

非整数 $1/2$ 階微分で与えられる履歴を伴う非線形波動

大阪大 基礎工 杉本信正 (Nobumasa SUGIMOTO)

1. まえがき

流体中の非線形波動の伝播において、非線形性に対抗する効果として、分散や散逸が重要な役割を演じることはよく知られている。これらの効果は通常、空間に関する高階微分形で現れ、波形の急峻な所で局所的に作用する。しかし、Newton流体のような粘弾性効果を伴わない単純な流体であっても、分散、散逸が履歴効果となって現れる場合がある。緩和効果を元来伴う流体での履歴はもちろんであるが、ただその場合でも指数関数型緩和関数を考えると、実質的には微分形に帰着される。これに対し、ここでいう履歴とは本質的に積分形の、いわゆる非整数 $1/2$ 階微分形で与えられるものである。

本報告では、最初に非整数 $1/2$ 階微積分について簡単に復習し、Newton流体における履歴のメカニズムをRayleigh問題を用いて説明する。具体的な波動系における履歴効果については、代表例として、浅水波、音波、及び気泡を含む液体中の

波の三つを紹介する。最後に、履歴を伴う最も簡単な非線形波動方程式の解についても簡単に述べる。

2. 非整数 $1/2$ 階微積分に関する予備知識

実軸上 $(-\infty < x < \infty)$ で定義された関数 $f(x)$ の $1/2$ 階微分とは、次のように定義される畳み込み積分のことである [1]:

$$\frac{d^{1/2}f}{dx^{1/2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{x-x'}} \frac{df(x')}{dx'} dx' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{d}{dx} f(x-y) dy, \quad (2.1)$$

ここで、最右辺の f の引き数が $x-y$ であることから、 x に関する微分は、符号を変えた y に関する微分で置き換えることが出来ることに注意したい。いま (2.1) を x に関して $-\infty$ から x まで積分し、それを f の $-1/2$ 階微分、もしくは $1/2$ 階積分 (なぜなら、積分を -1 階微分と考える) と表すと

$$\frac{d^{-1/2}f}{dx^{-1/2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{x-x'}} f(x') dx' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} f(x-y) dy \quad (2.2)$$

と定義される。では、何故 (2.1), (2.2) を $1/2$ 階微分、積分と呼ぶかと言うと、それは関数 $f(x)$ の n 階積分 $I^n f$ (n は正の整数) に対する Cauchy の積分公式:

$$I^n f \equiv \int_0^x dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_{n-2} \cdots \int_0^{x_1} f(x_0) dx_0 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-x')^{n-1} f(x') dx' \quad (2.3)$$

を拡張した任意の λ 階積分 ($\lambda > 0$) $I^\lambda f$ の定義に基づいている:

$$I^\lambda f \equiv \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^x (x-x')^{\lambda-1} f(x') dx' \quad (2.4)$$

ここで、 $\Gamma(\lambda)$ はガンマ関数である。この積分が収束するには $f(x)$ が $x = -\infty$ で適当にゼロになる必要があるが、しかし、積分が通常の意味で収束しなくても、指数関数的に発散しない限り超関数として定義できる。また、積分の下限を $-\infty$ でなく、例えば、 $x=0$ で定義してもよいが、その時には $f(x)$ を $g(x)h(x)$ とする。ここで、 $g(x)$ は $x=0$ で適当に微分可能であるものとし、 $h(x)$ はステップ関数である。この積分から微分を定義するには、丁度 $1/2$ 階微分から積分への変形で行ったように、 $x-x' = y$ とおき、 x で 1 回微分すると $I^\lambda (df/dx)$ となる。これは $I^{\lambda-1} f$ とも書くべきものであるが、いま $0 < \lambda < 1$ とすると、 $\lambda-1$ は負になることよりそれを ν 階 ($0 < \nu = 1-\lambda < 1$) 微分の定義とする:

$$\frac{d^\nu f}{dx^\nu} \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_{-\infty}^x \frac{1}{(x-x')^\nu} \frac{df(x')}{dx'} dx' \quad (2.5)$$

これを x でまた微分することにより、逐次 $\nu > 1$ にも微分を拡張できる。ただし、 $f(x)$ を $g(x)h(x)$ で定義するときには、 $df/dx = dg/dx \cdot h(x) + f(x)\delta(x)$ ($\delta(x)$ はデルタ関数) より、(2.5) の右辺には、 $x^{-\nu} f(0)/\Gamma(1-\nu)$ なる項が付加されることに注意したい。

さて、この定義が従来の整数階微積分と如何なる関係になっているのだろうか？ 極限 $\nu \rightarrow 0$ では当然 f それ自身になるが、 $\nu \rightarrow 1$ では $\lim (x-x')^{-\nu}/\Gamma(1-\nu)$ がデルタ関数 $\delta(x-x')$ になることを用いると [2], 1 階微分に帰着する。したがって、(2.5) は ν が整数を含め成り立つ。また、非整数階でも $(d^\mu/dx^\mu)(d^\lambda f/dx^\lambda) = d^{\mu+\lambda} f/dx^{\mu+\lambda}$ が成立する (既に、暗黙のうちに用いた) が、関数の積の微分則や合成関数の微分則はそう簡単でない [1]。

さて、1/2 階微分の物理的意味を考えてみる。いま仮に応力 σ がひずみ e の時間 t に関する 1/2 階微分で与えられているとする。定義 (2.1) によると、 $(t-t')^{-1/2}$ は、現在を t として、過去 t' でのひずみの増分 $de [= (de/dt') dt']$ が現在へどの程度の重みで影響を及ぼしているかを表している。この代数型重み関数 $(t-t')^{-1/2}$ を指数関数型 $\exp[-(t-t')/T]$ と比べると、 T のような代表的緩和時間スケールが存在しないことが重要である。ところで、履歴という観点から 1 階微分を考え直すと、過去への依存が代数関数のように緩やかではなく、現在に限りなく近い過去にだけ、しかしデルタ関数的に非常に大きく依存

するとも考えることが出来る。なお、非整数階微積分の詳しい説明については、解説[1]及び、その中で引用された文献を参照されたい。

3. Newton流体における履歴のおこり

さて、Newton流体において履歴がどのように現れるのか考えてみよう。無限に広がった静止流体の中を流線型の物体が速度 U で運動しているとする。Reynolds数が十分大きいときには、粘性効果は物体ごく近傍のいわゆる境界層にのみ限られ、その外側ではポテンシャル流れが実現される。ポテンシャルを ϕ とすると、物体の境界条件は、 $\partial\phi/\partial n = U \cdot n$ で与えられる。ただし、 n は物体表面での外向き法線ベクトルである。この物体がある時刻以降静止したとすると、そのとき境界条件は $\partial\phi/\partial n = 0$ となり、Laplace方程式の解 ϕ は至るところ定数となる。その結果、流れはその瞬間以降静止しなければならないことを示している。

だが、現実の流体ではそういうことは有り得ない。何故だろうか？ それは境界層が履歴効果を生じさせるためである。これをもう少し定量的に見るために、境界層を最も簡単化したモデルともいえるべき Rayleigh問題を考えてみよう。平板によって仕切られた半無限領域を占める粘性流体が、平板の面

内運動によって誘起される流れを考える。平板の運動方向に x 軸を、それに垂直に流体側に y 軸をとる。流体の x 軸方向速度成分 u は、Navier-Stokes 方程式より、 $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial y^2$ で与えられる（ただし、適当に無次元化されているものとする）。これに対する境界条件は、平板上 $y=0$ で $u=u_0(t)$ （平板速度）、一方 $y \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0$ を満たさなければならない。解 u は、例えば Fourier 変換など用いれば、求めることが出来る。テキストでは普通 u を求めて説明を終るが、ここでは一歩進んでせん断応力 τ （無次元）を求めてみると

$$\tau = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-t'}} \frac{\partial u}{\partial t'} dt' = -\frac{\partial^{1/2} u}{\partial t^{1/2}} \quad (3.1)$$

のように速度の $1/2$ 階微分で与えられる。したがって平板上では $u=u_0$ より、 u_0 がゼロになっても応力はただちにはゼロにならず、流体に暫くの間応力を与え続ける。この結果「流れはすぐには止れない」ことになる。この簡単な例からも、境界層が履歴効果を生じさせることが理解されるだろう。

ここで参考までに、(3.1) を導く非常に簡単な方法があることを紹介しておく。応力を求めるには、 $\partial u / \partial y$ が必要なので、方程式を因数に分けて

$$\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0 \quad (3.2)$$

とすると、第2番目の因子より求まる。第1番目の因子は物理的には意味がないことは、分散関係を調べると発散解を与えることから分かる。放物型方程式を因数に分ける方法は、丁度2階双曲型波動方程式 $\partial^2 u / \partial t^2 - \partial^2 u / \partial x^2 = (\partial / \partial t - \partial / \partial x)(\partial u / \partial t + \partial u / \partial x) = 0$ で D'Alembert の解法における特性線の導入や、楕円型 Laplace 方程式 $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = (\partial / \partial x + i \partial / \partial y)(\partial u / \partial x - i \partial u / \partial y) = 0$ の分解から $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ の共役変数の導入と対比して考えると面白い。

4. 履歴を伴った非線形波動の例

Newton 流体でも履歴が境界層から生じることを非常に簡単な例を用いて説明した。では、実際の具体的な波動系でどのように現れるか、浅水波、音波、及び気泡を含む液体中の波（以下、単に気泡波と呼ぶ）の例でみてみよう。

4.1. 浅水波における履歴効果

まず最初に浅水波に対する影響を見てみよう。簡単のため二次元問題を考え、波の伝播方向に x 軸を、それに垂直に y 軸を鉛直上向きにとる。平らな水底を $y=0$ とし、静止水面を $y=h$ (>0) とする。自由表面の変位は微小有限とし、一方長波を考えるものの表面の曲率効果も考慮する。後者の仮定は、流体

の鉛直加速度成分を小さいながらも取り入れることを意味する。自由表面での運動学的境界条件は、表面変位 η を用いると $v = \partial\eta/\partial t + u\partial\eta/\partial x$ で与えられる。ここで、 u , v は流体の x , y 方向速度成分であり、 t は時間である。では、流体内部の鉛直速度を求めてみよう。表面変位は小さいので、境界条件の最低次だけとると、 $v = \partial\eta/\partial t$ 、一方水底では $v=0$ である。長波を考えている（水深が浅い）ことから、流体内部の鉛直速度 v は深さの一次関数で近似できる：

$$v = \frac{\partial\eta}{\partial t} \frac{y}{h}. \quad (4.1)$$

鉛直方向の運動方程式の慣性項にこの速度を用いると、流体内部での圧力 p は次のように与えられる：

$$\frac{p}{\rho} = -g(y-h-\eta) + \frac{1}{2h} \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} [(h+\eta)^2 - y^2]. \quad (4.2)$$

ただし、 ρ を流体密度、 g を重力加速度とし、表面では $p=0$ とする。この第一項は静水圧を表し、第二項はそれに対する表面の鉛直加速度、換言すれば表面の曲率による修正である。

粘性の影響は十分小さいとして今まで無視してきたが、しかし、その影響は底での境界層に現れる。いま、領域を薄い境界層とそれ以外の粘性のあまり効かない領域にわけて考える。まず、連続の式を深さ方向に表面から境界層外縁まで積

分すると

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)u] = v_b \quad (4.3)$$

となる。ここで、 u 、 v_b は深さにわたって平均した x 軸方向速度、および、境界層外縁での鉛直速度である。一方、平均した x 軸方向の運動方程式に圧力 (4.2) を用いると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{h}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} \quad (4.4)$$

となる。 v_b を無視した (4.3) 及び (4.4) はいわゆる Boussinesq の方程式である。

しかし、この方程式を閉じさせるためには、境界層内部の運動から v_b を求めなければならない。波によって誘起される流体の速度は波の速度に比べて十分小さいので、線形化する。境界層の厚さと水深の比の程度を示すパラメータを Δ ($\ll 1$) とし、境界層を y 方向に拡大する新しい変数 $n (= y/\Delta)$ を導入する。そのとき、連続の式および x 方向の運動方程式はそれぞれ次のようになる：

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial n^2}. \quad (4.6)$$

ここで、 \tilde{u} は境界層内部の量をあらわし、 ν は動粘性係数で

ある。また、 \tilde{v} は v/Δ と拡大されており、圧力 p はよく知られているように境界層外部の圧力に等しい。

これに対する境界条件は、底 $n=0$ で $\tilde{u}=\tilde{v}=0$ 、一方接続漸近展開の考えを用いると、 $n \rightarrow \infty$ で $\tilde{u} \rightarrow u$ 、 $\tilde{v} \rightarrow v_b/\Delta$ と境界層外部領域の $y \rightarrow 0$ での値に漸近すべきである。接続条件をみて、いま $\tilde{u} = u + u'$ とおくと、この条件は $u' \rightarrow 0$ と簡単になるが、 $n=0$ では $u' = -u$ となる。一方、(4.6)は(4.4)の最低次の関係 $\partial u/\partial t + g\partial\eta/\partial x = 0$ を用いると、 u' は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\nu}{\Delta^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial n^2} \quad (4.7)$$

を満足しなければならない。これは第3節のRayleigh問題に他ならない。いま必要としている v_b は連続の式を積分して

$$\begin{aligned} \frac{v_b}{\Delta} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} dn = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) dn \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{\partial u}{\partial x} n - \frac{\nu}{\Delta^2} \frac{\partial^{-1}}{\partial t^{-1}} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right) \Big|_0^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{\partial u}{\partial x} n + \frac{\nu^{1/2}}{\Delta} \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{1/2}} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right) \Big|_0^n \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

ここで、最後の項への変形は(4.7)を n に関して0から n まで積分し、 $\partial u'/\partial n = -(\Delta/\nu)^{1/2} \partial^{1/2} u'/\partial t^{1/2}$ を用いる。極限 $n \rightarrow \infty$ をとると、 u' はゼロになるが、 $-(\partial u/\partial x)n$ は発散するように見える。しかし、(4.3)の最低次の関係を用いると $(\partial\eta/\partial t)(y/h)/\Delta$ となり、境界層外部の鉛直速度(4.1)に接続される量である。しかし、境界層外縁は $y \sim \Delta$ であるので、高次となり、したがって v_b は

$n=0$ で $u' = -u$ を用いると次のように与えられる:

$$v_b = \nu^{1/2} \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\nu^{1/2}}{h} \frac{\partial^{1/2} \eta}{\partial t^{1/2}} \quad (4.9)$$

ここで、第2項から第3項へは、(4.3)の最低次の関係を用いた。この v_b を(4.3)に代入すると、(4.4)と共に履歴を伴った Boussinesq 方程式が導かれる。

式(4.3), (4.4)は x 軸の双方向の波の伝播を記述しているが、正方向に伝わる波の遠方場での挙動を考えてみよう。式を無次元にするために、 η/h を εf とおき ($\varepsilon \ll 1$, $f \sim O(1)$)、線形波の速度 $c (= \sqrt{gh})$ で動く系で測った時間を $\theta = \omega(t - x/c)$ (ただし、 ω^{-1} は代表時間)、非線形性の大きさに関連した空間変数 $X = \varepsilon \omega x/c$ を導入する。これらの変数で(4.3), (4.4)を書き直し、小さいと仮定した非線形、境界層及び分散効果の最低次項を残すと次の方程式を得る:

$$\frac{\partial f}{\partial X} - \frac{3}{2} f \frac{\partial f}{\partial \theta} = - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{(\nu/\omega)^{1/2}}{h} \frac{\partial^{1/2} f}{\partial \theta^{1/2}} + \frac{1}{6\varepsilon} \left(\frac{h}{c/\omega} \right)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} \quad (4.10)$$

ここで、 $1/2$ 階及び3階微分の係数は、それぞれ、境界層代表厚さ $(\nu/\omega)^{1/2}$ と深さの比及び深さと波長の比の平方に比例している。注意したいのは、 X は空間変数、 θ は時間変数であるので、(4.10)は波の空間発展を記述していることである。もちろん時間発展を表すようにも表現できるが、そのときには、

1/2階微分はWeyl[3]の定義に従う。しかし、履歴は普通時間に関するものであるので、(4.10)の表現を採用した。なお、(4.10)の接続漸近展開による厳密な導出は文献[4]を参照されたい。

最後に、履歴効果は散逸と分散性を同時に引き起こすことに注意したい。実際、 f を $\exp[i(KX - \Omega\theta)]$ (K, Ω は波数および周波数)に比例しているとして、1/2階微分の分散関係を求めると $(-i\Omega)^{1/2} f$ となることから分かるであろう。

4.2. 音波における履歴効果

次に、非線形音波における履歴効果を考えてみよう。十分に長い円管内を音波が伝わる時、管壁に沿って境界層が発生する。境界層外部では、音波の誘起する流体運動はほぼ管の軸方向(x軸とする)にあるとする。浅水波の場合と同じように、連続の式を境界層を含まない断面にわたって平均すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = \frac{2}{R} \rho v_b \quad (4.11)$$

となる。ここで、 ρ, u は断面にわたって平均した密度及びx軸方向速度であり、 R, v_b は管の半径及び境界層外縁における半径(内向き)方向速度である。

一方、軸方向の運動方程式で弱いながらも粘性を考慮する

と

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \mu + \mu_0 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.12)$$

となる。ここで、 μ_0 は体積粘性係数である。これらの式に加え、本来エネルギー式が必要であるが、いま振幅や粘性の小さい場合を考えているので、エントロピーは熱伝導によってのみ変化する。この変化が(4.12)の圧力勾配を通して現れる。詳しくは文献[5]を参照のこと。いま密度を音速 $a (= \sqrt{dp/d\rho})$ で表し、 $\rho/\rho_0 = (a/a_0)^{\frac{2}{\gamma-1}}$ (γ は比熱比で、添え字ゼロは以下平衡状態での値を示す)、この関係を使って(4.11), (4.12)を書き直すと、気体の一次元非定常運動を記述するよく知られた左辺に、境界層効果、散逸効果を伴った次の方程式を得る：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u \pm \frac{2}{\gamma-1} a) = \pm \frac{2a}{R} (\nu_b + \nu_d) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.13)$$

ここで、 $\nu_d (= \nu) [4/3 + \mu_0/\mu + (\gamma-1)/Pr]$ (ただし $\nu = \mu/\rho_0$) は音の拡散係数と呼ばれ、 Pr は Prandtl 数である。

さて、 ν_b を求めるには、境界層内部の流れを知らなければならぬ。音波に伴う流速は小さいので線形近似が出来るとすると、連続の式、運動方程式、及びエネルギー式は次のように書ける：

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0, \quad (4.14)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\mu}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right) = \frac{k}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial n^2}. \quad (4.16)$$

ここで、 n は、半径方向座標を r をすると、 $n=(R-r)/\Delta$ で定義されている。ただし、 Δ は境界層の厚さの程度。また、 \sim は境界層内の量を表し、 \tilde{v} は n 方向速度、 \tilde{T} は温度であり、 k は熱伝導係数である。気体の場合には、浅水波にはなかった温度の影響が現れるために、粘性による速度境界層に加えて温度境界層をも考慮しなければならない。しかし、各境界層問題はそれぞれ Rayleigh 問題に他ならないことが分かる。それら2つの境界層効果から、 v_b は次式で与えられる：

$$v_b = C \nu^{1/2} \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{1/2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (t=t_0 \quad C = 1 + \frac{\gamma-1}{\rho_r^{1/2}}). \quad (4.17)$$

いま x 軸の正方向への波の伝播を考えると、最低次近似 $\partial u / \partial t = -a_0 \partial u / \partial x$ が成り立つから、 v_b は浅水波の場合同様最終的には $1/2$ 階微分で与えられる履歴効果をもたらす。

この関係を (4.13) に用い、遠方場での方程式を導くために、 $u/a_0 = \varepsilon f$ とおき、時間、空間変数として θ 、 X を浅水波の場合と同様に定義する。ただし、 $c=a_0$ とする。これらの変数で (4.13) を書き直し、境界層効果及び散逸効果の最低次項を残すと、次式を得る：

$$\frac{\partial f}{\partial X} - \frac{\gamma+1}{2} f \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{C(\nu/\omega)^{1/2}}{\varepsilon R} \frac{\partial^{1/2} f}{\partial \theta^{1/2}} + \frac{\nu \omega}{2\varepsilon a_0^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \quad (4.18)$$

ここで、 $1/2$ 階微分の係数は、境界層厚さと管の半径の比に比例し、一方、 2 階微分の係数は音響 Reynolds 数の逆数に比例する。こうして、音波の場合にも、境界層効果は $1/2$ 階微分の履歴となって現れることが分かった。なお、方程式(4.18)の詳しい導出は文献[6]を参照のこと。

4.3. 気泡波における履歴効果

先の二つの例においては、固体壁での境界層が問題となった。しかし、固体壁がなくとも、気泡界面のような自由表面でも境界層効果が重要になる場合がある。最後にこの例を紹介しよう。ちなみに、浅水波でも自由表面に境界層が現れるが、底面境界層に比べるとその影響は十分小さい。というのは、底面境界層は底面でのノンスリップ条件を完全流体が満足出来ないことから現れたのに対し、自由表面での応力連続の条件では、圧力連続という最低次の境界条件は既に満たされているからである(弱い粘性散逸を考えていることに注意)。

多くの気泡を含んだ液体を取り扱う前に、単一気泡の運動について考える。流れのない無限に広がった液体中に、球形の気泡があるとし、その半径 R が時間 t とともに変動するものとする。気泡の膨張、収縮によって誘起される液体の運動は、わき出し、吸い込みに対するポテンシャル流れで表される。

すなわち、泡の中心からの距離 r ($>R$) の液体の半径方向速度 v_r は $R^2 \dot{R}/r^2$ である (ただし、 $\dot{R} = dR/dt$)。この流れはまた、Navier-Stokes 方程式の解にもなっている。実際、粘性項はこの v_r に対してゼロになる。この方程式を $r=\infty$ から気泡表面 $r=R$ まで積分すると、

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho}(p_g - p_\infty - \frac{2T}{R} - 4\mu_l \frac{\dot{R}}{R}) \quad (4.19)$$

となる。ここで、 p_g 、 p_∞ は気泡内圧及び $r=\infty$ での液体の圧力であり、 T 、 μ_l は表面張力及び液体の粘性係数である。積分する際、気泡表面での境界条件、すなわち液体側と気体側の応力連続条件 $-p + 2\mu_l \partial v_r / \partial r = -p_g + 2T/R$ を用いた。式(4.19)は Rayleigh-Plesset の式として知られている [7]。

次に、どのように気泡表面に境界層が発生するかを考えてみよう。固体壁でのような速度不連続は生じないので、速度境界層は出現しない。しかし、気体側の温度は断熱的に変化するのに対し、液体側の温度は一定に保たれるのでこのため温度境界層が現れる。解析の詳細は省略するが、線形化する限り、断熱変化に対する履歴の影響は次のようになる [8]:

$$\frac{p_g}{p_{g0}} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{3\gamma} = 1 - 3(\gamma-1) \frac{\nu_T^{1/2}}{R_0} \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{1/2}} \left(\frac{p_g - p_{g0}}{p_{g0}} \right). \quad (4.20)$$

ここで、 p_{g0} 、 R_0 は圧力及び半径の平衡値であり、 ν_T は温度拡

散係数である。

さて、気泡を多く含む液体を伝わる弱非線形波を考える。

Rayleigh-Plessetの式が成立するには、気泡間距離が十分離

れている必要がある。気泡の大きさを R_0 、単位体積中の気泡

数 N を一定とすると、気泡の占める体積割合は $4\pi R_0^3 N/3 = \beta_0$ であ

る。以下、この β_0 が十分小さい場合を扱う。液体は非圧縮

と仮定し、その運動は線形化出来ると考えると、連続の式及

び運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 N \right), \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.22)$$

となる。ただし、 u は波の伝播方向の液体の速度、 p は圧力で

ある。一方、気泡の運動は(4.19), (4.20)に支配され、非線形

性は気泡の振動にのみ起因する。いま $(R-R_0)/R = \xi f$ とおき、

θ, X を浅水波、音波の場合と同様に定義すると、 f は次の方程

式によって記述される：

$$\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{3}{2}(\gamma+1)f \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{3}{2}(\gamma-1) \frac{(\gamma/\omega)^{1/2} \partial^2 f}{2R_0 \partial \theta^{1/2}} + \frac{2}{3\varepsilon\beta_0} \frac{\gamma\omega}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{(\omega)^2 \partial^3 f}{\omega \partial \theta^3}. \quad (4.23)$$

ここで、 $c^2 = \delta p_{g0}/(\beta_0 \rho)$ 、 ω_0^2 は気泡の共振周波 $3\delta p_{g0}/(\rho R_0^2)$ である。

ここで、表面張力は簡単のため無視したが、気泡半径が小さ

くなるにつれ重要になることは明らかである。方程式(4.23)の

1/2階, 2階, 3階微分の係数は、浅水波や音波同様、温度境界層厚さと半径の比、音響 Reynolds 数の逆数、及び代表周波数と共振周波数の比できまる。詳しくは、文献[9]を参照のこと。

以上、浅水波、音波、気泡波の代表的な三つの発展方程式で見たように、境界層による履歴効果は常に1/2階微分で現れる。しかし通常散逸や分散を表す2階、3階微分の係数は1/2階微分の係数に比べてはるかに小さい場合が多い。次の節では、これらの高階微分を全く無視し、履歴効果だけを取り入れた最も簡単な非線形波動方程式の解について調べてみよう。

5. 発展方程式

考えるべき方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial X} - f \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\delta \frac{\partial^{1/2} f}{\partial \theta^{1/2}} \quad (5.1)$$

である。ここで、非線形項の係数は f をスケールし直すことによって消去されており、 $\delta (>0)$ は定数である。履歴項をいままであたかも微分であるかのように扱ってきたが、この方程式はあくまでも非線形微積分方程式であることに改めて注意したい。

5.1. 定常解

まず、(5.1)の定常進行波解を、 $f=f(z)$ (ただし、 $z = \delta^2(\theta - X/\lambda)$; λ は定数)とおいて求めてみる。この z を用いると見かけ上 δ を消去できる。境界条件として、波のはるか前方で攪乱がない、すなわち、 $X \rightarrow \infty$ で $f \rightarrow 0$ 、ととると、(5.1)は次のようになる:

$$V\phi - \phi^2 = -\frac{d^{-1/2}\phi}{dz^{-1/2}}. \quad (5.2)$$

ここで、 $\phi = f/2$ であり、 $V = -1/\lambda$ である。この積分方程式の解の性質としては、(1) $\phi(z)$ を(5.2)の解とするとき、 $\phi(z+z_0)$ (z_0 は任意定数)も解である。(2) 連続かつ有界な解は存在しない。(3) $V > 0$ に対しては、不連続解 (ϕ の跳びの大きさ V)が存在する。図1の実線で示すように、不連続の位置を $z=0$ とし (V は一般性を失うことなく1とおける)、 ϕ は $z < 0$ でゼロ、 $z \rightarrow \infty$ では漸近的に $\sqrt{\pi z/4}$ で発散する。(4) $V=0$ に対しては、厳密解 $\phi = \sqrt{\pi z/4}$ が存在する (図1の破線) (5) $V < 0$ に対しては、解はないことが知られている。詳しくは文献[6]を参照されたい。

5.2. 初期値問題

次に、方程式(5.1)の初期値問題、すなわち、 $X=0$ で与えた $f(\theta, 0) = F(\theta)$ からの発展を考えよう [10]。初期値問題といって

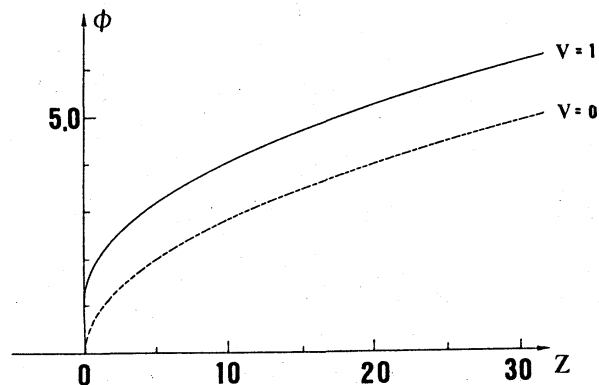


図1: 定常解

も、(5.1)は空間発展を記述しているので物理的には境界値問題に相当していることに注意したい。双曲形波動方程式との類推から、(5.1)は次の'特性形'に書ける：

$$\frac{d\theta}{dX} = -f \quad \text{よって} \quad \frac{df}{dX} = -\delta \frac{\partial^{1/2} f}{\partial \theta^{1/2}}. \quad (5.3)$$

解は非線形性のために、初期波形がXの発展と共に多価になり、そのため不連続を導入する必要が予想される。そこで、仮に不連続が $\theta = \tau(X)$ にあるとし、それが満たすべき関係を求めよう。いま不連続解fが次のように表現できるとする：

$$f = B(\theta, X) + [V_0 + V_1 |\eta|^{1/2} + V_2 \eta + \dots + V_n |\eta|^{n/2} + \dots] h(\eta). \quad (5.4)$$

ここで、 $B(\theta, X)$ は $\theta < \tau(X)$ での連続解を表し、 $h(\eta)$ はステップ関数である($\eta = \theta - \tau(X)$)。 V_0 が不連続を与える。ただし、 V_n ($n=0, 1, 2, \dots$)はXの関数である。また、 $B(X, \theta)$ は $\eta = 0$ の回りで次のように展開できるとする：

$$B = B_0 + B_2 \eta + B_4 \eta^2 + \dots. \quad (5.5)$$

ここで、 B_n ($n=0, 2, 4, \dots$)はXの関数である。これらの関係を(5.1)に代入し、デルタ関数 $\delta(\eta)$ 及び $|\eta|^{n/2} h(\eta)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)の係数より次の関係を得る：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tau}{dX} &= -\frac{1}{2}(V_0 + 2B_0), & V_1 &= \frac{4\delta}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned} \right\}$$

$$V_n = \frac{4}{nV_0} \left[\frac{dV_{n-2}}{dX} - \frac{n}{4} (V_1 V_{n-1} + V_2 V_{n-2} + \dots + V_{n-1} V_1) \right. \\ \left. + \delta \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} V_{n-1} - \frac{n}{2} (B_2 V_{n-2} + B_4 V_{n-4} + \dots + B_n V_0) \right] \quad (5.6)$$

(ただし, $B_n \equiv 0$; n 奇数)

最初の式は不連続の強さとその速度を与える関係であるが、(5.1)の右辺をゼロとした双曲形方程式に対して導かれる関係に他ならない。言い替えれば、 $1/2$ 階微分は不連続の伝播には直接関与しないことが分かる。一般に方程式の最高階微分が解の振舞いを決定することからすれば、 $1/2$ 階微分は1階微分より実際低次である！ 履歴の影響は V_1 に初めて現れ、しかも V_1 は定数であることに注意したい。この項によって、不連続は右側に「まるく」見えることが予想される。

さて、具体的な初期値からの発展を調べてみよう。方程式(5.2)を特性線に沿って積分する。波形が多価になるときには、上で求めた不連続を導入する。初期値として、正、負のステップ関数及びガウス分布形パルスを考える。

(I) 正のステップ関数: $F(\theta) = h(\theta)$

この初期値には θ の代表スケールがないので、 θ 及び X を適当にスケールし直すことによって、 $\delta = 1$ と選べる。図2に初期ステップの $X=0.7$ までの発展を示す(ただし、 X の刻みは

0.05)。履歴効果によって波頭での不連続が急速に減衰し、またその速さも減速される。ちなみに、 $1/2$ 階微分を無視すると、ステップは減衰することなく一定速度 $d\zeta/dX = -1/2$ で進行するだけである。

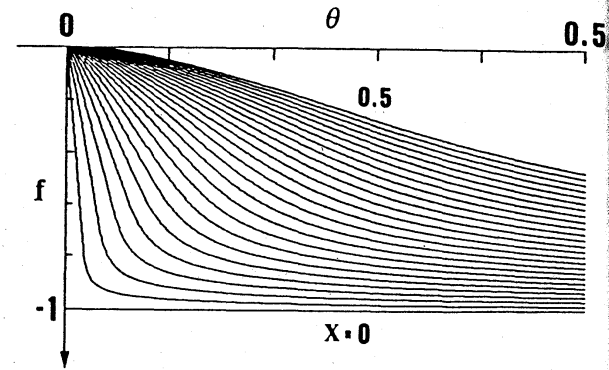
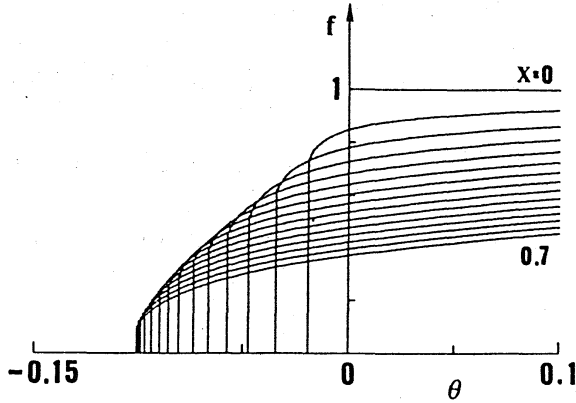


図2: 正のステップからの発展

図3: 負のステップからの発展

(II) 負のステップ関数: $F(\theta) = -h(\theta)$

この場合には、不連続は発生せず、ステップが緩和するだけである。 θ の負の領域は常に $f=0$ で、原点近傍 $0 < X < \theta$ にいわゆる相似解が出現する。相似変数を $f/X = g$, $\theta/X^2 = \zeta$ とおくと、

g は

$$g - 2\zeta \frac{dg}{d\zeta} - g \frac{dg}{d\zeta} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta \frac{1}{\sqrt{\zeta - \zeta'}} \frac{dg}{d\zeta'} d\zeta' \quad (5.7)$$

で支配される。ただし、正のステップ同様 $\delta = 1$ とした。この方程式の $\zeta \rightarrow 0$, および $\zeta \rightarrow \infty$ の漸近解から、 f は次のように求まる:

$$f \sim \frac{\theta^{3/2}}{X^2} \exp\left(-\frac{X^2}{4\theta}\right), \quad 0 < \theta \ll X^2, \quad (5.8)$$

$$f \sim -\frac{\theta}{X} + \frac{4\sqrt{\theta}}{3\sqrt{\pi}} + \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{3}\right)X + \dots, \quad X^2 \ll \theta. \quad (5.9)$$

これから分かる様に、波頭 $\theta = 0$ では波は非常に滑らかになる。

図 3 に波形の $X=0.5$ までの発展を示す（ただし、 X の刻みは 0.02 である）。履歴を無視した場合の解 $f = -\theta/X$ と比べると、例えば、 $\theta = X = 0.5$ での f の値を比べると履歴効果の顕著さが分かるであろう。

(III) パルス波: $P(\theta) = \pm \exp(-\theta^2)$

最後に、正、負のガウス形分布をしたパルスの発展を図 4、5 に示す。ともに X の刻みは 0.5 である。この場合には、 δ を常に 1 にはおけず、図は δ を 0.1 としたときの発展である。履歴効果を考えなければ、正、負パルスは原点に対して反対称に発展する。しかし、履歴効果のため、反対称性は崩れ、パルスはいずれの場合も後方に顕著に引き延ばされる。このパルスの尻尾の出現は履歴の大きな特徴である。したがって、最初パルスが如何に局在していても、発展するにつれ広範囲に広がってしまうことになる。この傾向は δ が大きくなるにつれ著しくなり、それとともに、不連続の出現は抑えられる。

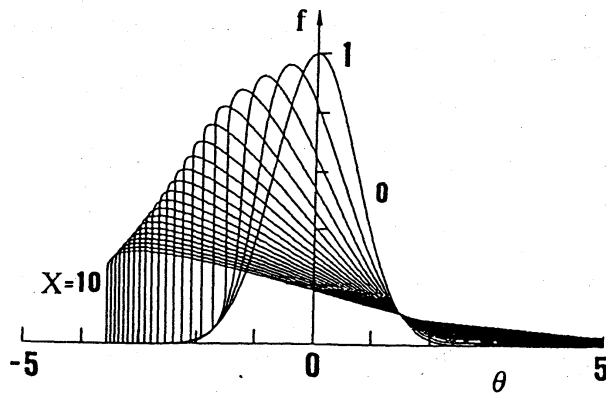


図 4: 正のパルスからの発展

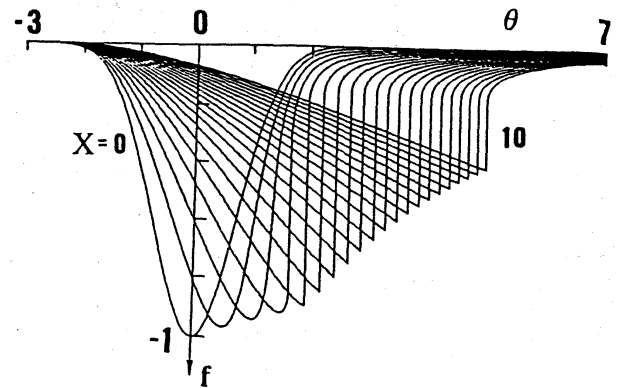


図 5: 負のパルスからの発展

6. あとがき

Newton流体のようにそれ自身粘弾性をもたない単純な流体でも、境界層が履歴を生じさせることを見た。履歴は波の発展方程式に対しては1/2階微分形で現れることも、代表的な三つの例で示した。もちろん、これら以外にも同様な例は多く存在する。履歴は実質的には積分で与えられるが、1/2階微分とも解釈されるように、発展方程式の解では局所的には低階の微分としての側面を残している。この意味では、多くの積分方程式のうちでも、かなり微分方程式に近いともいえる。しかし、やはり本来積分方程式であるので、その影響が大局的に現れるのは当然である。例えば、2階微分の散逸を考えると、両者の発展への寄与は対照的である。具体的には、2

階微分は不連続を滑らかにする反面、非常に局所的にしか、すなわち、不連続近傍以外では作用しない。一方、 $1/2$ 階微分は不連続の発生を許すように局所的には大きな影響を及ぼさないが、しかし、波を領域全体に'拡散'させ、波形を大きく変化させる大局的な影響を及ぼす[11]。したがって、特に、波の遠方場の定量的挙動を追求する際には、履歴効果は不可欠といえる。

最後に、この原稿に目を通していただきました大阪大学基礎工学部角谷典彦教授に心より感謝申し上げます。

参考文献

1. 杉本信正：非整数階微分・積分とその応用 ながれ
4 (1985) 110-120.
2. I. M. Gel'fand & G. E. Shirov: Generalized functions, Vol.1 (Academic, 1964) 115-122.
3. A. Erdélyi(ed.): Tables of integral transforms, Vol.2 (McGraw-Hill, 1954) 181-212.
4. T. Kakutani & K. Matsuuchi: Effect of viscosity on long gravity waves, J. Phys. Soc. Japan Vol.39 (1975) 237-246.

5. 杉本信正、角谷典彦：Burgers方程式と非線形音波
月刊フィジックス Vol.6 (1985) 141-147.
6. N. Sugimoto: 'Generalized' Burgers equations and
fractional calculus, Nonlinear Wave Motion (ed.
A. Jeffrey) (Longman, 1989) 162-179
7. M. S. Plesset & A. Prosperetti: Bubble dynamics
and cavitation, Ann. Rev. Fluid Mech. (Ann. Revs.
Inc., 1977) 145-185.
8. M. J. Miksis & L. Ting: Nonlinear radial oscilla-
tions of a gas bubble including thermal effects,
J. Acoust. Soc. Am. Vol.76 (1984) 897-905.
9. M. J. Miksis & L. Ting: Effective equations for
multiphase flows-Waves in a bubbly liquid, Adv.
Appl. Mech. (1990) 出版予定.
10. N. Sugimoto: Evolution of nonlinear acoustic waves
in a gas-filled pipe, Proc. of 12th International
Symposium on Nonlinear Acoustics (Elsevier) 出版予
定.
11. N. Sugimoto: Effect of fractional-derivative dis-
sipation on Burgers equation in nonlinear
acoustics 投稿中.