

正の分散を持つ Kadomtsev-Petviashvili 方程式の multi-hump 解

周期ソリトンの相互作用

大阪府大 工 村上 洋一 (Youichi MURAKAMI)

田尻 昌義 (Masayoshi TAJIRI)

1. はじめに

空間的に 2 次元及び 3 次元の非線形波動のダイナミックスは可積分系 (ソリトン方程式) ですら 1 次元系に比較して十分に理解されているとは言いがたい。その理由の一つは空間的に局在した構造として種々のものが考えられることであろう。

そこで我々はソリトン方程式の代表例として、2 次元の長波長の波を記述する Kadomtsev-Petviashvili 方程式 (K-dV 方程式の 2 次元版) の厳密解について考察する。その解のうち 2 次元特有の構造を持つ周期ソリトン解の相互作用を明らかにする。

まず、Kadomtsev-Petviashvili 方程式の解の性質を中心としたリヴィエウを行う。次に、周期ソリトン解の求め方とその基本的な性質について述べる。3 節で、Y 周期ソリトン (周期ソリトンの特別な場合で Y 方向に周期構造を持つ。) の相互作用を記述する厳密解 (2-ソリトン解) を与え、その特徴

を解析する。最後に、この研究のまとめと今後の課題について簡単に述べる。

2. Kadomtsev-Petviashvili 方程式

Kadomtsev-Petviashvili 方程式は、次のように書かれる。

$$(u_t + 6u u_x + u_{xxx})_x + s u_{yy} = 0, \quad s = \pm 1 \quad (1)$$

彼らは、Kd-V方程式で記述される1次元的なソリトン（進行方向（X）の横方向（Y）に一様な解）に横方向の長波長攪乱を加えたときの安定性を議論するためにこの方程式を導出した。（Kadomtsev-Petviashvili(1970)）そこで、彼らは、負の分散の場合（ $S = +1$ ）は、線形安定であり、正の分散の場合（ $S = -1$ ）は、線形不安定であるという結論を得た。従って、正の分散と負の分散では解の性質が非常に異なり、正の分散の場合は、2次元的に局在した構造が存在する事を示唆している。物理現象のうち、負の分散の例としては、重力波（水の波）が有名であり、正の分散の例としては、重力表面張力波がある。これらは、流体物理の分野から選んだものである。

(1)式は、逡減摂導法により弱分散性の媒質中の2次元の長波長波を一般的に記述する事が示される。他の分野、例えばプラズマ中の波などこの方程式で記述される現象は多い。総合報告としては、Freeman(1980), Novikov et al.(1984)を挙げておく。

この方程式は、通常の $Kd - V$ ソリトンと同型の 1 次元ソリトン解が存在する。

$$u = 2 K^2 \operatorname{sech}^2 (Kx + Ly - \Omega t + \eta_0) \quad (2)$$

$$K\Omega - SL^2 - K^4 = 0$$

これは、通常の Y 方向に一様な $Kd - V$ ソリトンを XY 平面内で斜めに傾けたものである。この解の任意個数を重ね合わせた解、すなわち、 N ソリトン解が存在することは、逆散乱法を用い Zakharov and Shabat (1974) によって示されている。また、Satsuma (1976) は、広田の方法を用いてこの解を求めている。Zakharov and Shabat (1974) は、無限個の保存量も求めており、この方程式がいわゆるソリトン方程式であることは、疑いない。またこの解は、ソリトン共鳴を起こす例として有名である。(Miles (1977)) ソリトン共鳴とは簡単に言うと次のようになる。2 つのソリトン間の相互作用を考えると一般に衝突前と衝突後で位相のずれを生じる。この位相のずれが無限大になり、衝突前と衝突後の時間間隔が無限大となることを言う。現象としては、衝突して離れないということになり、強い相互作用とも呼ばれる。この場合も分散の符号で性質が異なり、負の分散の場合 ($S = +1$) は、ソリトン共鳴が生じ、正の分散の場合 ($S = -1$) は、生じないことが知られている。(矢嶋 (1981))

正の分散の場合には、代数ソリトン解が、Manakao et al. (1977) と Ablowitz and Satsuma (1978) によって得られている。

$$u = \frac{4r^2 [r^4 Y^2 - r^2 (X + sY)^2 + 1]}{[r^4 Y^2 + r^2 (X + sY)^2 + 1]^2} \quad (3)$$

$$X = \alpha - \frac{3}{4} (r^2 + s^2) t + \frac{1}{r}, \quad Y = \sqrt{3} y + \frac{3}{2} s t$$

2次元的に局在しており異方性があり進行方向にへこんでいる。(Freeman(1980)を参照。)注目すべき性質としては、代数ソリトン間での衝突によって位相のずれが常に0になるという事がある。(Manakov et al.(1977))

さらに正の分散の場合には、周期ソリトン解と我々が呼ぶ解が存在する。

解の表式は

$$u = 2 [(\alpha^2 - \beta^2 / K) - ((\alpha^2 - \beta^2) / \sqrt{K}) \cosh(\alpha x + \tau y - \Omega t + \tilde{\sigma}) \cos(\beta x + \delta y - \Omega t + \theta) - (2\alpha\beta / \sqrt{K}) \sinh(\alpha x + \tau y - \Omega t + \tilde{\sigma}) \sin(\beta x + \delta y - \Omega t + \theta)] /$$

$$[\cosh(\alpha x + \tau y - \Omega t + \tilde{\sigma}) - (1 / \sqrt{K}) \cos(\beta x + \delta y - \Omega t + \theta)]^2, \quad (4)$$

パラメータは任意に取れず、次の条件を満たす必要がある。

$$(\beta r - \alpha s)^2 > 3\alpha^2 (\alpha^2 + \beta^2)^2 \quad (5)$$

図1-1に示すように、代数ソリトンが斜めに周期的に並んでいるように見える。(Tajiri and Murakami(1989)) 実際は、無限に並んでいる。特別な場合として、X方向に並んでいる周期ソリトン(X周期ソリトン)およびy方向に並んでいる周期ソリトン(Y周期ソリトン)は既に Zaitsev(1983)と Abramyan and Stepanyants(1985)によって得られている。それらの例は図1-2、3に示されている。これらの論文には、進行波解(1-ソリトン)の

みを求めており、それらの相互作用を取り扱うことはできない。本研究では、それらの相互作用を記述する枠組みで周期ソリトン解を求め、Y周期ソリトンの相互作用を明らかにする。

3. 周期ソリトン

普通のNソリトン解（平面ソリトン）は、双一次変換法（広田の方法）により、以下のように与えられる。（Satsuma(1976)）

$$u = 2(\log f)_{xx}, \quad (6a)$$

$$f = \sum_{\mu=0,1} \exp \left[\sum_{j < m}^{(N)} \phi(j,m) \mu_j \mu_m + \sum_{j=1}^N \mu_j \eta_j \right], \quad (6b)$$

$$\eta_j = K_j x + L_j y - \Omega_j t - \eta_j^0, \quad (6c)$$

$$K_j \Omega_j - s L_j^2 - K_j^4 = 0, \quad (6d)$$

ソリトンの分散関係と呼ばれる。

$$\exp[\phi(j,m)] \quad (6e)$$

$$= -[(K_j - K_m)(\Omega_j - \Omega_m) - s(L_j - L_m)^2 - (K_j - K_m)^4]$$

$$/ [(K_j + K_m)(\Omega_j + \Omega_m) - s(L_j + L_m)^2 - (K_j + K_m)^4],$$

(6d) を $D(K, L, \Omega) = 0$ と書くことにする。

周期ソリトン解は、2 (平面) ソリトン解で通常実数に取る波数 (K, L) を次のように複素共役をとり代入することによって得られる。(Tajiri and Murakami(1989))

$$N=2, K_1=\alpha+i\beta, K_2=\alpha-i\beta, L_1=\tau+i\delta, L_2=\tau-i\delta, \quad (1a)$$

$$-\eta_1^0 = -\eta_2^{0*} = \log(a/2) + i\theta, \exp(i\theta) = -(1/\alpha^2) \exp(\sigma + i\theta),$$

$$f = 1 + (a^2 K / 4\alpha^4) \exp[2(\alpha x + \tau y - \Omega_r t + \sigma)] \quad (1b)$$

$$- (a/\alpha^2) \exp(\alpha x + \tau y - \Omega_r t + \sigma) \cos(\beta x + \delta y - \Omega_i t + \theta),$$

$$\Omega_r = \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + s(\alpha\tau^2 - \alpha\delta^2 + 2\beta\tau\delta) / (\alpha^2 + \beta^2), \quad (1c)$$

$$\Omega_i = 3\alpha^2\beta - \beta^3 + s(2\alpha\tau\delta - \beta\tau^2 + \beta\delta^2) / (\alpha^2 + \beta^2), \quad (1d)$$

$$K = -[3\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 - s(\beta\tau - \alpha\delta)^2] / [3\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 - s(\beta\tau - \alpha\delta)^2] \quad (1e)$$

1 周期ソリトン解

$$u = 2 \left[(\alpha^2 - \beta^2 / \sqrt{K}) - ((\alpha^2 - \beta^2) / \sqrt{K}) \cosh(\alpha x + \tau y - \Omega_r t + \sigma) \cos(\beta x + \delta y - \Omega_i t + \theta) \right. \\ \left. - (2\alpha\beta / \sqrt{K}) \sinh(\alpha x + \tau y - \Omega_r t + \sigma) \sin(\beta x + \delta y - \Omega_i t + \theta) \right] / \quad (4)$$

$$\left[\cosh(\alpha x + \tau y - \Omega_r t + \sigma) - (1/\sqrt{K}) \cos(\beta x + \delta y - \Omega_i t + \theta) \right]^2$$

存在条件は、解が発散しない (分母が0にならない) という条件で与えられる。

$$K > 1 \quad (5)'$$

この解法の利点は周期ソリトン、平面ソリトン、および代数ソリトンの相互作用を自然に記述できることである。例えば、4ソリトン解で複素共役を2組代入することによって2つの周期ソリトンの相互作用を記述する解が得られる。

Y周期ソリトンの相互作用を明らかにする前にY周期ソリトンの表式と簡単な性質について述べる。

$$u = \frac{2\alpha^2 K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{K}} \cosh(\alpha x - \Omega r t + \sigma) \cos(\delta y + \theta) \right]}{\left[\sqrt{K} \cosh(\alpha x - \Omega r t + \sigma) - \cos(\delta y + \theta) \right]^2} \quad (8)$$

(1) 存在条件がある。 $\delta^2 > 3\alpha^2$

(2) 展開すると ($\alpha x - \Omega r t \ll 1$, $\delta y \ll 1$) 代数ソリトンと同型になる。

(3) 速度は、 $\alpha^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^2}$ で与えられ、常にxの正の方向に進む。

δ をとめて、 α を大きくすると速度は小さくなる。(存在条件がある。)

この伝搬特性は、Kd-Vソリトンと逆であり、Kd-Vソリトンと異なる相互作用をすることを示唆している。

(4) 振幅の最大値は、 $2\alpha^2 \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K}-1}$ で与えられる。

4. Y-周期ソリトンの相互作用

2 Y-周期ソリトン解は次のように与えられる。

$$u = 2(\log f)_{xx},$$

$$\begin{aligned} f = & 1 + K_1/(4\alpha_1^4)\exp(2\xi_1) + K_2/(4\alpha_2^4)\exp(2\xi_2) \\ & + K_1K_2L_1^2L_2^2/(16\alpha_1^4\alpha_2^4)\exp[2(\xi_1 + \xi_2)] \\ & - 1/\alpha_1^2\exp(\xi_1)[1 + K_2L_1L_2/(4\alpha_2^4)\exp(2\xi_2)]\cos(\eta_1) \\ & - 1/\alpha_2^2\exp(\xi_2)[1 + K_1L_1L_2/(4\alpha_1^4)\exp(2\xi_1)]\cos(\eta_2) \\ & + 1/(2\alpha_1^2\alpha_2^2)\exp(\xi_1 + \xi_2)[L_1\cos(\eta_1 + \eta_2) + \\ & \qquad \qquad \qquad L_2\cos(\eta_1 - \eta_2)], \end{aligned} \tag{9a}$$

where

$$K_j = \delta_j^2/(\delta_j^2 - 3\alpha_j^4), \tag{9b}$$

$$\begin{aligned} L_1 = & [3(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 - \delta_2/\alpha_2)^2]/ \\ & [3(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 - \delta_2/\alpha_2)^2], \end{aligned} \tag{9c}$$

$$\begin{aligned} L_2 = & [3(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 + \delta_2/\alpha_2)^2]/ \\ & [3(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 + \delta_2/\alpha_2)^2], \end{aligned} \tag{9d}$$

$$\xi_j = \alpha_j x - \Omega_j t + \sigma_j, \tag{9e}$$

$$\eta_j = \delta_j x + \theta_j, \tag{9f}$$

with

$$\Omega_j = \alpha_j^3 + \delta_j^2/\alpha_j, \quad j = 1, 2. \tag{9g}$$

位相のずれは、衝突前の漸近表示 (10) と衝突後の漸近表示 (11) を用いることによって、 $\Gamma = \text{LOG}(L_1 L_2)$ であることがわかる。

衝突前

$$f_1(\xi_1, \eta_1) = 1 + K_1/4\alpha_1^4 \exp(2\xi_1) - 1/\alpha_1^2 \cos(\eta_1), \quad (10a)$$

$$f_2(\xi_1, \eta_2, L_1 L_2) = K_1/4\alpha_1^4 \exp(2\xi_1) [1 + K_2 L_1^2 L_2^2 / 4\alpha_2^4 \exp(2\xi_2) - L_1 L_2 / \alpha_2^2 \exp(\xi_2) \cos(\eta_2)], \quad (10b)$$

衝突後

$$f_1(\xi_1, \eta_1, L_1 L_2) = K_2/4\alpha_2^4 \exp(2\xi_2) [1 + k_1 L_1^2 L_2^2 / 4\alpha_1^4 \exp(2\xi_1) - L_1 L_2 / \alpha_1^2 \exp(\xi_1) \cos(\eta_1)], \quad (11a)$$

$$f_2(\xi_2, \eta_2) = 1 + K_2/4\alpha_2^4 \exp(2\xi_2) - 1/\alpha_2^2 \exp(\xi_2) \cos(\eta_2), \quad (11b)$$

$|L_1 L_2| < 1$ は 離れることを意味し、 $|L_1 L_2| > 1$ は 近づくことを意味する。

注目すべき点は、 $L_1 L_2$ が負になりうる点であり、このときは y - 方向に π ずれることになる。

$$[f_1(\xi_1, \eta_1), f_2(\xi_2 + \Gamma, \eta_2)] \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [f_1(\xi_1 + \Gamma, \eta_1), f_2(\xi_2, \eta_2)], \quad \text{for } L_1 L_2 > 0 \\ [f_1(\xi_1 + \Gamma, \eta_1 + \pi), f_2(\xi_2, \eta_2 - \pi)], \\ \text{for } L_1 L_2 < 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

相互作用を $\alpha_1, \alpha_2 > 0, \frac{\Omega_1}{\alpha_1} > \frac{\Omega_2}{\alpha_2}$ の場合について分類する。そのために位相のずれが無限大になる条件を求めると、次のようになる。

$L_1 L_2 \rightarrow \infty$ (分母 $\neq 0$) の条件は、

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} - \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \pm 3(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (13a)$$

$$\text{i.e. } D(\alpha_1 + \alpha_2, i\delta_1 + i\delta_2, \Omega_1 + \Omega_2) = 0 \quad (13b)$$

$L_1 L_2 \rightarrow 0$ (分子 $\neq 0$) の条件は、

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} - \frac{\delta_2}{\alpha_2} = \pm 3(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (14a)$$

$$\text{i.e. } D(\alpha_1 - \alpha_2, i\delta_1 - i\delta_2, \Omega_1 - \Omega_2) = 0 \quad (14b)$$

正の無限大はソリトンが離れるのに無限大の時間がかかることを意味している。言い替えると離れない。負の無限大は無限にはなれていても相互作用をする事を示している。この場合を仮に遠方相互作用と呼ぶことにする。上の分母が0になる場合は、次の保存則を満足しているのでソリトン共鳴を起こしている。分子が0になる場合は満足していないので共鳴とは言えない。

$$\int u_r da = \int u_1 da + \int u_2 da \quad (15a)$$

$$\text{i.e. } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (15b)$$

図 2 によるとこれらの条件を境界として分類した 5 つのパラメータ領域があることがわかる。 D_1 と D_2 及び E_1 と E_3 は 2 つのソリトンを入れ替えればよいので D_1 、 E_1 と E_2 の 3 つの領域を調べればよい。境界 r_1 は、分母が 0 の条件に対応しており（共鳴）、境界 s_1 は、分子が 0 の条件に対応している（遠方相互作用）。以下、3 つの領域と 2 つの境界の近傍の代表例を図で示す。表式 (9) を具体的に描くわけである。なお図 2 には例として選んだ点の位置が示されている。

単位長さ当たり 2 個の周期ソリトンが単位長さ当たり 1 個の周期ソリトンを追い抜く様がかかかれている。2 個の間の中心に 1 個の周期ソリトンをおいて追い抜く場合（衝突しないことが期待される。）と 2 個のうちの 1 個と同じ場所に 1 個の周期ソリトンをおいて追い抜く場合（衝突することが期待される。）を図示する。図では、 y 方向に対して 1 周期のみかいており、実際は無限に並んでいる。また、全体が x 方向に進んでいるが、見やすいようにずらしてある。

まず E_1 の領域の例として、図 3 の I と H を見てみる。I においては、予想どおりに 2 個の間を 1 個が抜けていく。両者が近づく時 ($t=0.8$)、背の低い 1 個の方が高くなり、高い 2 個の方が低くなる。その後 ($t=1.6$)、両者が十分離れると元の形に戻る。H の場合は、2 個の周期ソリトンのうちの 1 個のピークと 1 個の周期ソリトンが予想どおり衝突する。衝突の前 ($t=0.2$)、背の高い方がさらに高くなる。衝突すると融合し ($t=0.4$)、横の方に広がりほぼ 2 つの同じピークができる ($t=0.6-1.0$)。その 2 つのピークはまた横方向

に運動して衝突し ($t=1.2$)、前後に背の高いピークと低いピークを出す ($t=1.3$)。十分離れると元の形に戻る ($t=1.6$)。こういう過程が起きている間、2個の周期ソリトンの衝突しない方のピークも背の高さが変化している。

次に D_1 の領域の例として、図 3 の F と B を見てみる。この領域は y - 方向の位相のずれが生じるはずである。F を見ると 2 個の周期ソリトンの 2 つのピークが、衝突をし 2 個の周期ソリトンと 1 個の周期ソリトンは、衝突しないように見える。十分時間が経つと ($t=2.0$) 確かに y - 方向に π だけずれていることがわかる。B を見ると H の場合と同様に 2 個の周期ソリトンのうちの 1 個のピークと 1 個の周期ソリトンが予想どおり衝突する ($t=1.5$)。違いは、衝突して横に広がってから生じる ($t=2.0$)。横に広がった後衝突せずにそのまま横にずれた 2 個の周期ソリトンになり、衝突しなかった 1 個のピークが 1 個の周期ソリトンになっている ($t=3.0$)。この場合も横方向のずれが生じている。

最後の領域 E_2 の例として、図 3 の D と C を見てみる。D においては、予想とは異なり、2 個のピークが横方向に衝突して ($t=5.0$)、1 個の周期ソリトンと正面衝突して、合体する ($t=5.5$)。十分時間が経つと ($t=8.0$)、元の形に戻る。C では衝突は生じずに 2 個のピークの内 1 個の周期ソリトンと向い合わせになっていない方がつなぎ代わってしまう。

2 つのピークが衝突するときの形の変化は 2 つの代数ソリトンの衝突と同様である。(Freeman(1980)) これは、ピークの近傍が代数ソリトンと同型をしていることから予想されることである。指数的なテールの相互作用で横方

向に動き出したり、縦方向に動き出したりすることが支配されているようである。

ソリトン共鳴の生じる場合（分母が0）を見てみる。ソリトン共鳴の条件を厳密に満たす場合は、パラメータが発散することになるので、その近傍を描く。図3のKに見られるように $t=1.8$ では、ほぼ単位長さ当たり3個の周期ソリトンが生成されている。この場合は、共鳴条件から少しずれているので、このような状態をしばらく続けたのち、離れて元の形に戻る。共鳴条件に近づければ近づけるほどこの状態の時間は延びる。この共鳴条件は横の位相のずれが生じるか生じないかの境界となっている。どちらにもいけないのでそのまま留まっていると考えることもできる。これは、通常のソリトン共鳴が解の発散の限界になっているのと異なる。またこれは、明かに空間的に2次元以上の系でしか生じない現象である。

遠方相互作用の生じる場合（分子が0）を見てみる。この場合も条件から少しずれている場合を扱う。領域 E_2 から境界 s_1 に近づけてあるので定性的にはUはDと、TはCと同様である。しかしながら両者がかなり離れたまま相互作用していることがわかるであろう。条件に近づければ近づけるほど両者の距離は延びる。これは、一方の無限小のテールの影響でもう一方の周期ソリトンが運動を生じる事を意味しているので、この周期ソリトンは線形不安定であることを示唆している。実際、Zhdanov(1985)は、逆散乱法を用い線形不安定を示している。

5. まとめと今後の課題

この研究の結論を簡単にまとめると、

- (1) 任意方向に並んだ一般的な周期ソリトン解を求めた。
- (2) $2-y$ 周期ソリトンの相互作用で定性的に異なる3つのパラメータ領域があることを示した。
- (3) また、その境界で新しいタイプのソリトン共鳴が生じることと無限に離れた周期ソリトンどうしが相互作用しうることを示した。

今後の課題としては、

- (1) 他のタイプの周期ソリトンの相互作用を調べる。
- (2) 実験との比較を行う。
- (3) 他の2次元系での周期ソリトン解を見つける。

などいろいろ取り扱うべき問題は多い。

参考文献

- B. B. Kadomtsev and M. I. Petviashvili: Sov. Phys. Dokl. **15** (1970) 539.
- N. C. Freeman: Adv. Appl. Mech. **20** (1980) 1.
- S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii and V. E. Zakharov:
Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method. (1984)
New York Consultants Bureau. (See Appendix)
- J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 286.
- V. E. Zakharov and A. B. Shabat: Funct. Anal. Appl. **8** (1974) 226.
- 矢嶋信男: 日本物理学会誌 **36** (1981) 816
- J. W. Miles: J. Fluid Mech. **79** (1977) 157, 171
- S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its, and V. B. Matveev:
Phys. Lett. **A63** (1977) 205
- A. A. Zaitsev: Sov. Phys. Dokl. **28** (1983) 720
- L. A. Abramyan and Yu. A. Stepanyants: Radiophys. and Quantum Electron.
28 (1985) 26.
- M. Tajiri and Y. Murakami: to appear in J. Phys. Soc. Jpn. (1989) no. 9
- S. K. Zhdanov: Sov. Phys. Dokl. **30** (1985) 769.

図 1-1

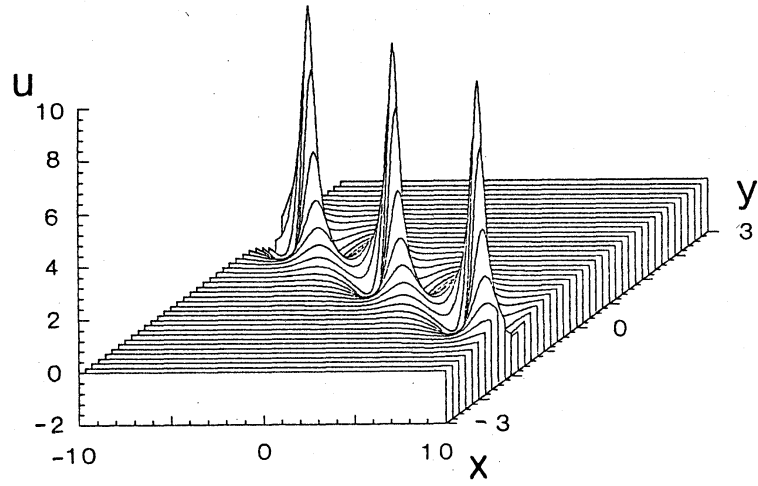


図 1-2

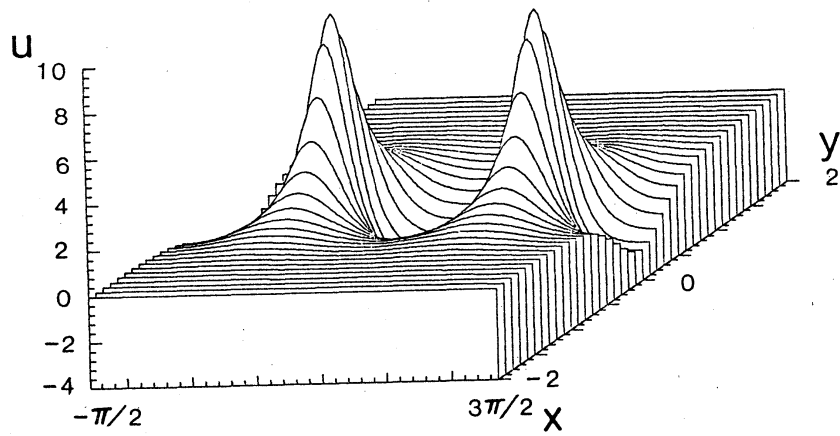


図 1-3

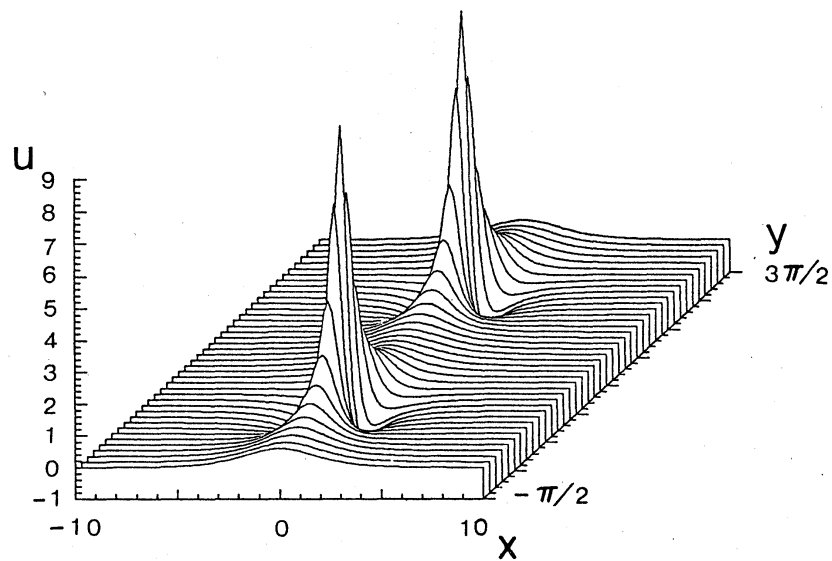


図 1 周期ソリトン

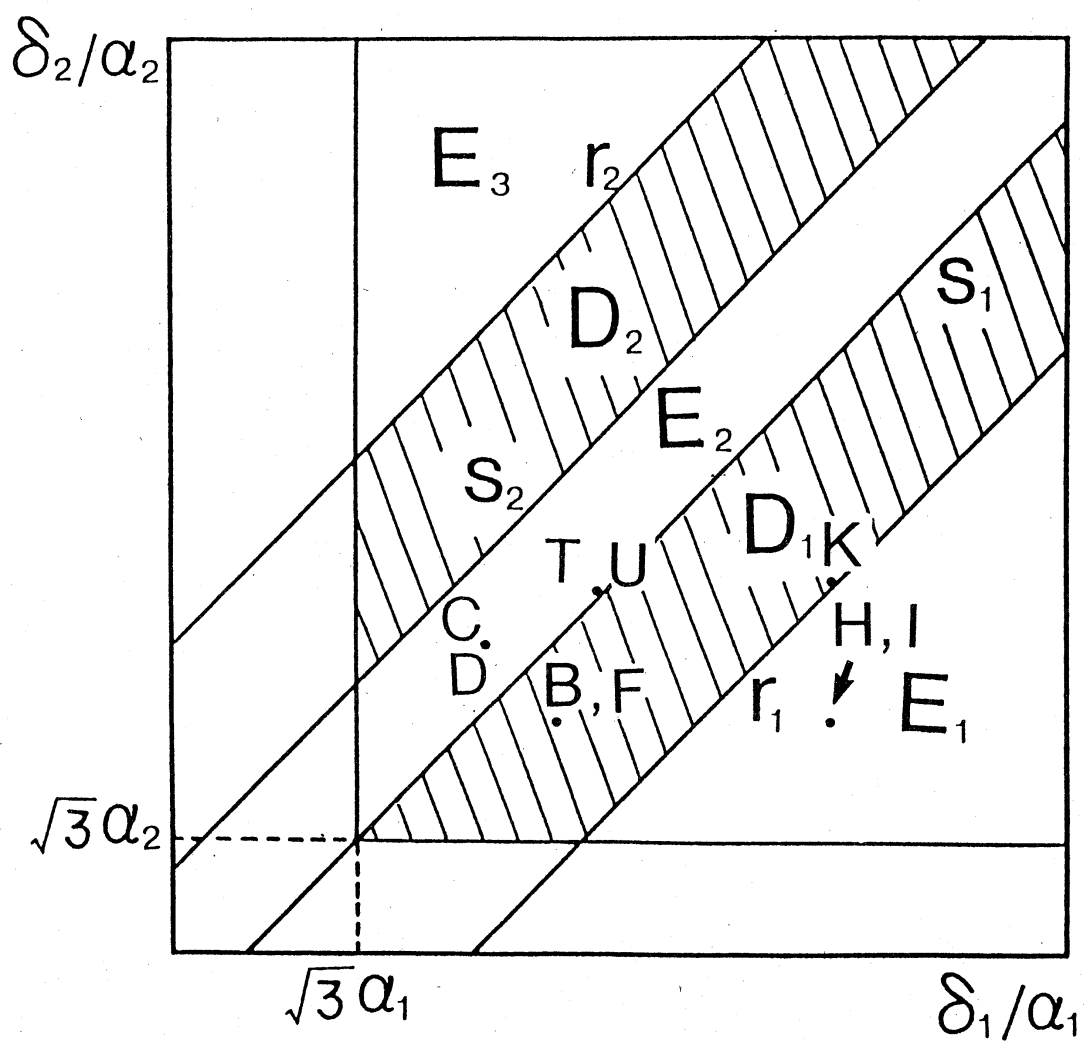
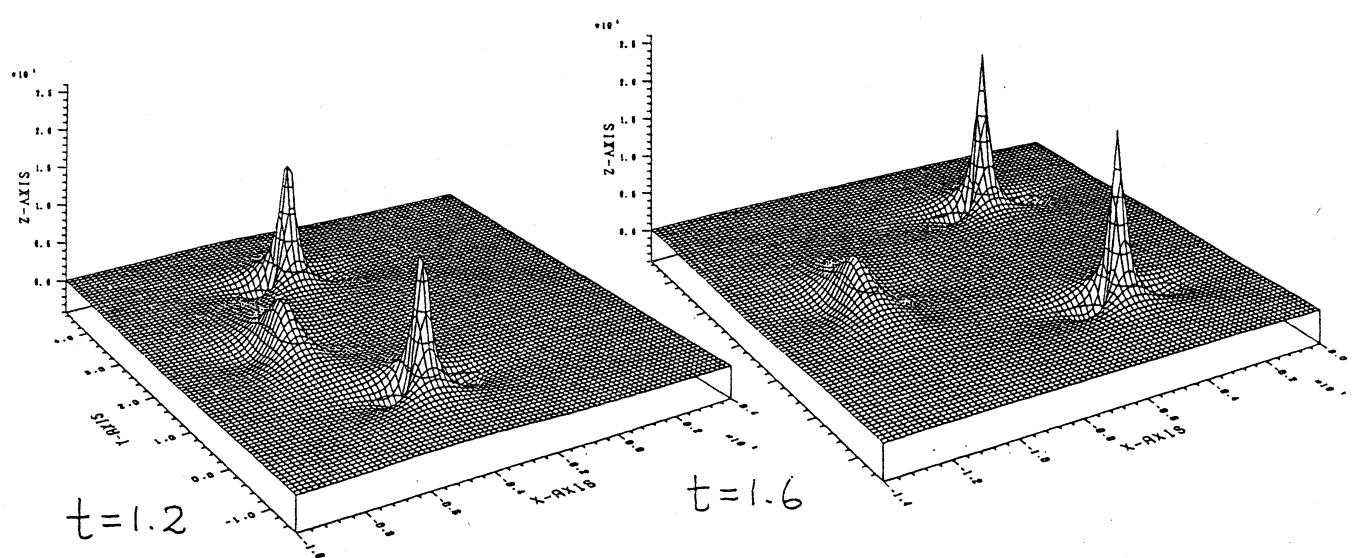
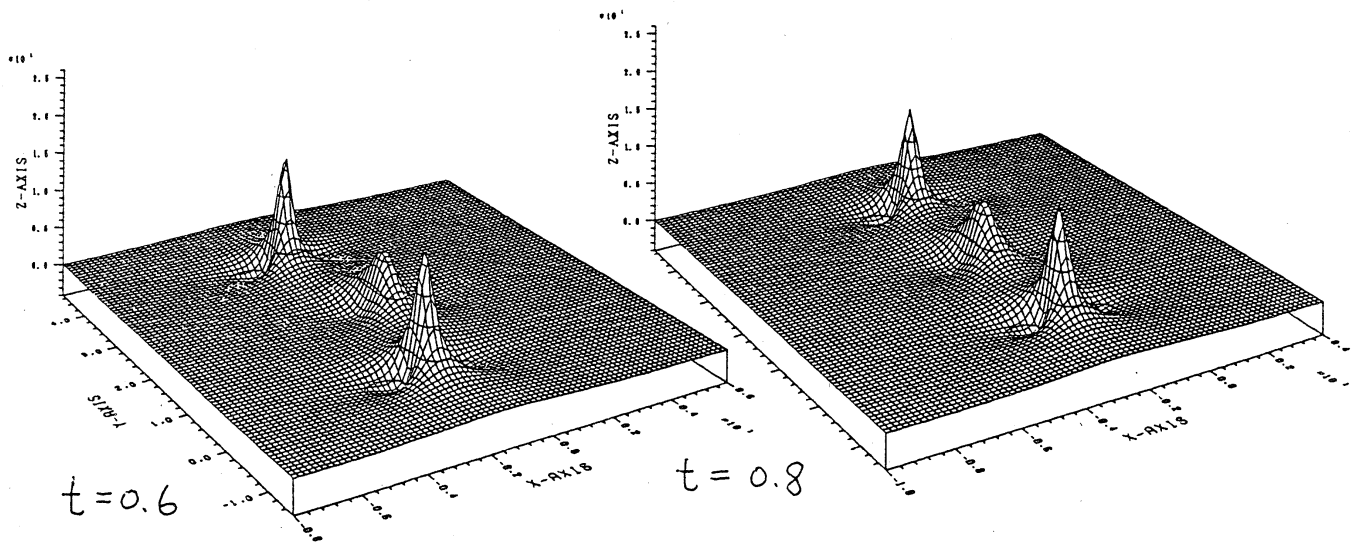
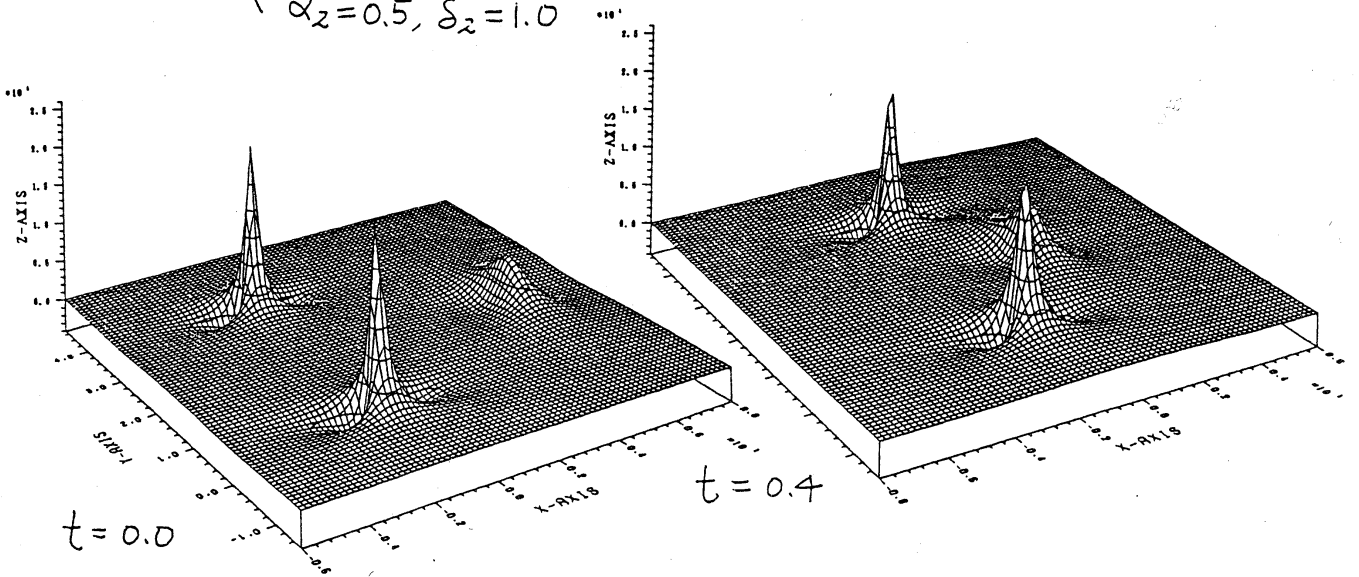


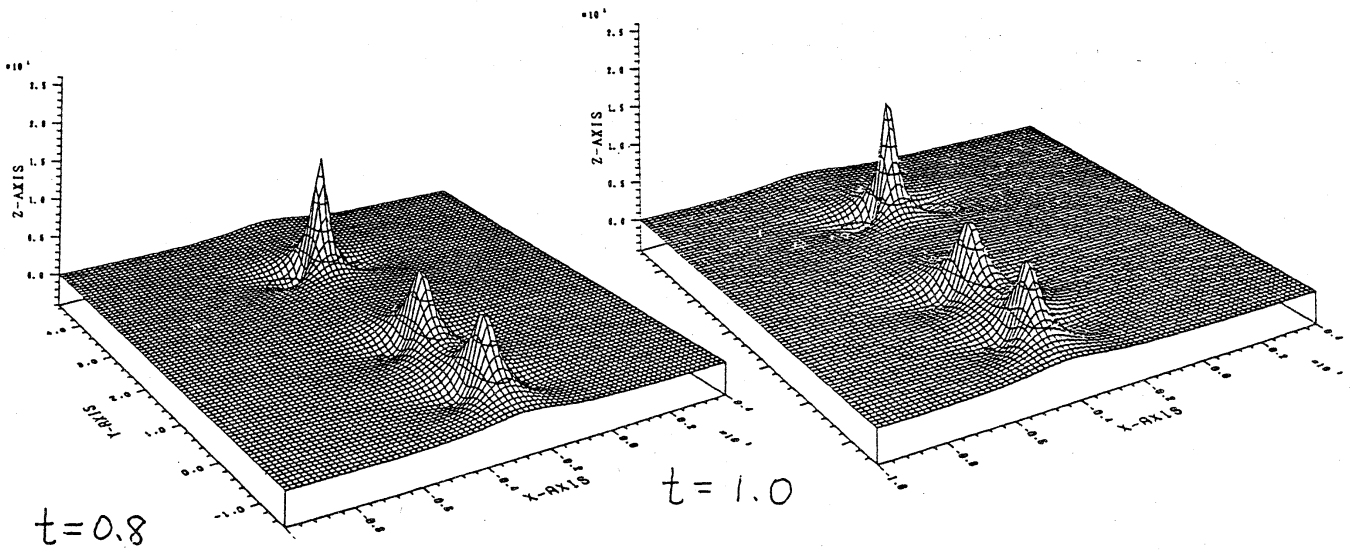
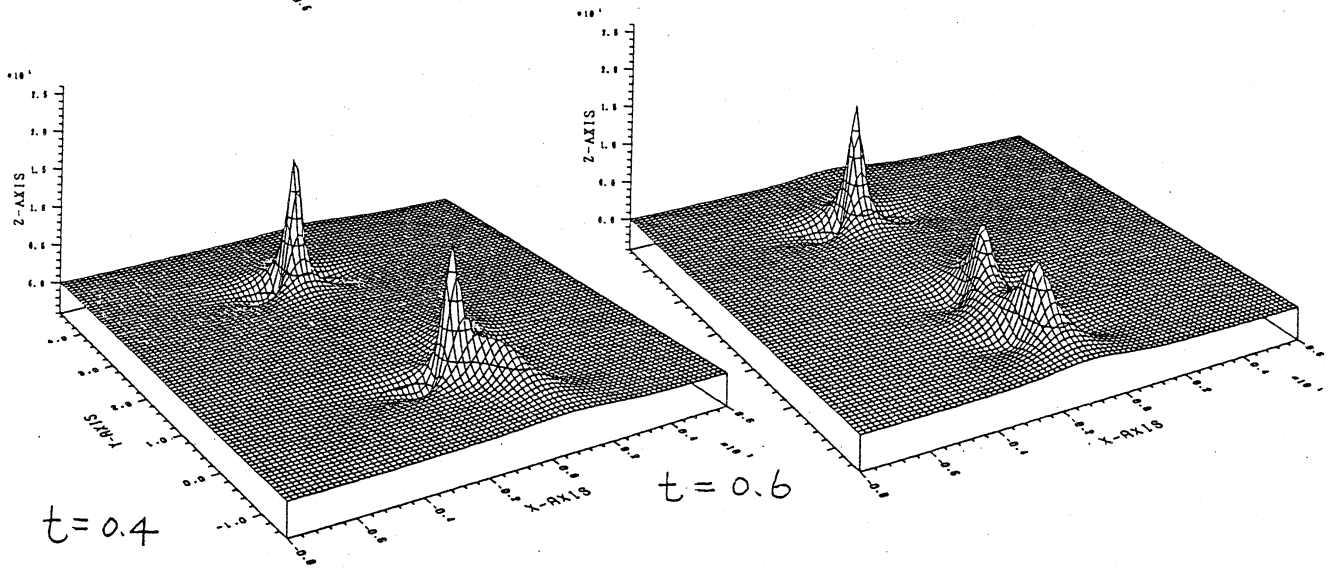
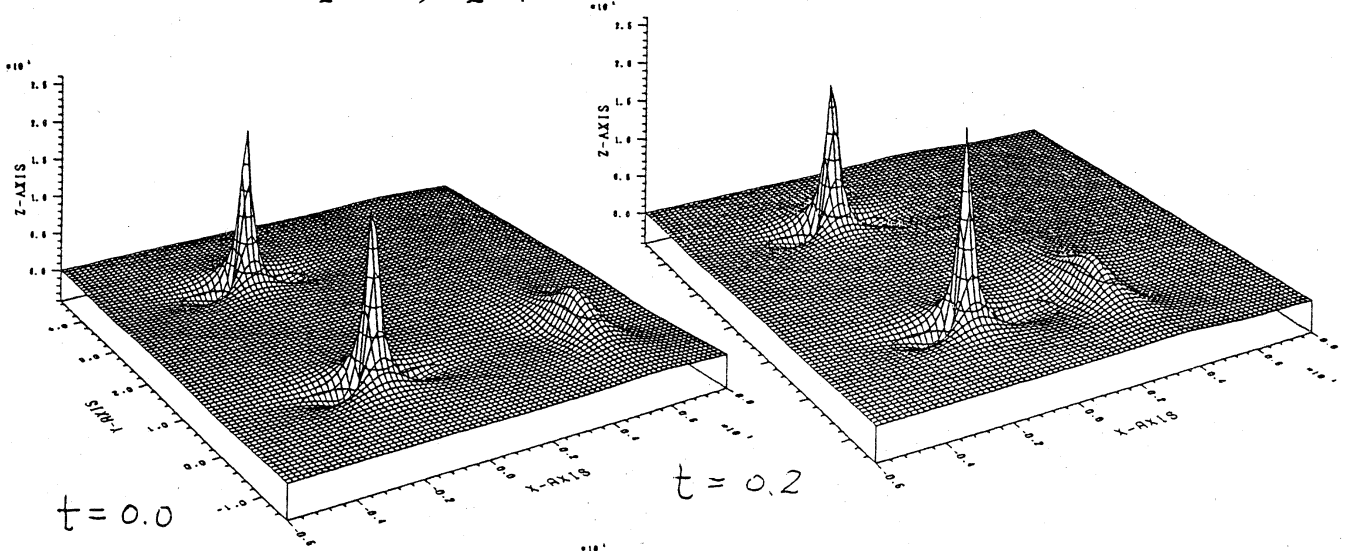
图 2

$$I \begin{cases} \alpha_1 = 0.5, \delta_1 = 2.0 \\ \alpha_2 = 0.5, \delta_2 = 1.0 \end{cases}$$



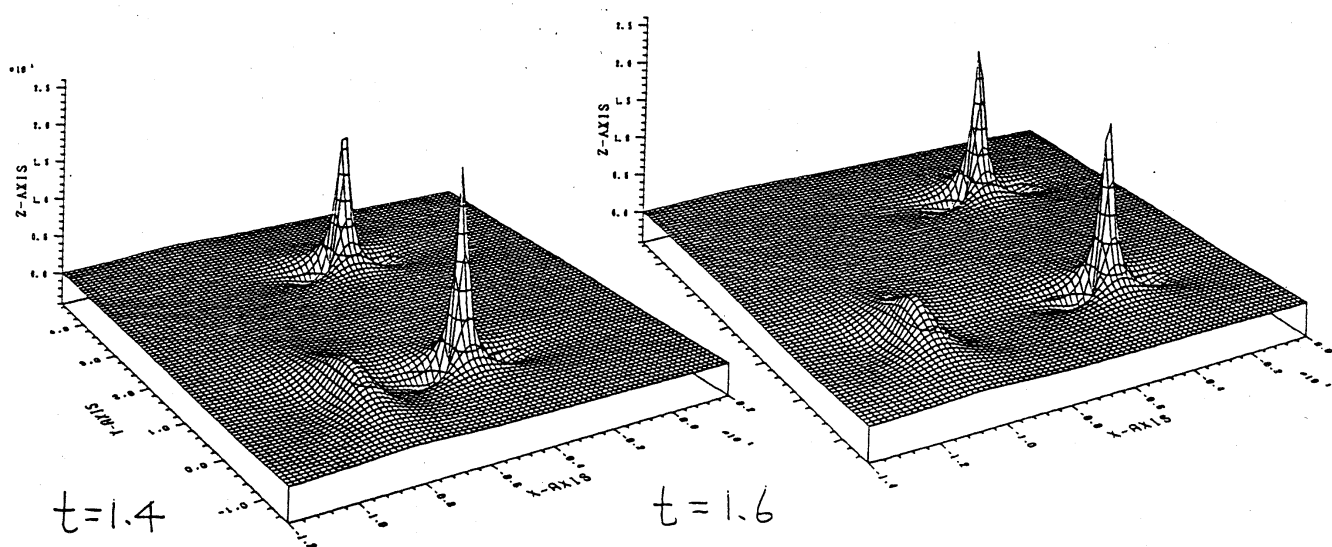
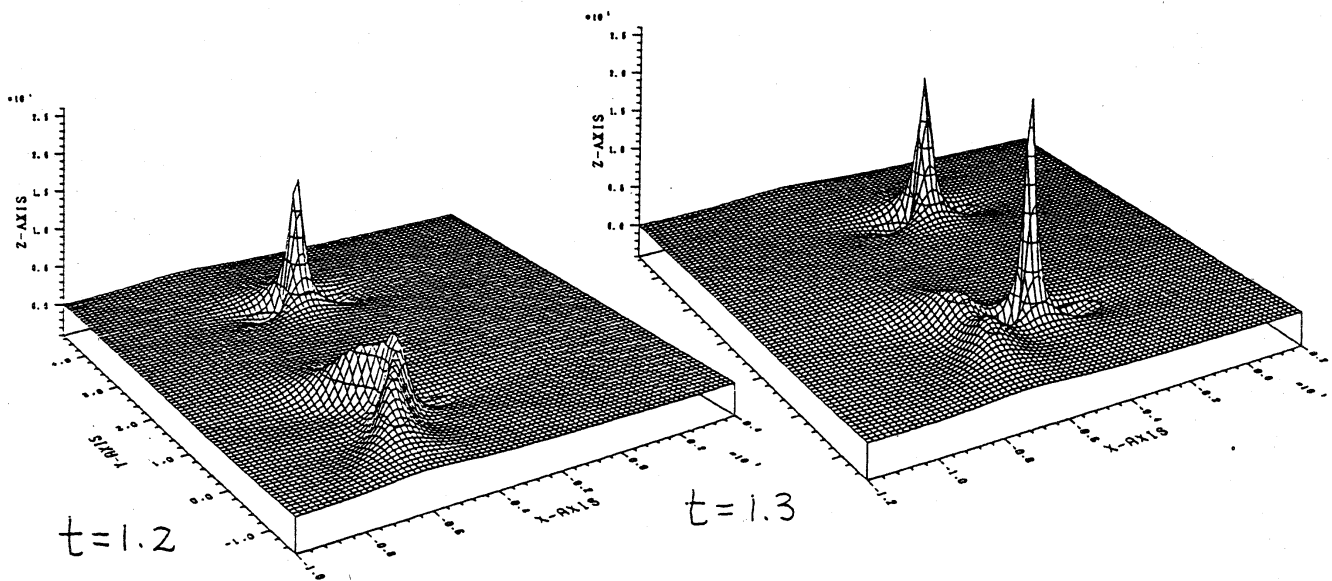
3 I

$$H_1 \begin{cases} \alpha_1 = 0.5, \delta_1 = 2.0 \\ \alpha_2 = 0.5, \delta_2 = 1.0 \end{cases}$$



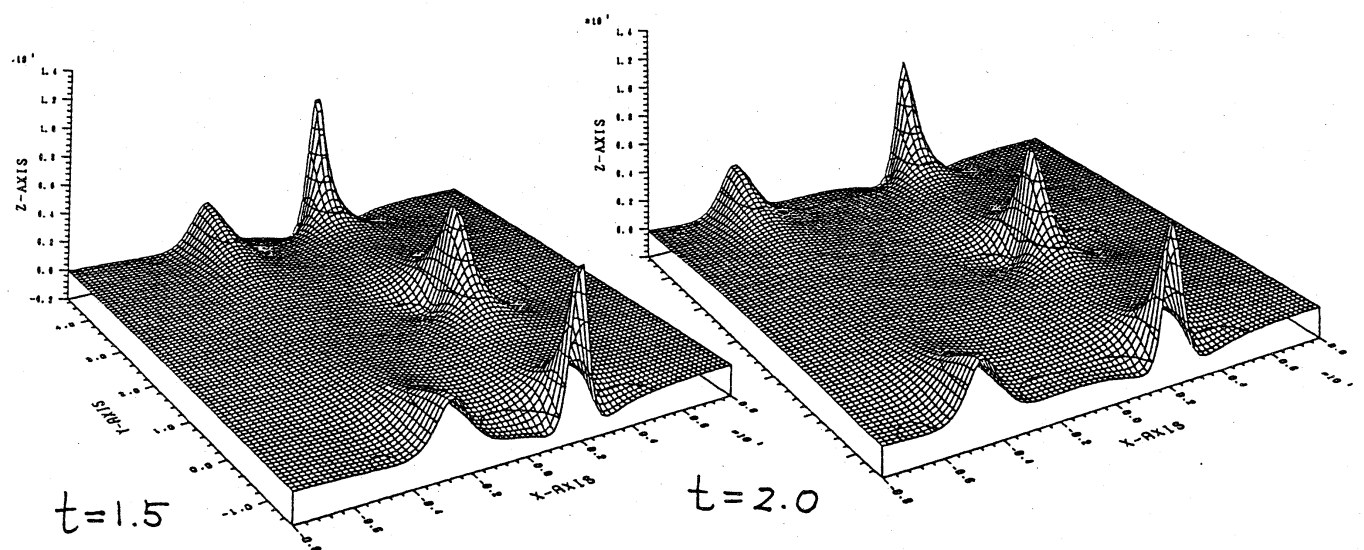
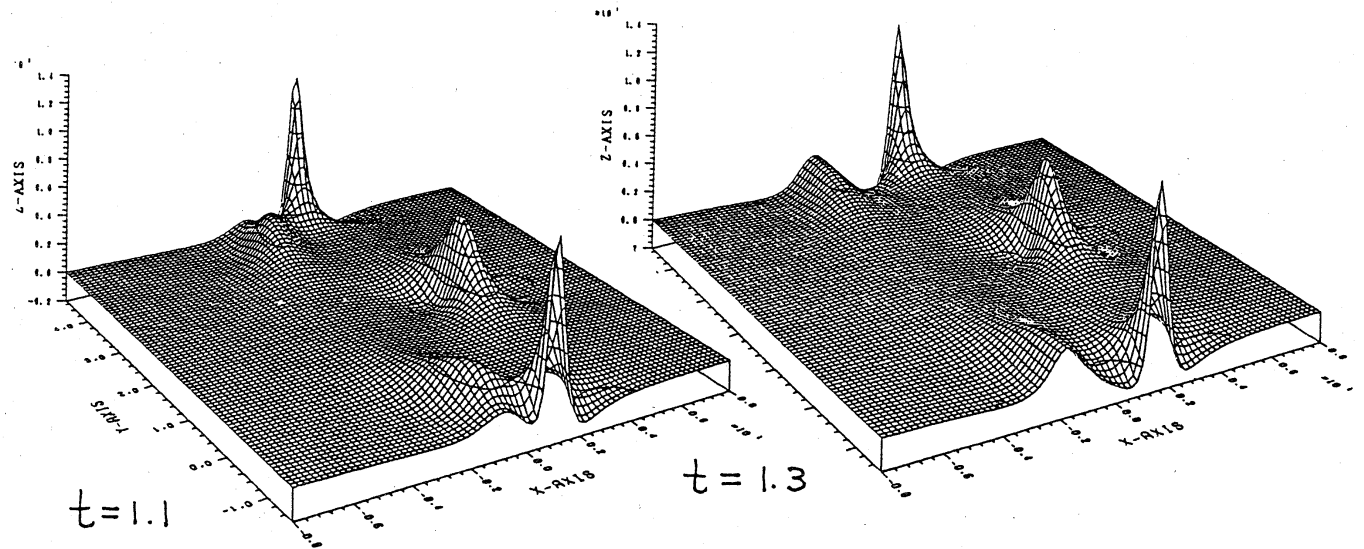
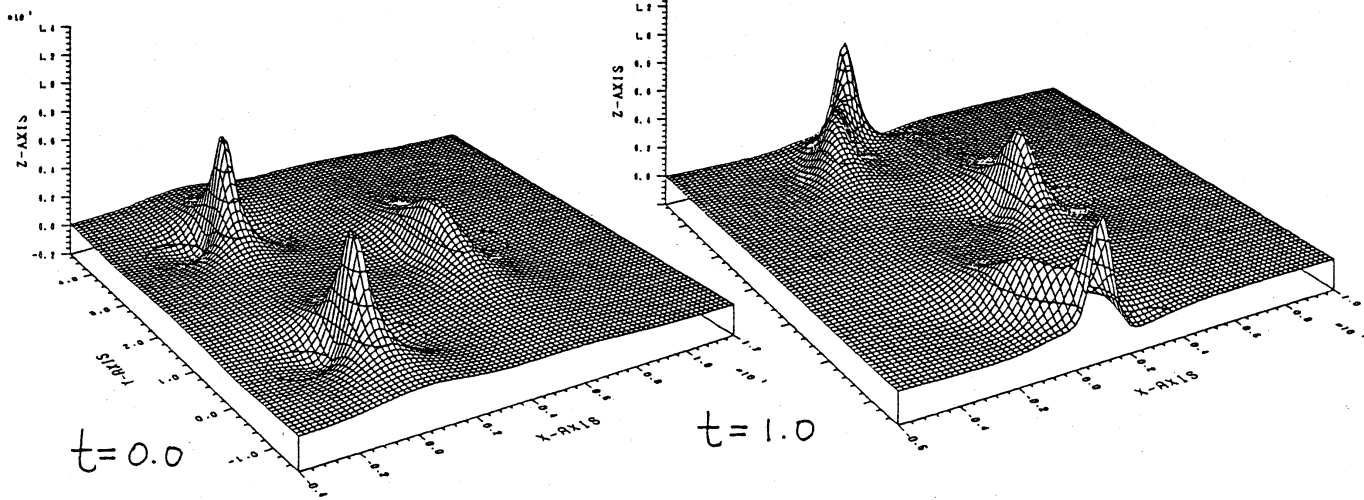
3 - H

H2



3 - H

$$F \left(\begin{array}{l} \alpha_1 = 0.8, \delta_1 = 2.0 \\ \alpha_2 = 0.6, \delta_2 = 1.0 \end{array} \right)$$



3 F

70

$$B \begin{cases} \alpha_1 = 0.8, \delta_1 = 2.0 \\ \alpha_2 = 0.6, \delta_2 = 1.0 \end{cases}$$

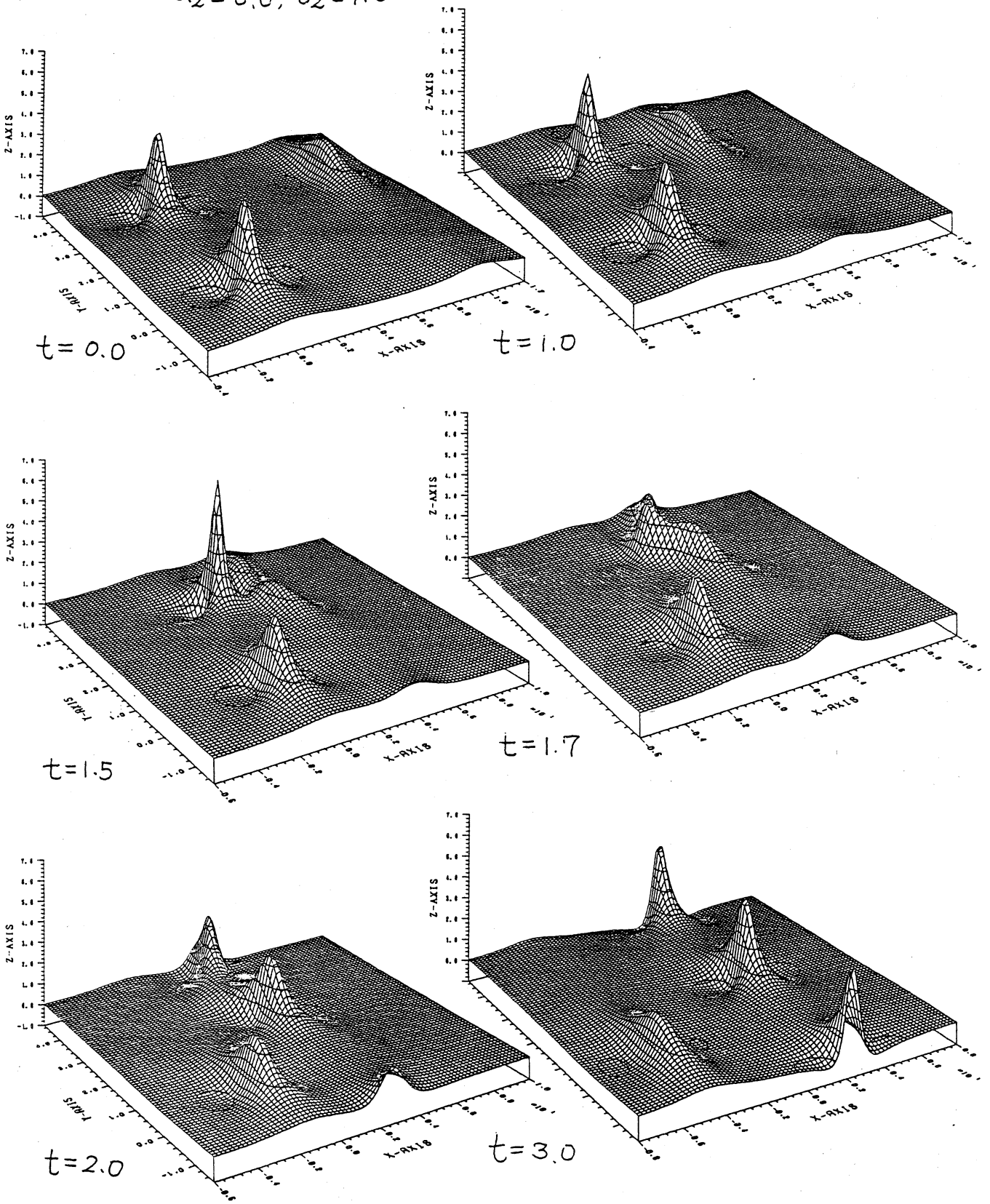


Fig 3 - B

$$D \begin{pmatrix} \alpha_1 = 0.9, \delta_1 = 2.0 \\ \alpha_2 = 0.5, \delta_2 = 1.0 \end{pmatrix}$$

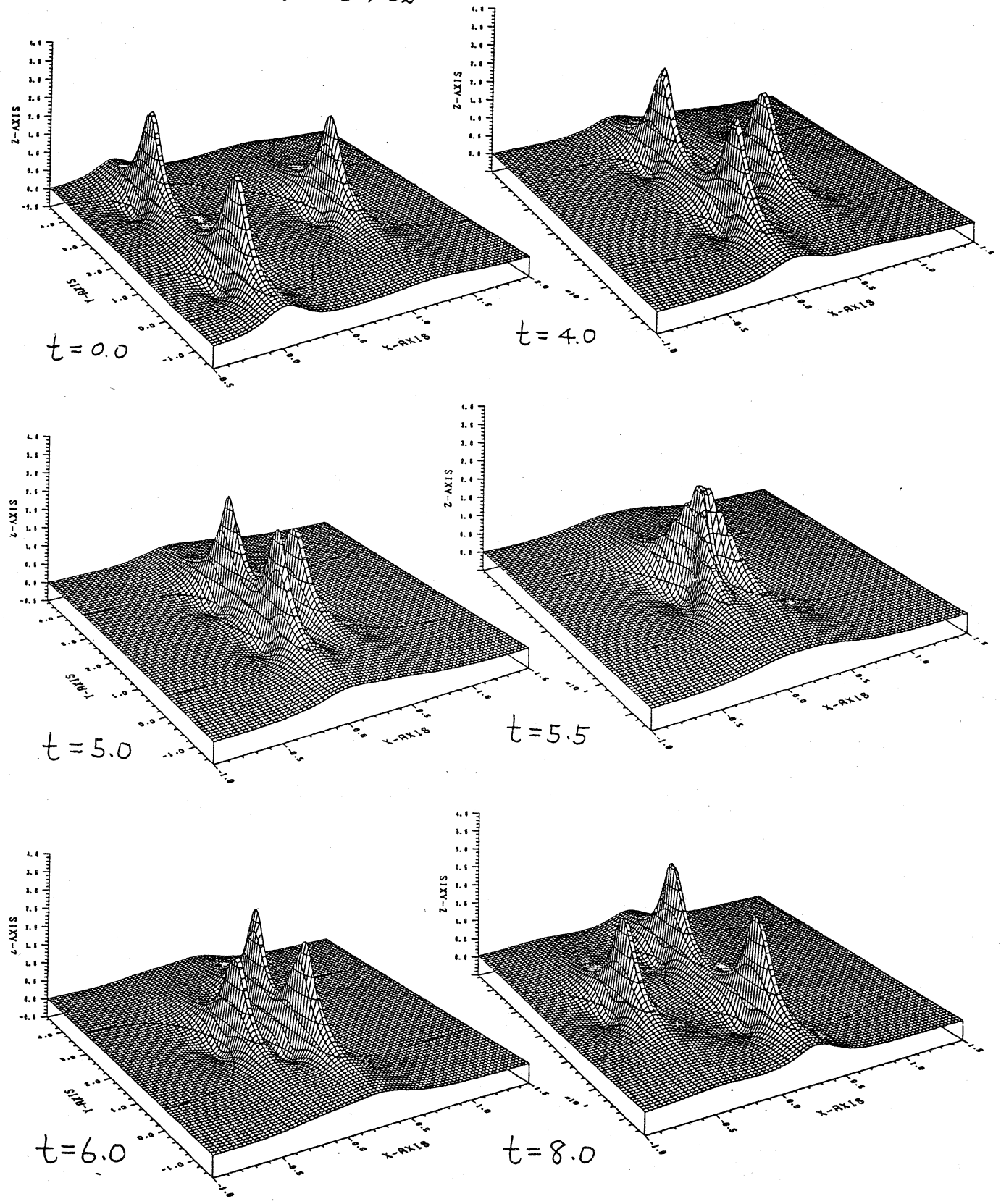


FIG 3 - D

72

$$c \begin{cases} \alpha_1 = 0.9, \delta_1 = 2.0 \\ \alpha_2 = 0.5, \delta_2 = 1.0 \end{cases}$$

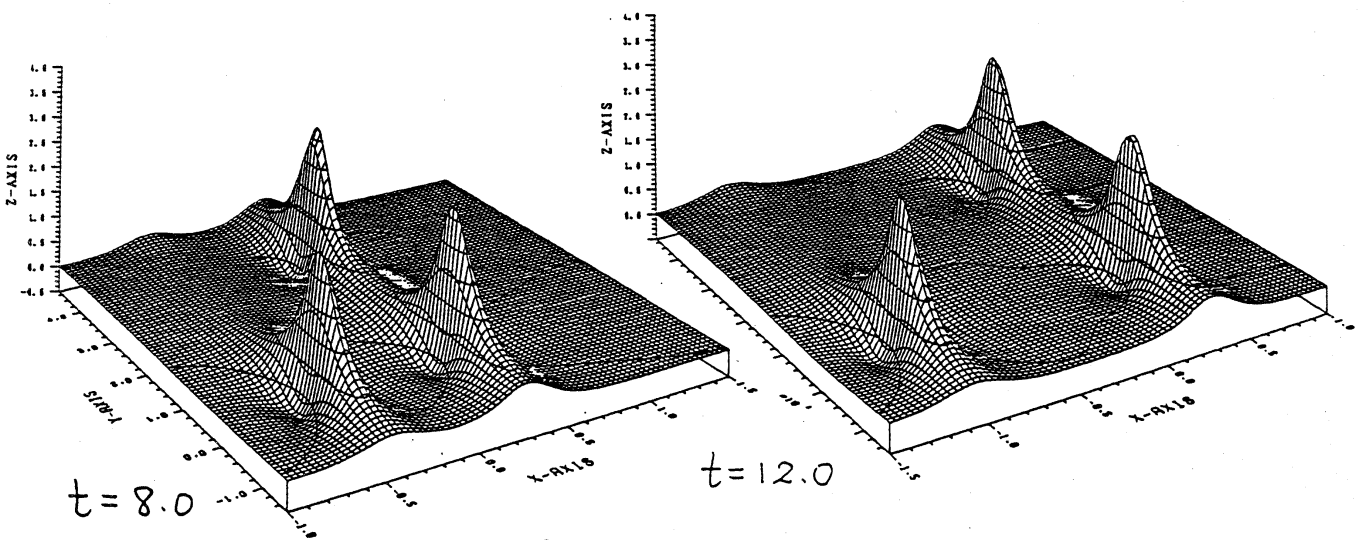
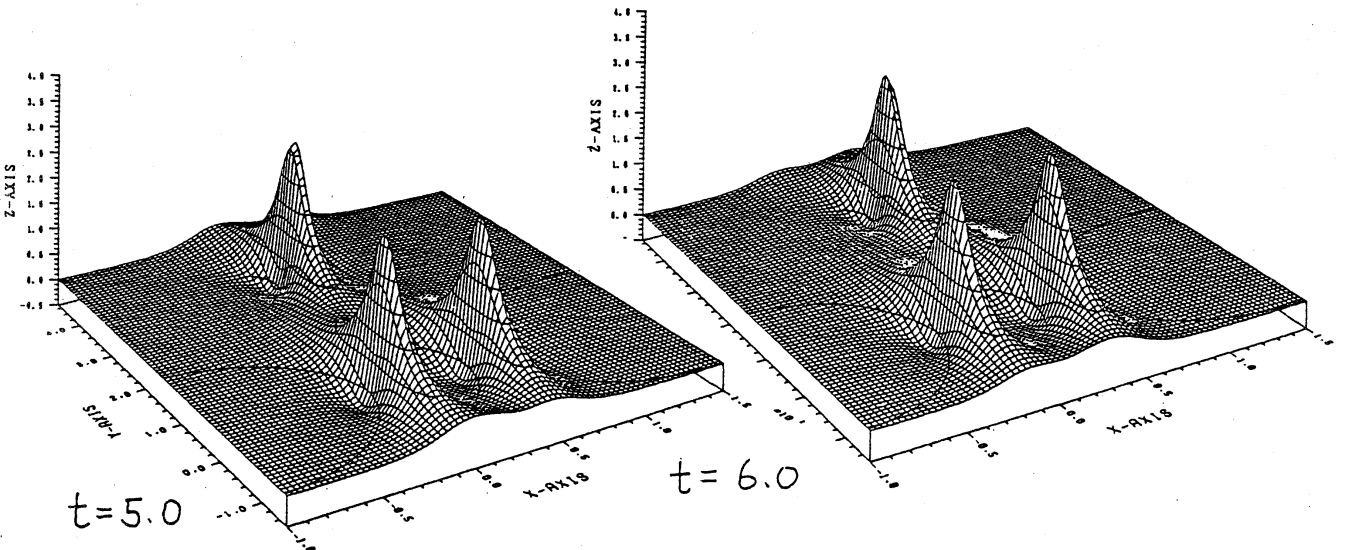
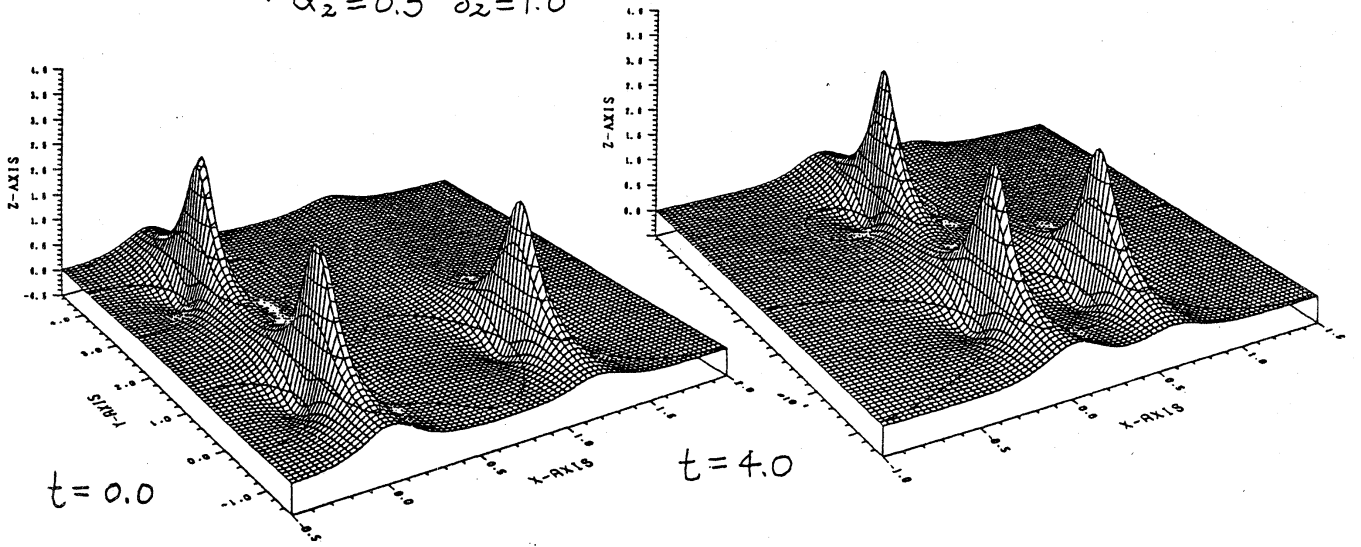


FIG 3 - C

$$K \begin{cases} \alpha_1 = 0.5, \delta_1 = 2.0 \\ \alpha_2 = 0.41, \delta_2 = 1.0 \end{cases}$$

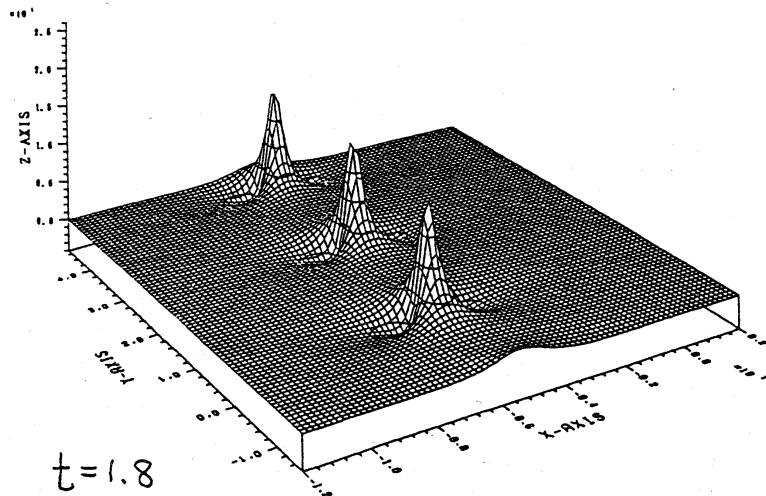
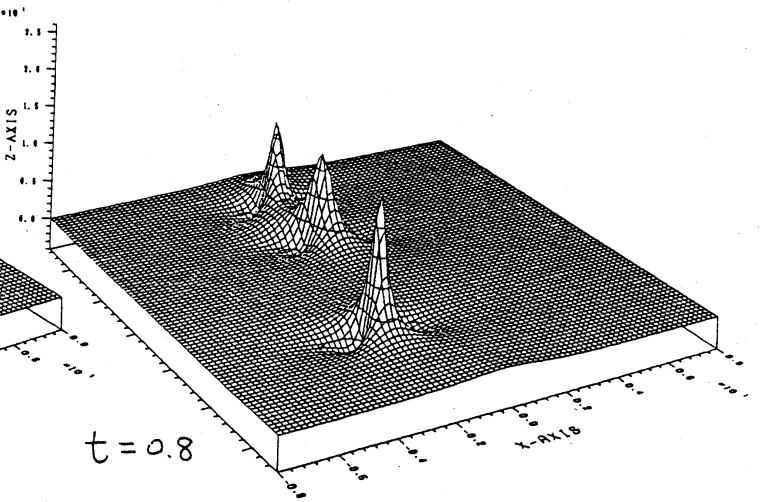
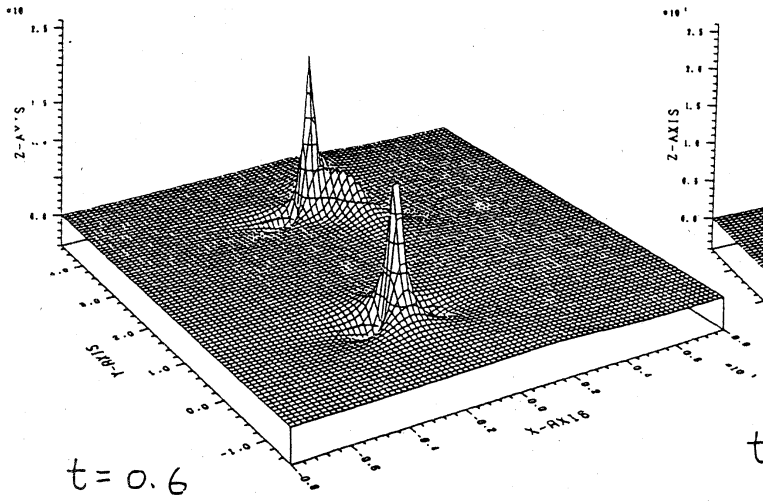
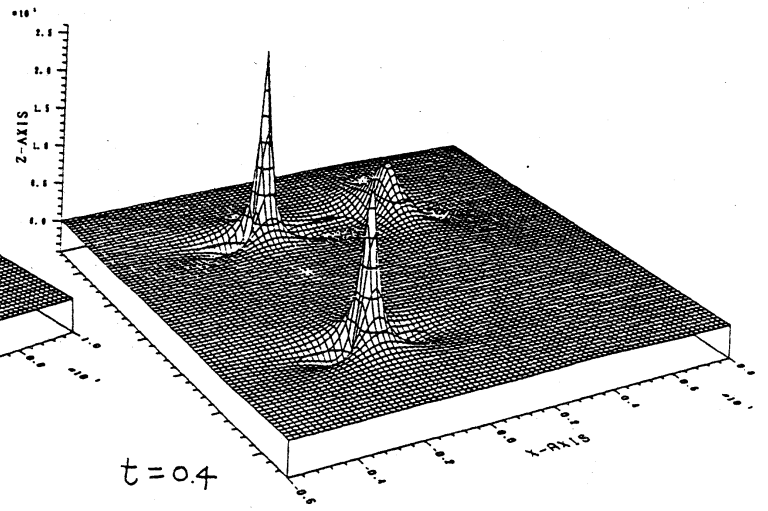
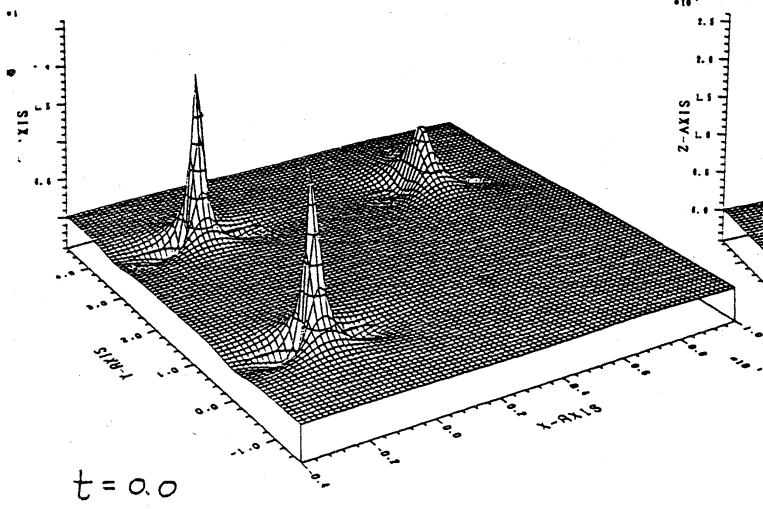


图3-K

$$74 \quad \sigma_1 \begin{cases} \alpha_1 = 0.6, \delta_1 = 2.0 \\ \alpha_2 = 0.345, \delta_2 = 1.0 \end{cases}$$

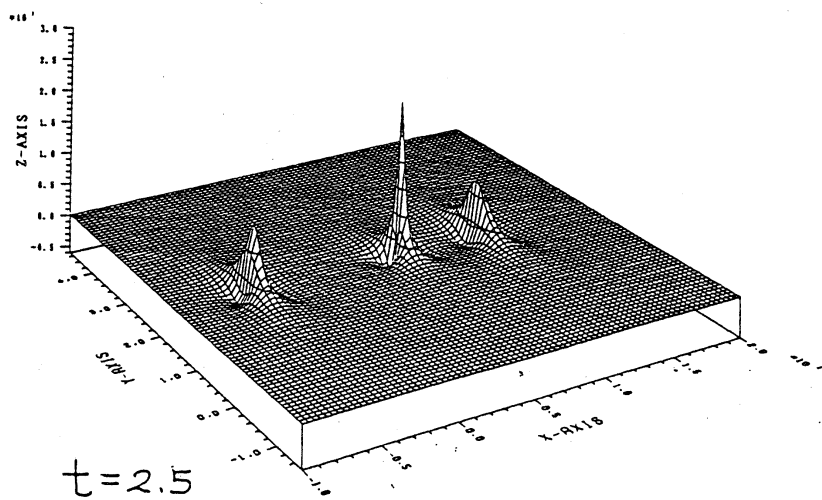
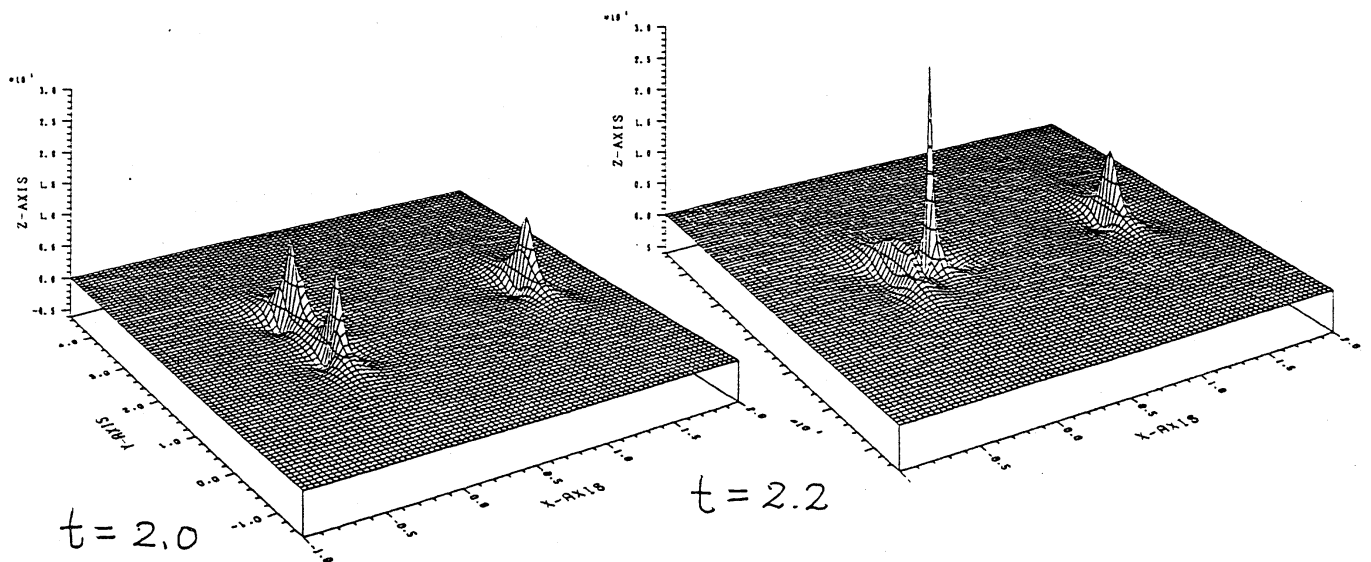
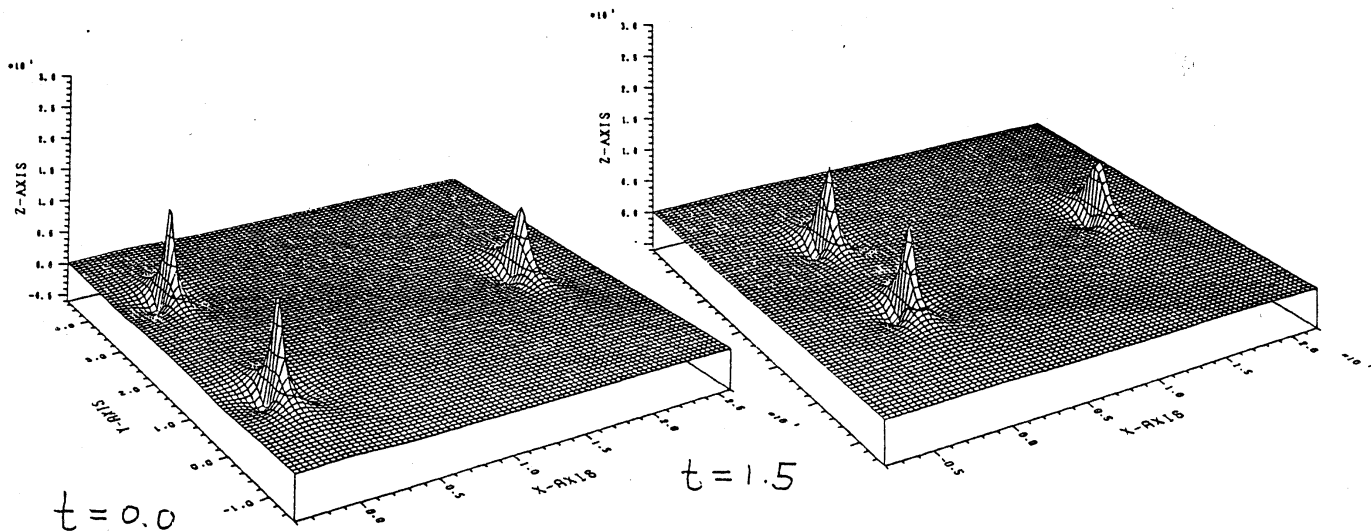
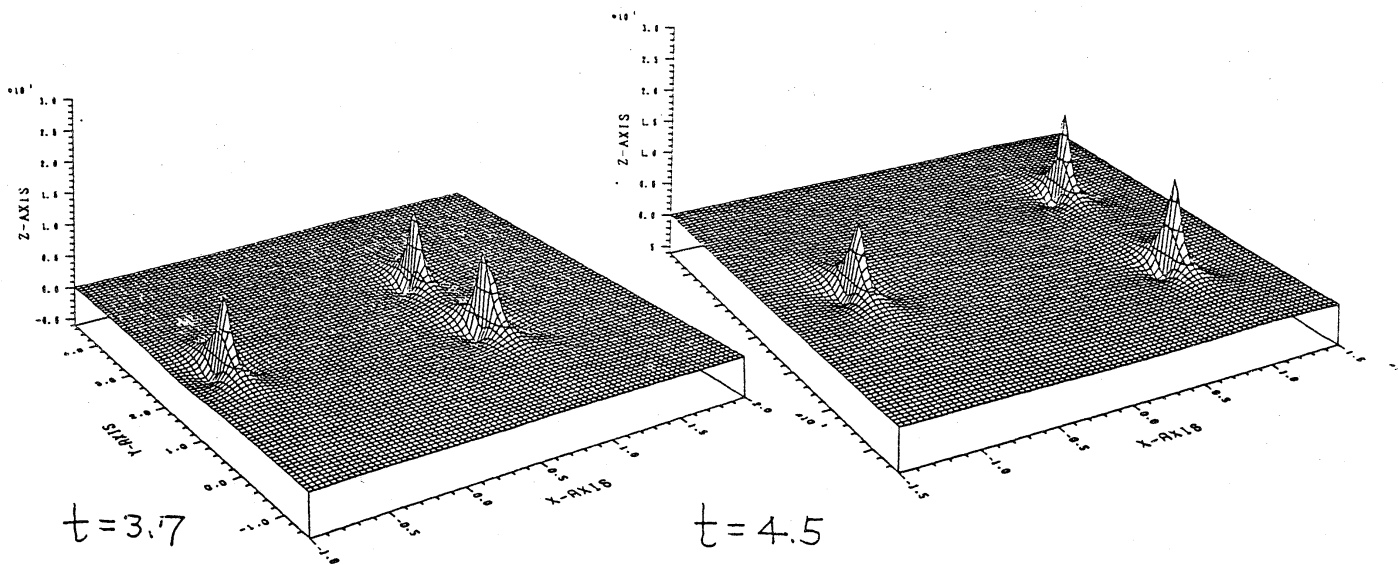
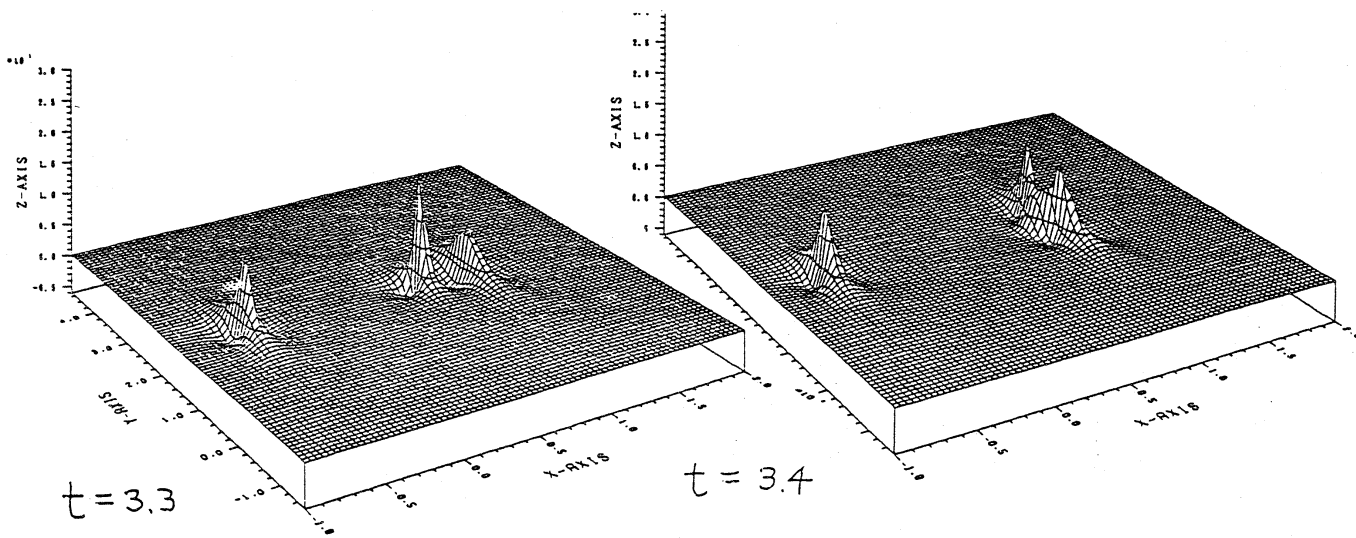


图 3 - U

U2



A3 - U

$$T \begin{pmatrix} \alpha_1 = 0.6, \delta_1 = 2.0 \\ \alpha_2 = 0.345, \delta_2 = 1.0 \end{pmatrix}$$

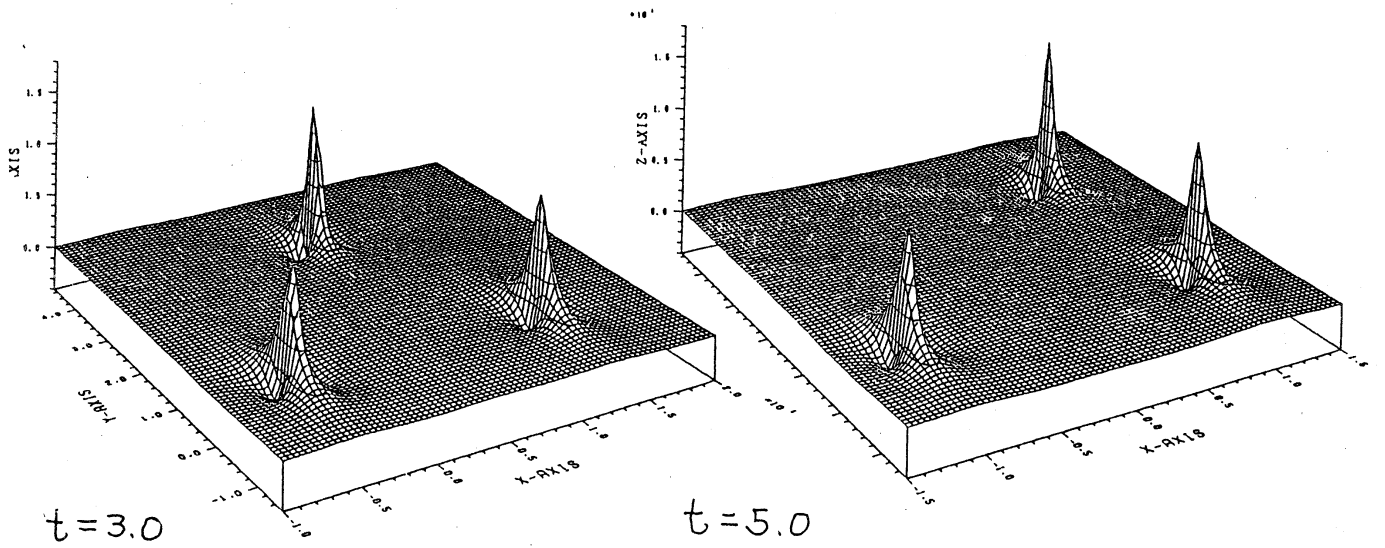
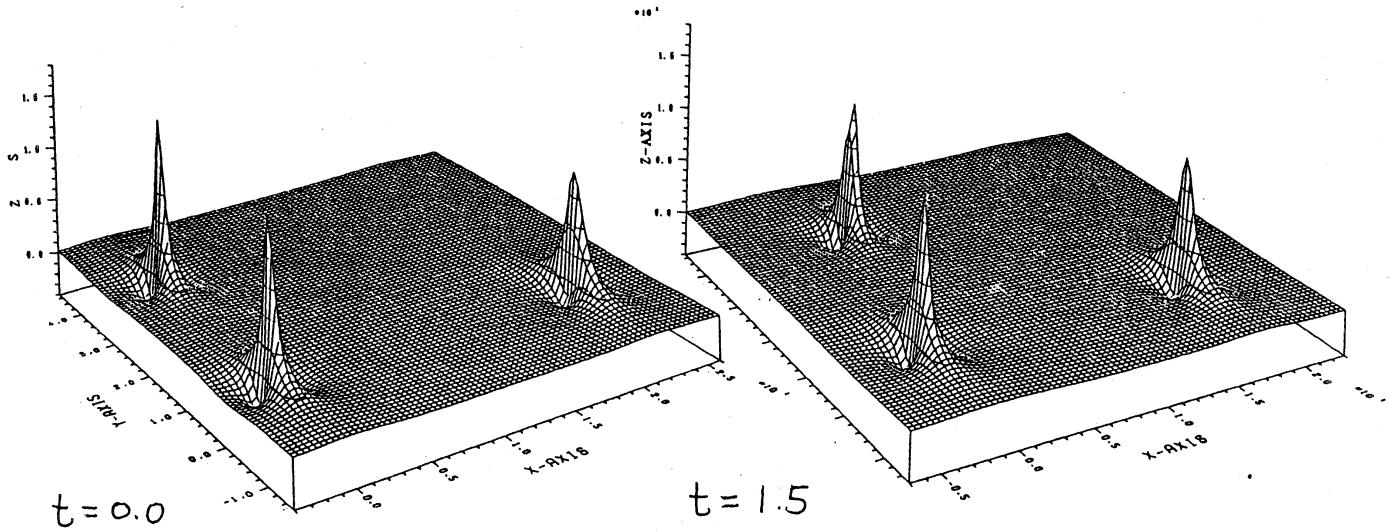


图 3 - T