数理解析研究所講究録
第 737 巻 1990 年 42-49

Crystal Bases of $U_q(\mathfrak{g})$

京大数研　柏原正樹

1. 統計力学における可解模型構成のために，Q-analogue of Universal enveloping algebra が神保・Drinfeld により独立に導入されてから既に5年たつ。$U_q(\mathfrak{g})$ はパラメーター q を含み，$q=1$ の時 universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ に一致する。可解模型においては，q は温度の parameter であり，$q=0$ が丁度絶対温度零度にあたる。そこで $q=0$ においては，現象が簡単化されると期待される。

2. $P=\bigoplus_i \mathbb{Z}\alpha_i$　$\mathfrak{t}^*=\bigoplus \mathbb{Q}\alpha_i$，(,) を $\mathfrak{t}^*$ 上の内積で

① $(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbb{Z}_{>0}$

② $\left(\dfrac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\right)_{i,j}$ が一般Cartan matrix

となるようなものとする。その時，$U_q(g)$ は

t_i, e_i, f_i, t_i^{-1} で生成された $\underbrace{\text{algebra}}_{Q(q)\text{上の}}$ で

$$t_i e_j t_i^{-1} = q^{2(\alpha_i, \alpha_j)} e_j$$

$$t_i f_j t_i^{-1} = q^{-2(\alpha_i, \alpha_j)} f_j$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$$

$$\sum (-)^n e_i^{(n)} e_j e_i^{(b-n)} = \sum (-)^n f_i^{(n)} f_j f_i^{(b-n)} = 0$$

$$\text{for } i \neq j, \quad b = 1 - \frac{2(\alpha_i\, \alpha_j)}{(\alpha_i\, \alpha_i)}$$

を基本関係式とするものである

但し $q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)}$

$$e_i^{(n)} = e_i^n / [n]_i! \quad f_i^{(n)} = f_i^n / [n]_i!$$

$$[n]_i = \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad [n]_i! = \prod_{k=1}^{n} [k]_i$$

Comultiplication $\Delta : U_q(\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$

を $\Delta(t_i) = t_i \otimes t_i$

$\Delta(e_i) = e_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes e_i$

$\Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + t_i \otimes f_i$

とする

3. $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ と $U_q(\mathfrak{g})$-module M に対して

$$M_\lambda = \{ u \in M \,;\, t_i u = q^{2(\alpha_i, \lambda)} u \}$$

とおく。 $U_q(\mathfrak{g})$-module M が integrable とは

a) $M = \bigoplus M_\lambda$

b) $\dim M_\lambda < \infty$

c) $\forall i$ に対して，M は (e_i, f_i) で生成される algebra の有限次元表現の和

となるものとする。

今 $P = \{ \lambda \in \mathfrak{t}^* \,;\, \langle h_i, \lambda \rangle \underset{\mathrm{def}}{=} 2(\alpha_i, \lambda)/(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbb{Z} \}$

とおくと $M=\bigoplus_{\lambda\in P} M_\lambda$ となる。

又 $M=\bigoplus_{\substack{\lambda\in P\\ \langle h_i,\lambda\rangle\geq k\geq 0}} f_i^{(k)}(\operatorname{Ker} e_i\cap M_\lambda)$

となる。そこで

$$\begin{cases} \tilde{e}_i(f_i^{(k)}u)=f_i^{(k-1)}u \\ \tilde{f}_i(f_i^{(k)}u)=f_i^{(k+1)}u \end{cases}$$

により $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i\in \operatorname{End}(M)$ を define する。

$A=\{f\in \mathbb{Q}(q)\,;\, f$ は $q=0$ で regular$\}$

<u>定義</u> (L,B) が integrable $U_q(\mathfrak{g})$-module M の crystal base とは 次の条件が満たされる事。

1) $L\subset M$ は free A-module で $\mathbb{Q}(q)\otimes_A L\cong M$

2) $B\subset L/qL$ は base

3) $\tilde{e}_i L\subset L$, $\tilde{f}_i L\subset L$, $\tilde{e}_i B\subset B\sqcup\{0\}$, $\tilde{f}_i B\subset B\sqcup\{0\}$

4) $L=\bigoplus L_\lambda$, $B=\sqcup B_\lambda$。ここに

$L_\lambda = L \cap M_\lambda$; $B_\lambda = B \cap (L_\lambda / q L_\lambda)$

5) $b, b' \in B$ のとき, $b' = \tilde{f}_i b \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'$。

さて $\lambda \in P_+ = \{\lambda \in P ; \langle h_i, \lambda\rangle \geq 0\}$ のとき, $V(\lambda)$ を λ を heighest weight とする既約表現とする。従って

$V(\lambda) = U_q(g) u_\lambda$

で u_λ の基本関係式は

$t_i u_\lambda = q^{2(\alpha_i, \lambda)} u_\lambda$

$e_i u_\lambda = 0$

$f_i^{1+\langle h_i, \lambda\rangle} u_\lambda = 0$ 。

$L(\lambda)$ を u_λ を含み $\tilde{f}_i$ で不変な最小の A-module, $B = \{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_k} u_\lambda \bmod qL\} \setminus \{0\}$ $\subset L(\lambda)/qL(\lambda)$ とおく。

<u>定理</u> $(L(\lambda), B(\lambda))$ は $V(\lambda)$ の crystal base.

定理　M が $\bigoplus_j V(\lambda_j)$ と同型な $U_q(\mathfrak{g})$-module, (L,B) をその crystal base とすると同型 $M \cong \bigoplus_j V(\lambda_j)$ が存在してそれにより
$(L,B) \cong \bigoplus (L(\lambda_j), B(\lambda_j))$

定理　M_1, M_2 を integrable $U_q(\mathfrak{g})$-modules, (L_j, B_j) を M_j の crystal base $(j=1,2)$ とするとき，$L = L_1 \otimes L_2$　$B = B_1 \otimes B_2 \subset L/qL$ とおくと (L,B) は $M_1 \otimes M_2$ の crystal base。更に
$u_j \in B_j$　$(j=1,2)$ とすれば．

$$\tilde{f}_i(u_1 \otimes u_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i u_1 \otimes u_2 & \text{if } \exists n \geq 1 \text{ s.t. } \tilde{f}_i^n u_1 \neq 0,\ \tilde{e}_i^n u_2 = 0 \\ u_1 \otimes \tilde{f}_i u_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i(u_1 \otimes u_2) = \begin{cases} u_1 \otimes \tilde{e}_i u_2 & \text{if } \exists n \geq 1 \text{ s.t. } \tilde{e}_i^n u_2 \neq 0 \ \& \ \tilde{f}_i^n u_1 = 0 \\ \tilde{e}_i u_1 \otimes u_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. Crystal Graph

(L, B) を crystal base とすれば，crystal graph とは I を color とする色つき oriented graph で B をその頂点とするもので

$$u \xrightarrow{\ i\ } v \iff v = \tilde{f}_i u$$

その時，M の分解（既約成分への）は B の分解と対応する。これにより，integrable $U_q(\mathfrak{g})$-modules $(\cong \oplus V(\lambda_j))$ のつくる tensor Category は crystal graph により完全に記述される。

5) Global base

$U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g})$ を $e_i^{(n)}, f_i^{(n)}$ で生成される

$U(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ subalgebra,

$V^{\mathbb{Z}}(\lambda) = U^{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g})u_\lambda$ とする。

その時

$$V^{\mathbb{Z}}(\lambda) \cap L(\lambda) \cap L(\lambda)^{-} \xrightarrow{\sim} L(\lambda)/qL(\lambda)$$

但し $-$ は $V(\lambda)$ の automorphism で

$$\overline{u_\lambda} = u_\lambda, \quad \overline{f_i u} = f_i \bar{u}$$
$$\overline{qv} = q^{-1}\bar{v}$$

をみたすもの。

$b \in L(\lambda)/qL(\lambda)$ に対して $\mathcal{P}(b) \in V^{\mathbb{Z}}(\lambda) \cap L(\lambda)$ $\cap L(\lambda)^{-}$ を対応するとする。

<u>Thm</u>
$$\begin{cases} V^{\mathbb{Z}}(\lambda) = \bigoplus_{b \in B(\lambda)} \mathbb{Z}[q,q^{-1}]\mathcal{P}(b) \\ V^{\mathbb{Z}}(\lambda) \cap f_i^n V(\lambda) = \bigoplus_{b \in \tilde{f}_i^n B(\lambda) \setminus \{0\}} \mathbb{Z}[q,q^{-1}]\mathcal{P}(b). \end{cases}$$