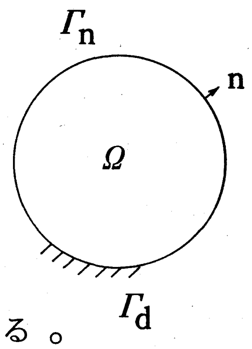
数理解析研究所講究録
第736巻 1990年 72-81

有限要素法の事後誤差評価法

三菱重工業㈱ システム技術部 馬場金司（Kinji Baba）

1. 問　題

次のようなPoisson問題を考える。



$$\nabla^2 u + f = 0 \qquad \text{in } \Omega, \qquad (1.1)$$

$$u = 0 \qquad \text{on } \Gamma_d, \qquad (1.2)$$

$$\partial u / \partial n = 0 \qquad \text{on } \Gamma_n, \qquad (1.3)$$

式（1.1）～（1.3）より弱形式の問題とする。

Find $u \in H$ s.t.

$$a(v, u) = (v, f) \qquad {}^{\forall} v \in H \qquad (2)$$

ここで、

$$H = \left\{ v \in H^1(\Omega)\ ;\ v \big|_{\Gamma_d} = 0 \right\},$$

$$a(v, u) = \iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega \quad ,$$

$$(v, u) = \iint_\Omega v u \, d\Omega \quad .$$

またノルムを次のように定義する。

$$\| v \|^2 = (v, v)$$

$$||| v |||^2 = a(v, v)$$

2. 有限要素法（FEM）とその誤差

ＦＥＭは領域をメッシュ分割し、区間多項式で構成される関数空間 $S_h \subset H$ の範囲で次の問題として考える。ただし、ここでは変位法と呼ばれる定式化を対象とする。また、メッシュ分割による Γ の近似誤差はないものとする。

$$\text{Find} \quad u_h \in S_h \quad \text{s.t.}$$

$$a(v_h, u_h) = (v_h, f) \qquad \forall v_h \in S_h . \qquad (3)$$

(3) 式のＦＥＭ解 u_h と (2) 式の解 u との誤差を考える。(3) 式では試験関数の空間を S_h 上としており、これを H で考えると、

$$a(v, u_h) = (v, f) + (v, g) \qquad \forall v \in H. \qquad (4)$$

ここで g は残差であり、具体的には次のような形となる。

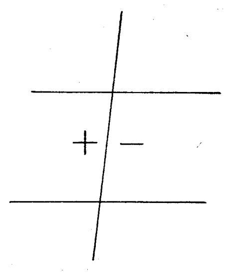
$$(v, g) = (v, \gamma) + \left\langle v, \frac{\partial u_h}{\partial n} \right\rangle_{E_B} + \left\langle v, \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right]_J \right\rangle_{E_I} \qquad (5)$$

ここで、

$$\gamma = \nabla^2 u_h + f \quad ,$$

$$\langle v, u \rangle_\Gamma = \int_\Gamma v u \, d\Gamma \quad ,$$

$$[v]_J = v\,|_+ + v\,|_- \quad .$$



E_B ; Γ_n 上の要素境界

E_I ；領域内の要素境界

誤差を $e_H = u - u_h$ とすると、(2) 式と (4) 式より

$$a(v, e_H) = (v, g) \quad \forall v \in H \qquad (6)$$

となる。つまり e_H は各要素内での残差と要素境界での不連続量をfluxとする解となる。

3. a error estinator

$S_h \subset S \subset H$ となる十分広い空間Sを考える。Sは S_h の高次化，細分割などで構成する。また $\tilde{S}$ を要素間の不連続性を許し、S_h の節点で0となる空間とする。

次の projection I

$$I \,;\, S \longrightarrow S_h$$

に対し、

$$Iv = 0 \qquad v \in \tilde{S}$$

error estinator $e_{\tilde{S}}$ を次の解とする。

$$a(v, e_{\tilde{S}}) = (v, g) \quad \forall v \in \tilde{S} \qquad (7)$$

要素毎には

$$a(v, e_{\tilde{S}})_\tau = (v, \rho)_\tau \quad \forall v \in \tilde{S} \quad , \quad \tau \in T$$

ここで、

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} g && \text{on } E_I \\ &= g && \text{on } E_B \end{aligned}$$

4. error estinator の評価

次のS上での誤差 e_S を考える。

$$a(v, e_S) = (v, g) \qquad \forall v \in S \qquad (8)$$

Lemma 1

$$|||e_H|||^2 = |||e_S|||^2 + |||e_H - e_S|||^2$$

(pf)

$e_S \in S$ であるから、

$$a(e_H, e_S) - a(e_S, e_S) = a(e_H - e_S, e_S)$$
$$= 0$$

したがって、

$$|||e_H - e_S|||^2 = |||e_H|||^2 + 2\{a(e_S, e_S) - a(e_S, e_H)\} - |||e_S|||^2$$
$$= |||e_H|||^2 - |||e_S|||^2 \qquad \square$$

境界上の評価として、次の周知のLemmaを使う。Tを要素集合とする。

Lemma 2

次のtrace不等式が成立する。$\tau \in T$, $C > 0$ をメッシュ代表長さhに依存しない定数とする。

$$|v|^2_{E_\tau} \leq C^2\{h^{-1}\|v\|^2_\tau + h\|\nabla v\|^2_\tau\}, \quad v \in H^1(\Omega)$$
$$\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{E_\tau} \leq C^2\{h^{-1}\|\nabla v\|^2_\tau + h\|\nabla^2 v\|^2_\tau\}, \quad v \in H^2(\Omega)$$

また、次のlocal inverse inequalityが成立する。

$$\|\nabla^p v\|_\tau \leq Ch^{q-p}\|\nabla^q v\|_\tau, \qquad 0 \leq q \leq p \leq 2$$

Babusku による saturation condition を仮定する。

$$|||u-u_S|||^2+\left|h^{1/2}\left[\frac{\partial(u-u_S)}{\partial n}\right]_A\right|_{E_I}^2\leq\beta^2|||u-u_h|||^2 \tag{9}$$

$$\left[v\right]_A=\frac{1}{2}\left(v|_{+}+v|_{-}\right)$$

ここで、

$$\beta=\beta(h)$$

$$\lim_{h\to 0}\beta=0$$

<u>Lemma 3</u>

saturation condition (9) 式を仮定すると、

$$\left|h^{1/2}\left[\frac{\partial e_H}{\partial n}\right]_A\right|_{E_I}\leq(C+\beta)|||e_H|||$$

(pf)

$$e_H=u-u_h$$

$$=(u-u_S)+e_S$$

であるから、

$$\left|h^{1/2}\left[\frac{\partial e_H}{\partial n}\right]_A\right|_{E_I}\leq\left|h^{1/2}\left[\frac{\partial e_S}{\partial n}\right]_A\right|_{E_I}+\left|h^{1/2}\left[\frac{\partial(u-u_S)}{\partial n}\right]_A\right|_{E_I}$$

右辺第 2 項は (9) 式より

$$\left|h^{1/2}\left[\frac{\partial(u-u_S)}{\partial n}\right]_A\right|_{E_I}\leq\beta\ |||e_H|||$$

第 1 項は Lemma 1 , 2 より

$$h\left|\frac{\partial e_S}{\partial n}\right|^2\leq Ch\{h^{-1}\|\nabla e_S\|^2+h\|\nabla^2 e_S\|^2\}$$

$$\leq C\{\|\nabla e_S\|^2+C_1\|\nabla e_S\|^2\}$$

$$\leq C_2\|\nabla e_S\|^2$$

$$\leq C_2|||e_H|||^2$$

また、要素境界上の不連続量に対して次の Lemma が成立する。

Lemma 4

$v \in \widetilde{S}$ に対して、

$$| h^{-1/2} [v]_J |_{E_I} \leq C \, |||v|||$$

(pf)

Lemma 2 より

$$|v|_\tau^2 \leq C_1 (h^{-1} \|v\|_\tau^2 + h \|\nabla v\|_\tau^2)$$

また、$v \in \widetilde{S}$ であるから、$^\exists C > 0$

$$\|v\|_\tau \leq Ch \, |||v|||_\tau$$

したがって、τ_1 と τ_2 を要素境界の両側の要素とすると、

$$| [v]_J |^2 \leq 2 (|v|_{\tau_1}^2 + |v|_{\tau_2}^2)$$
$$\leq C_2 h \, |||v|||_\tau^2 \qquad \square$$

error estimator $|||e_{\widetilde{S}}|||$ の上界評価は次のようになる。

Theorem 1

$^\exists C, C_\beta(\beta) > 0$,

$$|||e_{\widetilde{S}}||| \leq (1 + C \cdot C_\beta) \, |||e_H|||$$

(pf)

定義(6), (7)式より

$$a(v, e_{\widetilde{S}}) = (v, g)$$

$$= (v, e_H) - \left\langle [v]_J, \left[\frac{\partial e_H}{\partial n}\right]_A \right\rangle_{E_I} \qquad {}^\forall v \in \tilde{S}$$

したがって、$v \in \tilde{S}$とすると、

$$|||e_{\tilde{S}}|||^2 = (e_{\tilde{S}}, e_H) - \left\langle [e_{\tilde{S}}]_J, \left[\frac{\partial e_H}{\partial n}\right]_A \right\rangle_{E_I}$$

右辺第2項は Lemma 3 , Lemma 4 より

$$\left| \left\langle [e_{\tilde{S}}]_J, \left[\frac{\partial e_H}{\partial n}\right]_A \right\rangle_{E_I} \right| \leq \left\{ (C_1+\beta)|||e_H|||h^{-1/2} \right\} \left\{ C_2 |||e_{\tilde{S}}|||h^{1/2} \right\}$$

結局、

$$|||e_{\tilde{S}}|||^2 \leq |||e_{\tilde{S}}||| \cdot |||e_H||| + C C_\beta |||e_{\tilde{S}}||| \cdot |||e_H||| \qquad \square$$

Sとして十分広い空間を構成すると考えると、次の Lemma が成立する。

Lemma 5

saturation condition (9) 式を仮定すると、

${}^\exists \beta < 1$,

$$(1-\beta^2)^{1/2} |||e_H||| \leq |||e_S|||$$

(pf)

$$e_H - e_S = u - u_S$$

であるから、Lemma 1 および (9) 式より

$$\begin{aligned} |||e_H|||^2 &= |||e_H - e_S|||^2 + |||e_S|||^2 \\ &\leq \beta^2 |||u - u_h|||^2 + |||e_S|||^2 \\ &= \beta^2 |||e_H|||^2 + |||e_S|||^2 \qquad \square \end{aligned}$$

また、$|||e_S|||$ と $|||e_{\tilde{S}}|||$ の関係は次のようになる。

Lemma 6

$^{\exists}C>0$,

$|||e_S||| \leq (1+C)\,|||e_{\tilde{S}}|||$

(pf)

$v\in S$ とすると、

$v-Iv\in\tilde{S}$

であるから、

$$a(v,e_{\tilde{S}})=a(v-Iv,e_{\tilde{S}})+a(Iv,e_{\tilde{S}})$$
$$=(v-Iv,g)+a(Iv,e_{\tilde{S}})$$
$$=(v,g)+a(Iv,e_{\tilde{S}}) \qquad {}^{\forall}v\in S$$

ここで g が S_h と直交していることを使った。 また

$v\in S$ の時、

$a(v,e_S)=(v,g)$

であるから、

$a(v,e_S)=a(v,e_{\tilde{S}})-a(Iv,e_{\tilde{S}})$

$v=e_S$ とすると、

$$|||e_S|||^2 \leq |||e_S|||\cdot|||e_{\tilde{S}}|||+C\,|||e_S|||\cdot|||e_{\tilde{S}}||| \qquad \Box$$

Lemma 5 , 6 より $|||e_{\tilde{S}}|||$ の下界評価を得る。

Theorem 2

saturation condition (9) 式を仮定すると、

$$^{\exists}C > 0 \quad ,$$

$$\frac{(1-\beta)^{1/2}}{(1+C)} \, |||\, e_H \, ||| \leq |||\, e_{\tilde{S}} \, |||$$

5. あとがき

事後誤差評価は計算結果の品質管理の上で実用上重要な問題である。この手法に関しては多くの方法が提案されており、評価精度と共に計算の簡便さが必要となる。

ここでは計算例については省略しているが、解析解などとの比較では十分実用的である。実機規模の例に対しては、より多くの検証が必要である。

また、一般的に計算結果の事後処理として、ここで述べた誤差評価と共に、結果の補正などへの数学的解析の適用が有効と考えられる。

参考文献

1) "Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations" ed. I. Babusla, O.C. Zienkiewicz, I. Gago, E. R. de A. Oliverira John Wiley & Sons '86

2) A. K. Noor, I. Babuska "Quality assessment and control of finite element solutions" Finite Elements in Analysis and Design Vol.3 pp 1～26 '87

3) I. Babuska, W. C. Rheinboldt "A posteriori error estimates for the finite element method" Int. J. Numer. Meths. Engrg Vol. 12 pp1597～1615 '78

4) R. E. Bank, A. Weiser "Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations" Math. Comp. Vol.44 pp283～301 '85

5) D. W. Kelly "The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finlte element method" Int. J. Numer. Meths. Engrg Vol.20 pp1491-1506 '84

6) O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu "Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems" Int. J. Numer. Meths. Engrg Vol.28 pp 2839 ～ 2853 '89

7) 馬場金司 "有限要素法の事後誤差評価" 数学会応用数学分科会講演アブストラクト '88 秋