

## 弱散逸K-dV系の長波によるソリトン捕捉

阪大 基礎工 吉永隆夫 (Takao YOSHINAGA)

角谷典彦 (Tsunehiko KAKUTANI)

### § 1. 前置き

種々の分散媒質中における弱非線形長波を記述する最も代表的な方程式として Korteweg-de Vries (K-dV) 方程式がよく知られており、その安定な孤立波解ソリトンが K-dV 系での非線形波の伝播の研究において重要な役割を果たしてきた<sup>1-5</sup>。このソリトンの伝播に対する、媒質の散逸や不均一または非一様性の影響もまた調べられており、多くの場合ソリトンはその安定性を失い、減衰や分裂そして時には増幅作用を受けることが明らかにされてきた<sup>6-8</sup>。

最近この問題に関連して、不均一が系の特性速度で伝播するような、ある種の非一様性を伴う媒質中でのソリトンの伝播が Yagi 等<sup>9, 10</sup>により調べられた。彼らは、この非一様性と散逸が共存する最も簡単な場合を取り扱い、ある条件の下では増幅または減衰を伴う厳密なソリトン解が存在することを示した。このような媒質の非一様性によるものと同様な現象は、均一な媒質中で弱い散逸を伴う K-dV 系において、振幅及び変動スケールの異なる二種類の波が共存する場合にも可能である。即ち、K-dV 系固有の波と更に波長が長くかつ小さな振幅の波が共存する場合である。本研究では、この様な例として、K-dV ソリトンが媒質の弱い散逸と波長の長い小振幅の正弦波によりどのような影響を受けるかを調べる。

これら二つの波による相互作用の効果がたとえ小さくても、二つの波の

伝播速度がほぼ等しく、かつソリトンの有効幅に比べて正弦波の波長が十分長いので、長時間にわたる相互作用が可能となり、十分時間を経た後には有意の効果が現れる。さらに、長波からのエネルギー流入によるソリトンの増幅と散逸効果によるソリトンの減衰の結果、ある種の釣合状態が期待できる。我々の目的は、弱散逸K-dV系においてこのような現象を記述する発展方程式を導出し、その解の長時間にわたる振舞いを調べることである。

本研究において基礎となる一次元弱散逸K-dV系は、最低次の近似のもとで以下の方程式で記述される<sup>11)</sup>：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \varepsilon R(u) \quad , \quad (1)$$

ここで、 $\varepsilon$ は散逸の程度を表す正の微小パラメータであり、非線形項の係数 $\alpha$ は正の定数である。代表的な $R(u)$ の関数形としては、正の定数 $\gamma$ （媒質の特性によってきまるパラメータ）を用いて、次の三つの形がよく知られている：

$$(i) \quad R(u) = -\gamma u, \quad (ii) \quad R(u) = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (iii) \quad R(u) = \gamma \int_z^\infty \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{\sqrt{|x-z|}}.$$

(i)は散逸効果が最も簡単な代数形で与えられる場合であり、(ii)はK-dV-Burgers方程式としてよく知られている微分形で与えられる場合である。

(iii)は浅水波に対する粘性境界層の散逸効果を表すもので積分形<sup>12)</sup>で与えられる場合である。この積分形は $u$ の1/2階微分として表示する<sup>13)</sup>こともできる。以下では、主に散逸が(i)と(ii)の形で与えられる場合について考える。

## § 2. 発展方程式の形式的導出

ここでは、個々の具体的な物理系の基礎方程式系から直接発展方程式

を導出する代わりに、(1)式からの形式的導出を示すにとどめる。そのため、まず微小パラメータ $\delta$ を導入し、 $u$ を $u+\delta^2U$ 、 $x$ を $x+\delta X$ 、そして $t$ を $t+\delta^3T$ で置き換えることにより、大きさ及び変動スケールの異なる二種類の波 $u=u(x,t)$ と $U=U(X,T)$ を考える。更に、 $R(u+\delta^2U)$ を $u$ 回りでTaylor展開すると、(1)式より以下の式を得る：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta^2 \alpha \frac{\partial (uU)}{\partial x} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \delta^5 \left( \frac{\partial U}{\partial T} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 U}{\partial X^3} \right) = \varepsilon R(u) + \varepsilon \left( \frac{dR}{du} \right) \Big|_u \delta^2 U + \dots, \quad (2)$$

ここで、左辺の $\partial U/\partial x$ は $\delta \partial U/\partial X$ と書き換えられることに注意しよう。散逸効果が最も簡単な場合(i)に対して、 $\varepsilon$ を $\delta^3$ と選び $0(\delta^3)$ まで取れば我々の求める発展方程式を得る。一方、 $0(\delta^5)$ では散逸項 $(dR/du)|_u U (=R(U))$ を伴う $U$ に関するK-dV方程式を得る。Rが他の場合についても同様で、(ii)の場合に対して $\varepsilon$ を $\delta$ と選び、(iii)の場合に対して $\varepsilon$ を $\delta^{2/5}$ と選ぶことにより $0(\delta^3)$ まで取れば、求める発展方程式を得ることができ、 $0(\delta^5)$ で前と同様 $U$ に関する散逸K-dV方程式を得る。

こうして、'長波' $U$ との相互作用の項と散逸項 $R(u)$ を含む $u$ に対する発展方程式は、 $U$ と $R$ に微小量 $\delta$ を陰に含めた形で以下のように書くことができる：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial (uU)}{\partial x} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = R(u). \quad (3)$$

(2)式で $0(\delta^5)$ を無視する限り、(3)式に含まれる $U$ は $X$ (または $x$ )だけの関数で $T$ (または $t$ )によらないと仮定することができる。この時、(3)式は与えられた関数形 $U$ ( $x$ の既知関数)を係数とする $u$ に対する発展方程式とみなすことができ、(3)式を $u$ の初期値問題として解くことができる。しかし、十分時間が経った後では、先のオーダー評価で無視した $0(\delta^5)$ での $U$

自身の時間発展を考える必要がある。このとき、(3)式は弱散逸K-dV方程式の解 $U(X,T)$ を係数とする $u$ に対する発展方程式と見なさねばならない。最近、JeffreyとDai<sup>14</sup>は、散逸がない場合( $R \equiv 0$ )に、 $U$ をK-dV方程式の解として、(3)式が拡張された逆散乱法によりソリトン解を持つことを示した。このことは、(3)式が上で述べたようにK-dV方程式を基礎として、簡単な変数変換により得られることを考えると自然な結果と言える。一方、(3)式で $U = v(x-x_0)$ とし( $v, x_0$ は定数)、(i)の散逸を考えるとき、(3)式はYagi等<sup>9,10</sup>により非一様な媒質に対して導出された式に帰着する。ここで、 $v = -\gamma$ の正負に対応してそれぞれ増幅または減衰するソリトン解が得られている。この意味で、 $U$ を媒質の非一様性とみなすこともでき、ときにはソリトンの増幅を引き起こす一種の'能動媒質'として作用すると考えられる。

(3)式の導出に関しては、少なくともここで取り上げた三種類の散逸形に対しては、拡張された微分展開法を用いることにより(1)式より複雑な個々の具体的な物理系を記述する基礎方程式系から直接導出することができることを注意しておこう。ここで、'拡張された'というのは、非線形性や分散性の目安となる微小パラメータによる微分展開以外に、上に述べた変数の置き換えでみられるような、 $u$ と $U$ の二種類の波の間で $\delta$ の適当なべき乗に比例した変動スケールや振幅の大きさの違いを考慮する必要があること意味している。

### § 3. ソリトンの捕捉

#### 3. 1 線形分散関係と保存量

前節の方程式の導出において示したように、 $U$ の波長が $u$ のそれに比べて十分長いことが仮定されている。従って、 $u$ から見れば $U$ は局所的に一定とみなすことができる。この時、実波数 $k$ と複素角周波数 $\omega$ を用いて、 $u$ が微

小で  $\exp[i(kx - \omega t)]$  に比例すると仮定して以下の '局所' 分散関係を得る:

$$\omega = \alpha U k - \frac{k^3}{24} + i(-\alpha \frac{dU}{dx} + R_0), \quad (4)$$

ここで散逸が (i), (ii) の場合、 $R_0$  はそれぞれ  $-\gamma$  および  $-k^2 \gamma$  の様に純散逸となるのに対して、(iii) の場合  $\gamma(i-1)\sqrt{(\pi k/2)}$  の様に複素数となることから純散逸以外に分散に寄与する '粘性分散' が現れることに注意しよう。

さて、 $U$  が  $U_0 \sin k_0 x$  で与えられる波長の長い ( $k \ll k_0$ ) 正弦波を考える。 $u$  が増幅または減衰を受ける  $x$  の領域は  $\omega$  の虚数部分の符号がそれぞれ正または負に対応する。一方、 $u$  の位相速度が  $\omega/k$  の実部により与えられることから、位相のずれは分散項 ( $k^3/24$ ) によるだけでなく  $U$  にもよる (特に、(iii) の場合では '粘性分散' にもよる)。その結果、 $u$  の位相速度が  $t$  の増加と共に正から負に変わる  $U$  の領域に波が引き寄せられる。例として (i) の場合、波  $u$  の増幅領域は  $x < \cos^{-1}(-\gamma/[\alpha U_0 k_0])$  で与えられる

( $|\gamma/\alpha U_0 k_0| < 1$ )。また、 $k$  が小さいとすれば  $x = (2n-1)\pi/k_0$  付近に波が集積することが予想される ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ )。

一方、(3)式で  $u$  を孤立波とするとき、次の三つの積分量を考える:

$$I_1 \equiv \int_0^\lambda u dx, I_2 \equiv \frac{1}{2} \int_0^\lambda u^2 dx, I_3 \equiv \int_0^\lambda \left[ \frac{u^3}{3} - \frac{1}{24\alpha} \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 + u^2 U \right] dx, \quad (5)$$

ここで、 $\lambda$  は正弦波  $U$  の波長  $2\pi/k_0$  であり、孤立波の幅は  $\lambda$  に比べて十分小さいものとする。 $R(u) \equiv 0$  の場合、積分量  $I_1$  と  $I_3$  は保存量となり、 $R(u)$  が微分形の (ii) の場合にも  $I_1$  は保存量となる。しかし、 $I_2$  は常に保存されない。というのは、 $I_2$  の時間発展:

$$\frac{dI_2}{dt} = -\frac{\alpha}{2} \int_0^\lambda u^2 \frac{dU}{dx} dx + \int_0^\lambda R(u) u dx \quad (6)$$

よりわかるように、 $R(u)$  を含む項による散逸がなくても  $dU/dx$  を含む項のために長波から孤立波へのエネルギー流入または孤立波から長波へのエネ

ルギー流出があるためである。

### 3. 2 ソリトン摂動とソリトンの捕捉

線形分散関係より予想される波  $u$  の増幅または減衰、正弦波のある位相領域への吸引という現象が、有限振幅の孤立波ソリトンに対してどの様に現れるかを調べることは興味深い。そこで、正弦波の波長がソリトンに比べて十分長く、かつ正弦波のソリトンに及ぼす影響がそれほど大きくないとして、ソリトンの摂動として取り扱える場合を考える。まず、線形分散関係による結果を考慮して、次のような位相が修正されたソリトン解を仮定する：

$$u = A(t) \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{2\alpha A(t)} \left( x - \alpha Ut - \frac{\alpha}{3} \int^t A(t) dt - x_0 \right) \right], \quad (7)$$

ここで、振幅  $A$  は時間  $t$  のみによると仮定し、 $x_0$  は初期位相を示す。更に、

$k_p \ll 1$  かつ  $\theta_0 \equiv \alpha Ut + (\alpha/3) \int A dt + x_0$  として、 $x = \theta_0$  回りで長波

$U = U_0 \sin(k_p x)$  を Taylor 展開して (6) 式に用いる。そのとき、(6) 式右辺第一項は次のように評価できる：

$$\int u^2 \frac{dU}{dx} dx = U_0 k_p \cos(k_p \theta_0) \int A^2 \operatorname{sech}^4 \sqrt{[2\alpha A] \theta} dx + O(k_p^3), \quad (8)$$

ここで、 $\theta = x - \theta_0$  であり、孤立波が  $x = \theta_0$  に関して対称であることを用いた。

ソリトン幅に比べて十分長い領域にわたる積分が  $\int u^2 dx =$

$4A^{3/2} / (3\sqrt{2\alpha})$  となることを用いれば、散逸が (i) と (ii) の場合に対して

それぞれ次の連立常微分方程式を得る：

(i)  $R(u) = -\gamma u$  :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{2}{3} [\alpha U_0 k_p \cos(k_p \theta_0) + 2\gamma] A, \\ \frac{d\theta_0}{dt} &= \alpha \left[ \frac{A}{3} + U_0 \sin(k_p \theta_0) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

$$(ii) R(u) = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} :$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{2}{3} [\alpha U_0 k_p \cos(k_p \theta_0) + \frac{16}{5} \gamma A \alpha] A, \\ \frac{d\theta_0}{dt} &= \alpha \left[ \frac{A}{3} + U_0 \sin(k_p \theta_0) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

上式に対して位相面の方法を適用することにより解軌道の時間発展を調べることができるが、以下では平衡点とその線形安定性について述べるにとどめる。まず、散逸がない場合 ( $\gamma = 0$ )、平衡点 ( $A^*/U_0, k_p \theta_0^*$ ) は、 $E1(0, n\pi)$  と  $E2(3, (2n-1/2)\pi)$  で与えられる ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )。それぞれの平衡点の線形安定性は、簡単な計算により、 $E1$ が峠点、 $E2$ が渦心点となる。一方、 $\gamma \neq 0$ で(i)の場合、 $E1$ が依然として峠点であるのに対し、平衡点 $E2$ は  $(3\sqrt{[1-(2\gamma/\alpha U_0 k_p)^2]}, \cos^{-1}[-2\gamma/(\alpha U_0 k_p)])$  で与えられる。この $E2$ の安定性は、 $0 < [2\gamma/(\alpha U_0 k_p)] < \sqrt{8/11}$ で安定螺旋点となり、 $\sqrt{8/11} < [2\gamma/(\alpha U_0 k_p)] < 1$ で安定結節点となる ( $(2n-1)\pi < k_p \theta_0^* < (2n-1/2)\pi$ )。しかし、 $[2\gamma/(\alpha U_0 k_p)] > 1$ となると、平衡点 $E1(0, 2n\pi)$ が峠点となるのに対し、 $E2(0, (2n-1)\pi)$ は安定結節点となる。次に(ii)の場合、 $E1(0, n\pi)$ が常に峠点であるのに対し、 $E2$ は  $(1/\sqrt{[(16\gamma/5k_p)^2 + 1/9]}, \cos^{-1}(-16\gamma A/[5U_0 k_p]))$  で与えられる。この $E2$ の安定性に関しては  $0 < (\gamma/k_p) < 5/(4\sqrt{6})$ で安定螺旋点、 $(\gamma/k_p) > 5/(4\sqrt{6})$ で安定結節点となる ( $(2n-1)\pi < k_p \theta_0^* < (2n-1/2)\pi$ )。上で示した $A \neq 0$ の安定な螺旋点または結節点がソリトンの捕捉に対応すると考えられる。特に、(ii)の場合は(i)とは異なり、 $\gamma$ がいくら大きくなっても $A \neq 0$ の平衡点が存在し、ソリトンが常に捕捉されることが予想される。このことは、(5)式で(ii)の場合に対しては $I_1$ が常に保存量となっていることと関係している。また(i)の場合、非線形性を考慮した結果、平衡点 $E1$ の

位相位置が線形分散関係より得られた増幅領域内にあることに注意すべきである。(9)式は、Gorshkov等<sup>15</sup>が円環増幅器でのソリトンのパラメータ励振を調べるため、ソリトンと正弦波の局所的なエネルギーバランスに注目して得た式を少し簡単化したものになっている。彼らは、正弦波の伝播速度と系の特性速度の僅かな違いを考慮しているが、現象は我々の結果と定性的には変わらない。

#### § 4. 数値解析結果

前節で得た平衡点付近での解の振舞いを、(3)式の直接の数値解析から得られるソリトンの振舞いと比較することは興味深い。ここでは数値計算は有限差分法を用い、次のK-dVソリトンを初期値とする：

$$u = A_0 \operatorname{sech}^2 [\sqrt{2A_0 \alpha} (x - \phi)], \quad (11)$$

ここで、 $\phi$ は正弦波  $U = U_0 \sin k_p x$  に対するソリトンの初期位相である。全ての計算に於て  $\alpha = 0.19, A_0 = 1$ と選び、他の  $k_p, U_0, \phi, \gamma$ はパラメータとする。また図では、正弦波とソリトンの位相関係をより明確にするため、(3)式の数値解  $u$ に正弦波  $U$ が重ね合わせて示されている。まず、散逸のない場合 ( $\gamma = 0$ ) について考える。図1は  $k_p = 2\pi/60, U_0 = 0.2, k_p \phi = \pi$ とした

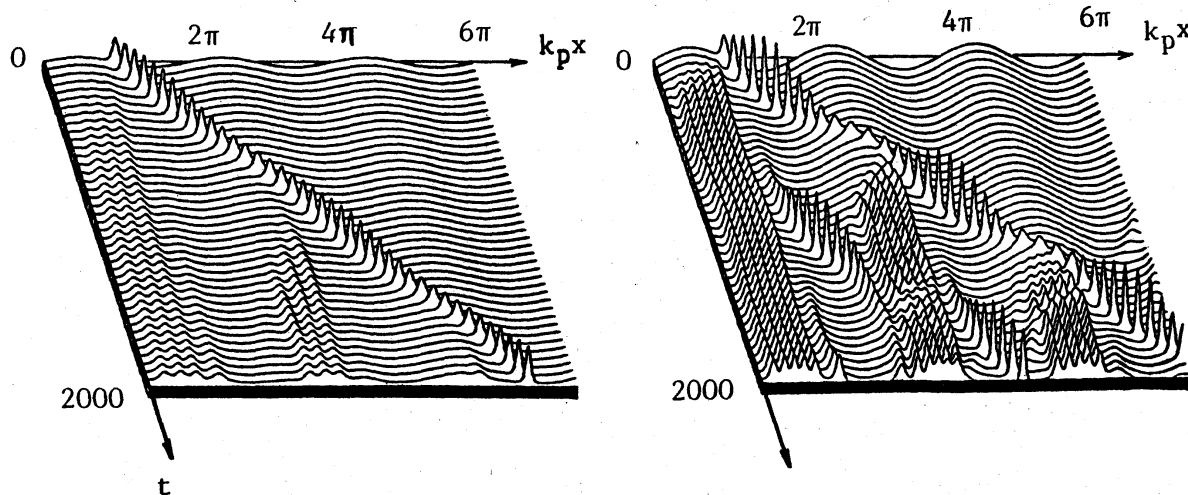


図 1

図 2



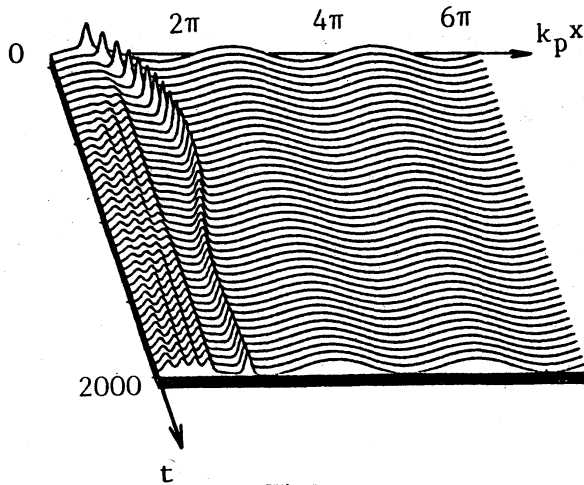
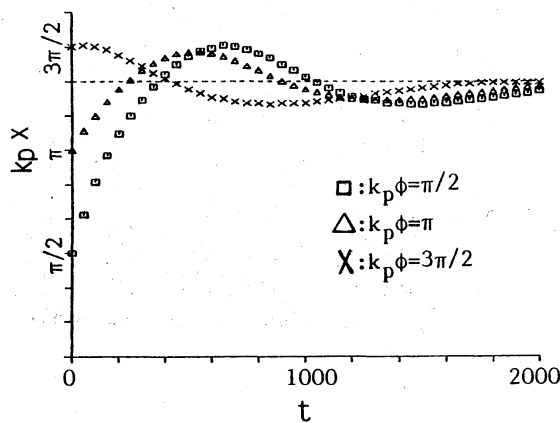


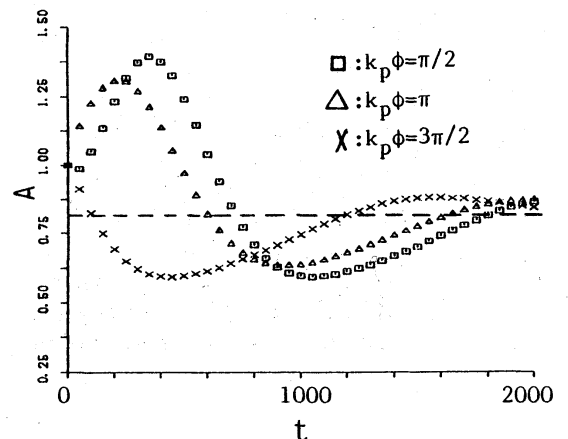
図 3

場合である。ソリトンは、後方に小波を残しながらも、周期的な増幅・減衰を繰り返しながら安定に伝播している様子が見られる。また、この小波が正弦波のある位相領域に集積し、その波頭部分の位相が線形分散関係より予測されるように  $k_p x \sim$

$(2n-1)\pi$  となっている。このとき、ソリトンの位相と振幅の時間発展は (9) 式より計算された結果と非常によく一致していることに注意したい。図 2 は長波の振幅が更に大きい ( $U_0=0.5$ ) 場合を示しており、ソリトンの周期的な増幅・減衰は更に強められ、後方に発生する小波も大きくなっている ( $A_0=1$  に対して、 $U_0=0.5$  と取るのは大きすぎるが、ここではその特徴を強調するためにあえて大きな値を選んだ)。更に、正弦波の谷の部分で小波より発生したソリトンの局所的な増幅と減衰が見られる。この谷の部分 ( $(2n-1)\pi < k_p x < 2n\pi$ ) でのソリトンの振舞いが、位相面における渦心点付近の解軌道に対応している様に見える。次に、散逸が (i) の場合に



(a)



(b)

図 4

ついて考える。図3は、 $k_p = 2\pi/60$ ,  $U_0 = 0.3$ ,  $\gamma = 1.5 \times 10^{-3}$ として $k_p \phi$ を $\pi/2$ と選んだ場合であり、ソリトンが正弦波のある位相位置に捕捉される様子が見られる。この場合、 $2\gamma / (\alpha U_0 k_p) = 0.501$ で与えられるので、平衡点は安定螺旋点となる。実際、図4よりわかるように $k_p \phi$ が $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2$ のそれぞれに対して孤立波の位相 (図(a)) と振幅 (図(b)) は平衡点へ振動しながら漸近している (図で、破線は理論平衡解を示す)。更に、

図5は $\gamma = 5 \times 10^{-3}$ 、 $k_p \phi = \pi/2$ として他のパラメータは前と同じ場合を示す。

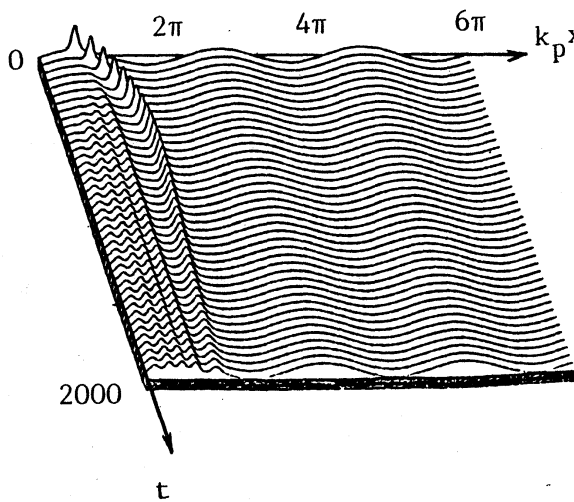


図5

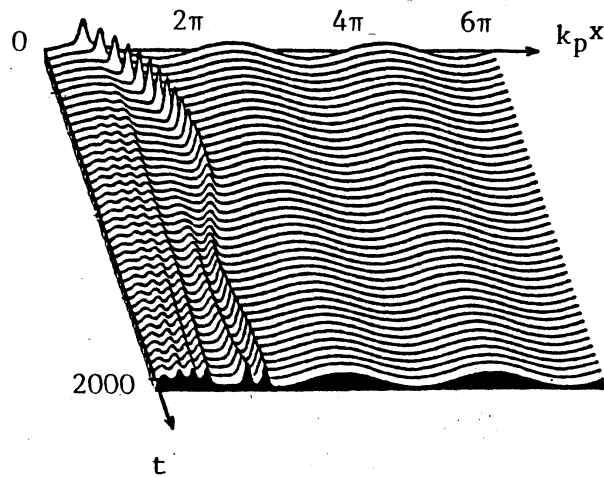
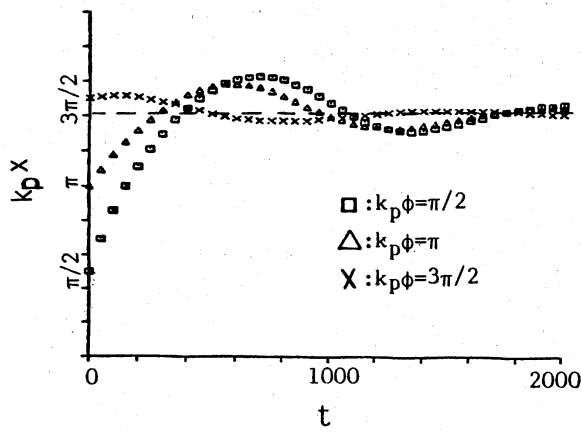


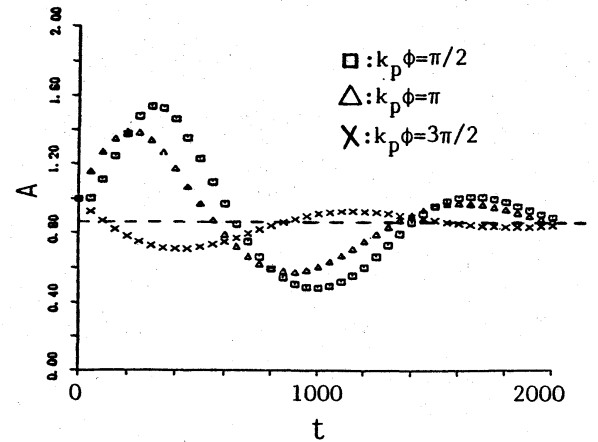
図6

このとき、 $2\gamma / (\alpha U_0 k_p) = 1.67$ であるので平衡点 $(0, \pi)$ は安定結節点であり、ソリトンは減衰しながら消滅してしまう。一方、散逸が(ii)の微分形で与えられている場合について考える。図6は $k_p = 2\pi/60$ ,  $U_0 = 0.3$ ,  $\gamma = 3.0 \times 10^{-3}$ とし初期位相 $k_p \phi$ が図3と同様 $\pi/2$ の場合を示す。ソリトンが長波のある位相位置に捕捉される様子が見られる。この場合、 $\gamma / k_p = 0.0286$ となるので平衡点は安定螺旋点となる。図7では実際、 $k_p \phi$ が $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2$ のそれぞれの場合に対して、孤立波の位相 (図(a)) と振幅 (図(b)) がその平衡点に振動しながら漸近する様子が示されている (図で、破線は理論平衡解を示す)。しかし、散逸が更に大きい $\gamma = 1 \times 10^{-2}$ の

場合、図8で示すように孤立波は急激に減衰し、一定振幅である位相位置



(a)



(b)

図7

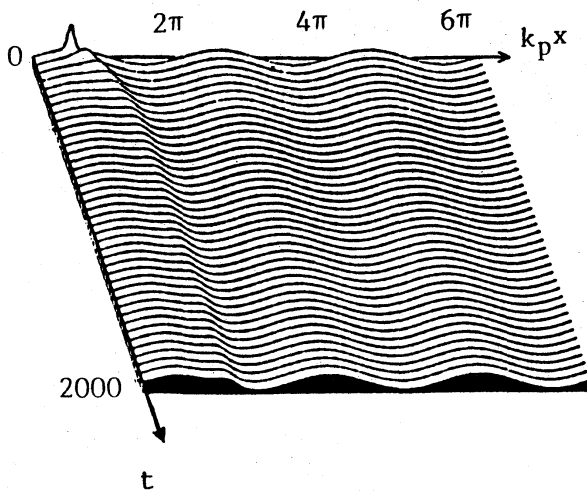


図8

一致しない等、まだいくつかの問題が残されている。

に留まる。この場合孤立波の振幅は理論で予測される値よりかなり小さいものの、散逸がいくら大きくなっても常に振幅が0でない平衡値が存在するということが深く関連している。

以上示したように、孤立波の捕捉に関しては、数値計算の結果は§3で示した解析と概ね一致する。しかしソリトン後方に発生する小波の影響や、パラメータの値が極端な場合、理論結果と必ずしも

本研究の過程で有益な助言をいただいた杉本信正博士に厚くお礼申し上げます。

## 参考文献

1. Jeffrey, A. and T. Kakutani, SIAM Rev. 14(1972)582.
2. Whitham, G. B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New York, 1974.
3. Karpman, V. I., Nonlinear Waves in Dispersive Media, Pergamon, Oxford, 1975.
4. 谷内俊弥・西原功修, 非線形波動, 岩波, 東京, 1977, または, Taniuti, T. and K. Nishikawa, Nonlinear Waves, Pitman, 1983.
5. Lonngren, K and A. Scott, Solitons in Action, Academic, New York, 1978.
6. Ono, H., J. Phys. Soc. Jpn. 32(1972)332.
7. Debnath, L. (ed.), Nonlinear Waves, Camb. Univ. Press 1983.
8. Debnath, L. (ed.), Advances in Nonlinear Waves I, II, Pitman, 1984.
9. Yagi, T., H. Watanabe and A. Noguchi; Proc. IEEE 66(1978)702.
10. Yagi, T., J. Phys. Soc. Jpn. 50(1981)2737.
11. Lamb, G. L. Jr., Elements of Soliton Theory, Wiley, New York, 1980.
12. Kakutani, T. and K. Matsuuchi, J. Phys. Soc. Jpn. 39(1975)237.
13. 杉本信正, ながれ 4(1985)110, または, Sugimoto, N., Nonlinear Wave Motion (Ed. Jeffrey, A.), Longman, 1989, p. 162.
14. Jeffrey, A. and H. H. Dai, Nonlinear Waves in Active Media (Ed. Engelbrecht, J.), Springer, 1989, p. 8.
15. Gorshkov, K. A., L. A. Ostrovskii and V. V. Papko, Radiophysics 16 (1973)1195.