数理解析研究所講究録
第 740 巻 1991 年 61-65

Blow - up Point of Radially Symmetric Solutions for the Nonlinear Schrödinger Equation

名古屋大・理　堤 誉志雄 (Yoshio Tsutsumi)

次のような非線形シュレディンガー方程式を考える。

(1) $i\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u - |u|^2 u$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^2$,

(2) $u(0,x) = u_0(x)$.

方程式(1)は laser beam や plasma の現象を記述する方程式であると考えられている。([2], [8] 参照)

ある種の初期値に対しては、(1)-(2)の解はたとえ初期値が滑らかであっても、解 $u(t,x)$ は有限時刻で特異性を持つようになることが知られている。([1], [7] 参照) 空間のどの位置で特異性が発生するかということは、方程式(1)の記述する物理現象との関連から重要な問題である。(例えば laser beam の現象では、特異性の発生する点が焦点ということになる。) 一般にこの問題は、初期値の形状に依存して複雑である。 ここでは、初期値 $u_0(x)$ が軸対称、即ち

$u_0(x) = u_0(|x|)$ である場合を考察し、F. Merle (Ecole Normale Supérieure) との共同研究によって得られた結果について報告したい。

次のような定理が成立する。

<u>定理</u>　初期値 $u_0(x)$ が軸対称 (即ち、$u_0(x) = u_0(|x|)$) とする。もし (1)-(2) の解 $u(t, x)$ に対して有限時刻で特異性が発生するなら、必ず原点 $x = 0$ で特異性が発生する。

上の定理の数学的証明は [5] の Proposition 2 で詳しく述べられている。以下、上記の定理に関連したいくつかの注意を述べておきたい。

<u>注意</u>　(1) 初期値が軸対称であれば、(1)-(2) の解は存在する限り軸対称である。そのことは、(1)-(2) の解の一意性と方程式 (1) が回転に関して不変であることより示される。

(2) 上の定理は、特異性が発生する時は必ず原点で発生するということを言っているが、原点以外では発生しないということは主張していない。予想としては、初期値が軸対称である時は、原点以外では特異性は発生しないと推測されている。

(3) 上の定理は一見当然のことのように思われるかもしれないが、問題となるのは「すりばち型」の初期値の時である。 実際、上の定理のような性質は非線形シュレディンガー方程式の特徴の一つで、たとえば次のような反応拡散方程式では一般には成立しないことが、Giga and Kohn [9] によって示されている。

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - u^3 = 0 & \text{in } B_R, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \\ u|_{\partial B_R} = 0. \end{cases}$$

但しここで、B_R は原点を中心とした半径Rの円である。

(4) 一次元空間の時は、偶関数を初期値に取っても原点で特異性が発生するとは限らない。 そのことは、

$$i u_t = - u_{xx} - |u|^4 u \quad , x \in \mathbb{R}.$$

に対して、Merle [4] によって示された。

最後に、興味深い数値計算の結果が、[3], [6] で示されていることを付け加えておきたい。

REFERENCES

[1] R.T. Glassey, On the blowing-up of solutions to the Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation, J. Math. Phys., 18 (1977), 1794-1797.

[2] P.L. Kelley, Self-focusing of optical beams, Phys. Rev. Lett., 15 (1965), 1005-1008.

[3] B. LeMesurier, G. Papanicolaou, C. Sulem and P.L. Sulem, The focusing singularity of the nonlinear Schrödinger equation, in "Direction in Partial Differential Equations", edited by M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz and R. E. Turner, pp. 159-201, Academic Press, New York, 1987.

[4] F. Merle, Construction of solutions with exactly k blow-up points for the Schrödinger equation with critical nonlinearity, Comm. Math. Phys., 29 (1990), 223-240.

[5] F. Merle and Y. Tsutsumi, L^2 concentration of blow-up solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity, J. Diff. Eqs., 84 (1990), 205-214.

[6] P.L. Sulem, C. Sulem and A. Patera, Numerical simulation of singular solutions to the two-dimensional cubic Schrödinger equation, Comm. Pure Appl. Math., 37 (1984), 755-778.

[7] M. Tsutsumi, Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the damped nonlinear Schrödinger equation, SIAM J. Math. Anal., 15 (1984), 357-366.

[8] V.E. Zakharov, Collapse of Langmuir wave, Soviet Phys. JETP, 35 (1972), 908-914.

[9] Y. Giga and R.V. Kohn, Nondegeneracy of blow-up for semilinear heat equations, Comm. Pure Appl. Math., 42 (1989), 845-884.