_i=h_{d-i}\ (0 \leqq {}^\forall i \leqq d)$ である―――ということを保証する。その類似を整凸多面体の δ －列で考察しよう。後に、単なる‘類似’ではないことが判明する。

まず、$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ が d 次元整凸多面体、$\delta(\mathcal{P})=(\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_d)$ で $\delta_d > 0$ のとき、d 次元整凸多面体 $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$ で、$\mathbb{R}^d$ の原点は $\mathcal{Q}$ の内部 $\mathcal{Q}-\partial\mathcal{Q}$ に含まれ、$\delta(\mathcal{P})=\delta(\mathcal{Q})$ となるものが存在することに注意しよう。すると、次元 d の整凸多面体から生起する対称な δ －列を研究対象とする際には、次元 d の整凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ で $\mathbb{R}^d$ の原点が $\mathcal{P}$ の内部 $\mathcal{P}-\partial\mathcal{P}$ に含まれるもののみを考察しても差し障りは生じない。そこで、$\mathbb{R}^d$ の原点を内部に含む d 次元整凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の全体を $\mathcal{C}_0(d)$ で表そう。

凸多面体の一般論では、$\mathbb{R}^d$ の原点を内部に含む次元 d の凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の双対凸多面体 $\mathcal{P}^*$ が

$$\mathcal{P}^* := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^d \,;\, \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \leqq 1,\ {}^\forall \underline{y} \in \mathcal{P} \}$$

で定義される。但し、$\langle x, y\rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積である。もちろん $\mathcal{P}^*$ は再び原点を内部に含む次元 d の凸多面体であり $(\mathcal{P}^*)^*=\mathcal{P}$ となる。更に、$\mathcal{P}$ が有理凸多面体であれば $\mathcal{P}^*$ も有理凸多面体となる。しかし、$\mathcal{P}$ が整凸多面体であっても、$\mathcal{P}^*$ は必ずしも整凸多面体であるとは限らない。しからば、如何なる条件があれば、整凸多面体の双対凸多面体が再び整凸多面体となるか、という疑問が浮上する。そこで $\mathcal{P}^*$ が整凸多面体となるような $\mathcal{P}\in\mathcal{C}_0(d)$ の全体を $\mathcal{C}^*(d)$ と置く。

定理（[H3]） 整凸多面体 $\mathcal{P}\in\mathcal{C}_0(d)$ の δ －列 $\delta(\mathcal{P})=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_d)$ が対称、つまり $\delta_i=\delta_{d-i}$ $(0\leqq{}^\forall i\leqq d)$ となるための必要十分条件は $\mathcal{P}\in\mathcal{C}^*(d)$ となることである。

もちろん $\mathcal{P}\in\mathcal{C}^*(d)$ であれば $\mathcal{P}^*\in\mathcal{C}^*(d)$ であるから $\delta(\mathcal{P}^*)$ も対称である。しかし、残念ながら（？）、$d\geqq 3$ のとき $\mathcal{P},\mathcal{Q}\in\mathcal{C}^*(d)$ で $\delta(\mathcal{P})=\delta(\mathcal{Q})$ かつ $\delta(\mathcal{P}^*)\neq\delta(\mathcal{Q}^*)$ となる例が存在するので、$\delta(\mathcal{P})$ と $\delta(\mathcal{P}^*)$ の間には因果関係は乏しい。

【４】凸多面体の境界の三角形分割

我々の目標は、整凸多面体から得られる δ －列の組合せ論的特徴付けを探すことであるが、まず、当面の課題として、対称な δ －列の組合せ論的特徴付けを追跡することにしよう。

そこで、以下では、考察の対象となるのは $\mathcal{P}\in\mathcal{C}^*(d)$ である。便宜上、$\mathcal{P}\in\mathcal{C}^*(d)$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の三角形分割 Δ で $V=\partial\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^d$ を頂点集合とするものを $\partial\mathcal{P}$ の総格子型三角形分割と呼ぶことにする。［注意：$\mathcal{P}$ の頂点集合を含む $\partial\mathcal{P}$ の部分集合が任意に与えられたとき、それを頂点集合とする $\partial\mathcal{P}$ の三角形分割が常に存在する。］そのような三角形分割 Δ があったとき、Δ の i －次元の単体の個数を f_i $(0\leqq i<d)$ とし、数列 $f(\Delta)=(f_0,f_1,\cdots,f_d)$ を Δ の f －列と呼ぶ。更に（★）によって Δ の h －列 $h(\Delta)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$ を定義する。すると、$f_0=\#(V)$ だから $h_1=\#(V)-d$ 、従って $\delta(\mathcal{P})=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_d)$ とするとき $h_1=\delta_1$ となる。他方、$h(\Delta)$ は等式 $h_i=h_{d-i}$ $(0\leqq{}^\forall i\leqq d)$ を満たすことが知られている。

さて、$\mathcal{P}\in\mathcal{C}^*(d)$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の総格子型三角形分割 Δ が圧縮的であるとは、Δ の任意の $d-1$ 次元単体 σ に対し、$\mathbb{R}^d$ の原点を頂点とし σ を底面として得られる $\mathbb{R}^d$ の d 次元単体の体積が $1/d!$ であるときを言う。

命題（cf. [Sta$_2$]） $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^*(d)$の δ －列を $\delta(\mathcal{P})=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_d)$ とし、$\mathcal{P}$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の総格子型三角形分割 $\triangle$の h －列を $h(\triangle)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$ とする。このとき、不等式 $\delta_i \geqq h_i$ $(0 \leqq {}^\forall i \leqq d)$ が成立する。更に $\delta(\mathcal{P})=h(\triangle)$ となるための必要十分条件は $\triangle$ が圧縮的となることである。

なお、$d=3$ のとき $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^*(d)$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の任意の総格子型三角形分割は圧縮的であるが、$d \geqq 4$ のときには $\partial\mathcal{P}$ が圧縮的な総格子型三角形分割を所有しないような $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^*(d)$ が存在する。

【5】トーリック多様体と単峠数列

我々の対称 δ －列の理論を築き上げる際に、トーリック多様体は不可欠な武器である。そこで、如何にして組合せ論家がトーリック多様体の御利益を得るかを述べたいのだが、まず、[Dan] や [Oda] に沿って、必要な舞台装置を準備する。

（5.1）線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の部分集合 C が凸多面錐であるとは、$\mathbb{Z}^d$ の有限個の元 $\underline{n}_1,\underline{n}_2,\cdots,\underline{n}_s$ が存在して、C がそれらの非負有理数係数の一次結合と一致すること、つまり $C=\mathbb{Q}_+\underline{n}_1+\mathbb{Q}_+\underline{n}_2+\cdots+\mathbb{Q}_+\underline{n}_s$ を意味する。ここで $\mathbb{Q}_+$ は非負有理数の全体を表す。凸多面錐 C の次元は $\underline{n}_1,\underline{n}_2,\cdots,\underline{n}_s$ が張る $\mathbb{Q}$ 上の線形空間の次元と定義する。また、C が単体的であるとは、$\underline{n}_1,\underline{n}_2,\cdots,\underline{n}_s$ として $\mathbb{Q}$ 上線形独立な $\mathbb{Z}^d$ の元が選べるときを言う。

凸多面錐 C の空でない部分集合 C' が C の面であるとは、原点を通る $\mathbb{Q}^d$ の超平面 $\mathcal{H}$ が存在して、C は $\mathcal{H}$ が定める2つの閉半空間 $\mathcal{H}^+$ と $\mathcal{H}^-$ のいずれか一方に含まれ、しかも $C'=\mathcal{H}\cap C$ であるときを言う。凸多面錐 C の面は再び $\mathbb{Q}^d$ の凸多面錐である。

他方、$\mathbb{Q}^d$ の凸多面錐 C の双対凸多面錐 $C^\vee$ を

$$C^\vee := \{\, \underline{x} \in \mathbb{Q}^d \,;\, \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \geqq 0,\ {}^\forall \underline{y} \in C \,\}$$

で定義する。

（5.2）線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の扇とは、$\mathbb{Q}^d$ の凸多面錐の有限集合 $\mathcal{F}$ であって、以下の条件を満たすものである：

（i） $\mathcal{F}$ のそれぞれの凸多面錐 C は $\mathbb{Q}^d$ の直線を含まない。つまり $C\cap(-C)=\{0\}$ である。

（ii） $C\in\mathcal{F}$ で C' が C の面ならば $C'\in\mathcal{F}$ である。

(iii) $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{F}$ ならば $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の共通の面である。

扇 $\mathcal{F}$ が単体的とは、$\mathcal{F}$ を構成するそれぞれの凸多面錐が単体的であるときを言う。また、扇 $\mathcal{F}$ が完備とは、$\bigcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}} \mathcal{C} = \mathbb{Q}^d$ であるときを言う。

(5.3) 線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の扇 $\mathcal{F}$ があったとき、$\mathcal{F}$ を構成するそれぞれの凸多面錐 $\mathcal{C}$ に対して $X_{\mathcal{C}} := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathcal{C}^{\vee} \cap \mathbb{Z}^d])$ と定義する。このとき $\mathcal{C}'$ が $\mathcal{C}$ の面であれば $X_{\mathcal{C}'}$ は $X_{\mathcal{C}}$ の開集合となる。すると、$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が扇 $\mathcal{F}$ の凸多面錐ならば $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ および $\mathcal{D}$ の面だから $X_{\mathcal{C}}$ と $X_{\mathcal{D}}$ を開集合 $X_{\mathcal{C} \cap \mathcal{D}}$ に沿って貼り合わすことができる。結局 $\{X_{\mathcal{C}}\}_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}}$ をすべて貼り合わせ、$X(\mathcal{F}) := \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}} X_{\mathcal{C}}$ を得る。これを扇 $\mathcal{F}$ に付随するトーリック多様体と呼ぶ。

(5.4) 線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の扇 $\mathcal{F}$ に付随するトーリック多様体 $X(\mathcal{F})$ は d 次元の正規複素多様体である。更に、$X(\mathcal{F})$ が完備となるための必要十分条件は $\mathcal{F}$ が完備扇となることである。他方、$X(\mathcal{F})$ が非特異であるための必要十分条件は、扇 $\mathcal{F}$ のそれぞれの凸多面錐 $\mathcal{C}$ が $\mathbb{Z}^d$ の $\mathbb{Z}$ －基底の一部で $\mathbb{Q}_+$ 上生成されることである。特に、$X(\mathcal{F})$ が非特異であれば扇 $\mathcal{F}$ は単体的となる。

(5.5) 線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の完備扇 $\mathcal{F}$ を構成する次元 d の凸多面錐全体の集合を $\mathcal{F}_d$ で表す。連続写像 $\rho : \mathbb{Q}^d \to \mathbb{Q}$ が扇 $\mathcal{F}$ に関して区分的に線形であるとは、$\mathcal{F}_d$ の元に添字付けられた $\mathbb{Q}^d$ の元の集合 $\{\underline{\alpha}_{\mathcal{C}}\}_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}_d}$ が存在して $\rho(\underline{x}) = \langle \underline{\alpha}_{\mathcal{C}}, \underline{x} \rangle, {}^{\forall}\underline{x} \in \mathcal{C}$, が成立することである。このとき ρ が上に凸、つまり $\rho(\underline{x}+\underline{y}) \geq \rho(\underline{x}) + \rho(\underline{y})$ $({}^{\forall}\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{Q}^d)$ となるためには、不等式 $\langle \underline{\alpha}_{\mathcal{C}}, \underline{x} \rangle \geq \rho(\underline{x})$ が任意の $\underline{x} \in \mathbb{Q}^d$ に対して成立することが必要十分条件である。更に、等式 $\langle \underline{\alpha}_{\mathcal{C}}, \underline{x} \rangle = \rho(\underline{x})$ が成立するのは $\underline{x} \in \mathcal{C}$ かつそのときに限るならば ρ は扇 $\mathcal{F}$ に関して狭義に上に凸であると呼ばれる。

完備扇に付随するトーリック多様体が射影的であるための必要十分条件は、その扇に関して狭義に上に凸である区分的に線形な連続写像が存在することである。

(5.6) 線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の完備扇 $\mathcal{F}$ は単体的であると仮定し、f_i $(0 \leqq i < d)$ で $\mathcal{F}$ に含まれる $i+1$ 次元の凸多面錐の個数を表し、公式 (★) で数列 $h_0, h_1, \cdots, h_d$ を定義する。このとき、$\mathcal{F}$ に付随するトーリック多様体 $X(\mathcal{F})$ の cohomology 環 $H^*(X(\mathcal{F}); \mathbb{C})$ は偶数次元のところのみが出現し $H^*(X(\mathcal{F}); \mathbb{C}) = \bigoplus_{i=0}^{d} H^{2i}(X(\mathcal{F}); \mathbb{C})$ であって、しかも

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2i}(X(\mathcal{F});\mathbb{C}) = h_i \quad (0 \leqq {}^{\forall}i \leqq d)$$

である。更に $X(\mathcal{F})$ が射影的であると仮定すると強Lefschetz定理が成立する。つまり $H^2(X(\mathcal{F});\mathbb{C})$ の或る元 ω が存在して

$$H^{2i}(X(\mathcal{F});\mathbb{C}) \xrightarrow{\omega^{d-2i}} H^{2(d-i)}(X(\mathcal{F});\mathbb{C}), \quad 0 \leqq i \leqq [d/2]$$

が同型写像となる。すると $H^{2i}(X(\mathcal{F});\mathbb{C}) \xrightarrow{\omega} H^{2i+2}(X(\mathcal{F});\mathbb{C})$ は、任意の $0 \leqq i < [d/2]$ で単射、任意の $[d/2] \leqq i < d$ で全射となる。従って、数列 $h_0, h_1, \cdots, h_d$ は（対称であって、しかも）単峠 $h_0 \leqq h_1 \leqq \cdots \leqq h_{[d/2]}$ である。

（5.7）凸多面体 $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^*(d)$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の総格子型三角形分割 $\triangle$ が与えられたとき、$\triangle$ から自然に単体的完備扇 $\mathcal{F}(\triangle)$ が構成できる。即ち $\triangle$ の各単体 σ に対し、原点を端点とし σ を通過する半直線全体の和集合を $C(\sigma)$ と置けば $C(\sigma)$ は単体的凸多面錐となり、そのような $C(\sigma)$ の全体の集合が所期の単体的完備扇 $\mathcal{F}(\triangle)$ である。このとき、$X(\mathcal{F}(\triangle))$ が非特異となるための必要十分条件は $\triangle$ が圧縮的となることである。もちろん $X(\mathcal{F}(\triangle))$ は（たとえ非特異であると仮定しても）必ずしも射影的であるとは限らない。他方、$X(\mathcal{F}(\triangle))$ が非特異かつ射影的であれば $\delta(\mathcal{P})$ は単峠、即ち $\delta_0 \leqq \delta_1 \leqq \cdots \leqq \delta_{[d/2]}$ である。

【6】半順序集合に付随する凸多面体

有限半順序集合 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_d\}$ は条件『Y で $y_i < y_j$ ならば $\mathbb{Z}$ で $i < j$ である』を満たす添字が付けられていると仮定する。そして Y に含まれる鎖（全順序部分集合）の濃度の最大値を ℓ と置く。また、$\alpha \in Y$ のとき、$\alpha = \beta_0 \lneqq \beta_1 \lneqq \cdots \lneqq \beta_m$ なる Y の鎖が存在するような整数 $m \geqq 1$ の最大値を $r(\alpha)$ で表す。我々は $\mathbb{R}^d$ の点 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$ で条件

(i) $0 \leqq \alpha_i + r(\alpha_i) \leqq \ell + 1 \quad (1 \leqq {}^{\forall}i \leqq d)$,

(ii) $y_i \geqq y_j$ ならば $\alpha_i + r(\alpha_i) \leqq \alpha_j + r(\alpha_j)$

を満たすものの全体の集合を $Q(Y)$ と置く。すると、$Q(Y)$ は $\mathbb{R}^d$ の次元 d の整凸多面体であって、原点を内部に含む。つまり $Q(Y) \in \mathcal{C}_0(d)$

である。

補題 $Q(Y) \in \mathcal{C}^*(d)$ となるための必要十分条件は、Y が純、つまり Y に含まれる極大鎖の濃度がすべて等しいことである。

定理（[H_6]） 半順序集合 Y が純なとき $Q(Y) \in \mathcal{C}^*(d)$ の境界 $\partial Q(Y)$ の総格子型三角形分割 Δ で、それに付随するトーリック多様体 $X(\mathcal{F}(\Delta))$ が非特異かつ射影的であるものが存在する。

他方、$w_i = w_i(Y)$ で、次の条件を満たす $\{1, 2, \cdots, d\}$ の置換 $\pi = c_1 c_2 \cdots c_d$ の個数を表す：

（i） $y_{c_p} < y_{c_q}$ ならば $p < q$,

（ii） $\#\{p ; c_p > c_{p+1}\} = i$.

すると、$w_0 = 1$ である。また $s = \max\{i ; w_i \neq 0\}$と置けば、$s = d - \ell$ となる。我々は、数列 $w(Y) = (w_0, w_1, \cdots, w_s)$ を Y の w −列と呼ぶことにする。

一般に、$\varphi(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i \in \mathbb{R}[[\lambda]]$ で $\ell > 0$ が整数のとき $[\varphi(\lambda)]^{(\ell)} := \sum_{i=0}^{\infty} u_{i\ell} \lambda^i$ と定義する。

命題 $w(Y) = (w_0, w_1, \cdots, w_s)$を Y の w −列とし $\delta(Q(Y)) = (\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_d)$ を $Q(Y) \in \mathcal{C}_0(d)$ の δ −列とする。このとき、等式

$$(*) \quad \sum_{i=0}^{d} \delta_i \lambda^i = \left[(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{\ell})^{d+1} \sum_{j=0}^{s} w_j \lambda^j \right]^{(\ell+1)}$$

が成立する。

系 半順序集合 Y は純であると仮定し、$w(Y) = (w_0, w_1, \cdots, w_s)$を Y の w −列とせよ。このとき（＊）で定義される組合せ論的数列$(\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_d)$ は（対称かつ）単峠である。

参 考 文 献

[Dan] V. I. Danilov, The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys 33 (1978), 97 - 154.

[Ehr] E. Ehrhart, "Polynômes arithmétiques et Méthode des Polyèdres en Combinatoire," Birkhauser, Basel and Stuttgart, 1977.

[H_1] 日比孝之、「数学の宝石箱」、数学セミナー、１９８８年１２月号－１９８９年２月号、日本評論社

[H_2] _____, Some results on Ehrhart polynomials of convex polytopes, Discrete Math. 82 (1990), in press.

[H_3] _____, Dual polytopes of rational convex polytopes, submitted.

[H_4] _____, A combinatorial self-reciprocity theorem for Ehrhart quasi-polynomials of rational convex polytopes, submitted.

[H_5] _____, Ehrhart polynomials of convex polytopes, h-vectors of simplicial complexes and non-singular projective toric varieties, Proc. of the Workshop on 'Polytopes and Convex Sets' held at Rutgers University (January 8 - 12, 1990), submitted.

[H_6] _____, Toric varieties arising from canonical triangulations of poset polytopes are projective, preprint.

[Hoc] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen - Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, Ann. of Math. 96 (1972), 318-337.

[Oda] T. Oda, "Convex Bodies and Algebraic Geometry (An introduction to the theory of toric varieties)," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1988.

[Sta_1] R. P. Stanley, Hilbert functions of graded algebras, Advances in Math. 28 (1978), 57 - 83.

[Sta_2] _____, Decompositions of rational convex polytopes, Annals of Discrete Math. 6 (1980), 333 - 342.

[Sta_3] _____, "Enumerative Combinatorics, Volume I," Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, Calif., 1986.

[Sta_4] _____, On the Hilbert function of a graded Cohen - Macaulay domain, preprint.