数理解析研究所講究録
第 738 巻 1991 年 48-52

On a Stable Manifold Theorem for the Harmonic Map Heat Flow

名古屋大学 理学部 内藤 久資 (Hisashi NAITO)

1. Introduction.

このノートでは, 準線型放物型方程式の安定多様体の存在定理を紹介する. この内容は [N3,N4] を元にした. また, 調和写像についての記法等については J. Eells-L. Lemaire [EL] を参照されたい.

M を閉 Riemann 多様体, V を M 上の vector bundle とする. 我々が考える方程式は以下のようなものである. V の section $u(\cdot, t)$ に対する方程式:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -J(u) + N(u) & \text{on} \quad M \times (0, \infty] \\ u(0) = u_0 & \text{on} \quad M, \end{cases}$$

であって, 以下の条件 (C1)–(C3) をみたす.

(C1) J は $2k$ 階の self-adjoint elliptic operator, N は非線型項を表す,

(C2) V の zero-section 0 に対して, $J(0) = N(0) = 0$, 即ち, 0 は (1.1) の定常解,

(C3) 非線型項 N は $m > \dfrac{1}{2} \dim M + k$ と, $\|u\|_{H^m}$, $\|v\|_{H^m} < 1$ に対して,

$$\|N(u) - N(v)\|_{H^{m-k}} \le C(\|u\|_{H^m}\|u - v\|_{H^{m+k}} + \|v\|_{H^{m+k}}\|u - v\|_{H^m})$$

をみたす.

ここで, $H^m(V)$ は V の section に対する m 階の Sobolev 空間を表す. この Sobolev 空間は $m > \dfrac{1}{2} \dim M$ のとき, Hilbert 多様体になることが知られている. (See R. Palias [**P**]).

次に, 方程式 (1.1) に対する安定多様体, 不安定多様体の定義を述べる.

定義: Hilbert 多様体 $H^m(V)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が (1.1) の定常解 u_∞ の安定多様体であるとは,

(1) $\mathcal{S}$ は $H^m(V)$ の部分多様体の構造を持つ,

(2) 方程式 (1.1) の初期データー u_0 が $\mathcal{S}$ に属すとき, (1.1) の時間大域解が存在して, その解は $t \to \infty$ で u_∞ に $H^m(V)$ の位相で収束する.

また, $H^m(V)$ の部分集合 $\mathcal{U}$ が (1.1) の定常解 u_∞ の不安定多様体であるとは, (1.1) の逆向きの方程式に関する安定多様体であることを言う.

このとき, 定理は次のように述べられる.

Theorem 1. $m > \dfrac{1}{2}\dim M + 2k$ に対して,

(1) $H^m(V)$ の中で, *codimension* 有限な 0 の安定多様体が存在する. その *codimension* は $-J$ の負, 零の固有空間の次元に等しい.

(2) $H^m(V)$ の中で, *dimension* 有限な 0 の不安定多様体が存在する. その *dimension* は $-J$ の負の固有空間の次元に等しい.

定理 1 を適用できる方程式の例として, 調和写像の流れの方程式 (Eells-Sampson 方程式) を考える. M, N を閉 Riemann 多様体とする. 滑らかな写像 $f : M \times [0, \infty) \longrightarrow N$ に対して, 調和写像の流れの方程式は以下のように書かれる 2 階半線型放物型方程式である:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \tau_f & \text{on} \quad M \times (0, \infty] \\ f(0) = f_0 & \text{on} \quad M. \end{cases}$$

ここで, $F : M \longrightarrow N$ が調和写像であるとは, F は M 上の 2 階半線型楕円型方程式 $\tau_f = 0$ をみたすことである. この方程式に対して定理 1 を適用するため, 方程式 (1.2) の "線型化方程式" を考える. 調和写像 $F : M \longrightarrow N$ を 1 つ固定すると, $f : M \longrightarrow N$ が $\sup_{x\in M} d_N(F(x), f(x)) < i_N$ をみたせば, f は vector bundle: $F^{-1}TN$ の適当な section u を選ぶことによって

$$f(x) = \exp_{F(x)} u(x)$$

と書くことができる. ここで, d_N は N の Riemann 計量から決まる距離, i_N は N の単射半径を表す. このとき, 方程式 (1.2) を u をつかって表現すると

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -J_F(u) + N_F(u) & \text{on} \quad M \times (0, \infty] \\ u(0) = u_0 = (\exp_{F(x)})^{-1} f_0 & \text{on} \quad M, \end{cases}$$

と書くことができる. ここで, J は調和写像 F の Jacobi 作用素. また方程式 (1.3) が条件 (C1)–(C3) をみたすことが容易に確かめられる. したがって, 方程式 (1.2) に対して安定多様体の存在を示すことができる.

Theorem 2. M, N を閉 *Riemann* 多様体とする．任意の調和写像 $F : M \longrightarrow N$ と $m > \frac{1}{2}\dim M + 2$ に対して，

(1) $H^m(M,N)$ のなかで，*codimension* 有限な F の安定多様体が存在し，その *codimension* は F の *Index* と *Nullity* の和に等しい，

(2) $H^m(M,N)$ のなかで，*dimension* 有限な F の不安定多様体が存在し，その *dimension* は F の *Index* に等しい．

ここで，$H^m(M,N)$ は M から N への写像の m 階 Sobolev 空間である．また，調和写像 F が強安定または弱安定のときは更に詳しいことがわかる．

F **が強安定のとき:** 調和写像 F が強安定とは F の Index, Nullity がともに 0 のときのことを言う．これは Jacobi 作用素 J_F の固有値がすべて正であること．このとき，$H^m(M,N)$ の F のある近傍 U が存在して，U が F の安定多様体となる．[**N1,N2**]．

F **が弱安定のとき:** 調和写像 F が弱安定とは F の Index が 0 のときのことを言う．これは Jacobi 作用素 J_F の固有値がすべて非負であること．さらに，F に次の条件を課す．F の含まれる臨界集合が Bott の意味で非退化であるとき，$H^m(M,N)$ の F のある近傍 U が存在して，U に初期値を持つ方程式 (1.2) の解は時間大域的であって，$t \to \infty$ のとき，解は調和写像に収束する．一般には収束する先の調和写像は F と一致しない．

ここで，時刻無限大での収束はすべて指数的であることも示すことができる．

また，Yang-Mills 汎関数の流れの方程式についても同様の結果が小薗英雄氏，前田吉昭氏及び筆者によって示されている．[**NKM1,NKM2**]．

2. 定理 1 の証明の概略.

作用素 $-J$ の正の固有値を $\{\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_N\}$，負の固有値を $\{\lambda_{-1} \geq \cdots \geq \lambda_{-m} \geq \cdots \nearrow \infty\}$ とする．正数 λ を $\lambda := \min\{|\lambda_{-1}|, |\lambda_1|\}$ とおく．

正，負，零固有空間への射影作用素をそれぞれ π_+，π_-，π_0 と書く．このとき，Sobolev 空間 $H^m(V)$ の norm を

$$\|u\|_{H^m}^2 := \|J^{m/2k}\pi_- u\|_{L^2}^2 + \|\pi_0 u\|_{L^2}^2 + \|\pi_+ u\|_{L^2}^2$$

と定義する．ここで，$\mathrm{Im}(\pi_+ + \pi_0)$ は有限次元空間なので，すべての norm は同値である．このように定義した norm は，局所座標系と使って通常の方法で定義した Sobolev norm と同値である．

また，$L^2(\mathbb{R}_+; H^{m+k}(V)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; H^k(V))$ の部分空間 $\mathcal{B}_{\mu,m}$ の norm を

$$|u|_{\mu,m}^2 := \int_0^\infty \|u(t)\|_{H^{m+k}}^2\,dt + \sup_{t>0}\left[e^{2\mu t}\|u(t)\|_{H^m}^2\right]$$

で定義すると，$\mathcal{B}_{\mu,m}$ は Banach 空間になる．

方程式 (1.1) の解の構成をするため，$\mathcal{B}_{\mu,m}$ で次の積分作用素を考える：

$$\begin{aligned} Tu(t) := e^{-Jt}\pi_- u_0 + \int_0^t e^{-J(t-s)}\pi_- N(u)(s)\,ds \\ - \int_t^\infty \pi_0 N(u)(s)\,ds - \int_t^\infty e^{-J(t-s)}\pi_+ N(u)(s)\,ds. \end{aligned}$$

この作用素 T の $\mathcal{B}_{\mu,m}$ での固定点が方程式 (1.1) の解に対応する．このようにして構成した解の初期値は，

$$u(0) := \pi_- u_0 - \int_0^\infty \pi_0 N(u)(s)\,ds - \int_0^\infty e^{Js}\pi_+ N(u)(s)\,ds$$

となることに注意する．

積分作用素 T に対して次の評価式を示すことができる．

Theorem 3. $m > \frac{1}{2}\dim M + 2k$, $0 < \mu < \lambda$, $|u|_{\mu,m}$, $|v|_{\mu,m} < 1$ に対して，

(1) $|Tu|_{\mu,m}^2 \le C_1(\|\pi_- u_0\|_{H^m}^2 + |u|_{\mu,m}^4)$,

(2) $|Tu - Tv|_{\mu,m}^2 \le C_2(|u|_{\mu,m}^2 + |v|_{\mu,m}^2)|u-v|_{\mu,m}^2$.

この定理によって，適当な初期値に対して方程式 (1.1) の解の存在を示すことができる：

Corollary 4. $m > \frac{1}{2}\dim M + 2k$, $0 < \mu < \lambda$ に対して，ある正数 ε が存在して，

$$|e^{-Jt}u_0|_{\mu,m} < \varepsilon$$

をみたす $u_0 \in \mathrm{Im}\,\pi_-$ に対して

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -J(u) + N(u) & on \quad M \times (0,\infty] \\ \pi_- u(0) = u_0 & on \quad M, \end{cases}$$

の解が $\mathcal{B}_{\mu,m}$ の中に存在して，その解 u は $|u|_{\mu,m} < \varepsilon$ をみたす．

系 4 から方程式 (1.1) の定常解 0 に対する安定多様体の存在を容易に導くことができる．

References.

[EL] J. Eells and L. Lemaire, "Selected Topics in Harmonic Maps," C. B. M. S. Regional Conference Serise in Math. 50, 1983.

[N1] H. Naito, *Asymptotic behavior of solutions to Eells–Sampson equations near stable harmonic maps*, to appear in Math. Z..

[N2] H. Naito, *Asmptotic behavior of solutions to Eells-Sampson equation*, 数理解析研究所講究録 **626** (1987), 96–114.

[N3] H. Naito, *A stable manifold theorem for a quasi-linear parabolic equations and asymptotic behavior of the gradient flow for geometric variational problems*, Compositio Mathematica **68** (1988), 221–239.

[N4] H. Naito, *A stable manifold theorem for quasi-linear parabolic equations and geometric variational problems*, to appear in Recent Topics in Non-linear partial differential equations.

[NKM1] H. Naito, H. Kozono and Y. Maeda, *A stable manifold theorem for the Yang-Mills gradient flow*, to appear in Tôhoku Math. J..

[NKM2] H. Naito, H. Kozono and Y. Maeda, *Asymptotic behavior of Yang-Mills gradient flow*, to appear Lecture Note in Math., Springer.

[P] R. Palais, "Foundations in Non–linear Global Analysis," Benjamin, New York, 1967.

これ以外の文献については，**[N3,NKM1]** の文献表を参照して下さい．