数理解析研究所講究録
第740巻 1991年 191-195



# The Rayleigh-Taylor Instability and Nolinear Evolution Equations

東大理物理　飯塚剛（Takeshi Iizuka）

東大理物理　和達三樹（Wadati Miki）

二次元レイリーテイラー不安定性における，弱非線形問題を考えた。　対象となる系は、一方向の運動が一様であるような完全流体で、表面張力が働いているものに下方加速（重力加速度以上）したものである。この時基礎方程式は、次のようになる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi=0 \qquad (\eta\le y\le h)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \qquad (y=h)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\eta_t+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} \qquad (y=\eta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\mathrm{grad}\,\psi|^2+g'y+\frac{T}{\rho}\frac{\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{3}{2}}}=0 \qquad (y=\eta)$$

X，Y軸をそれぞれ水平，鉛直下方向にとる。ここで $\psi(x,y,t)$ は、流体の速度ポテンシャルであり、第一式は流体が非圧縮的且つ流れが非回転的であることを示す。　また $y=\eta(x,t)$ は、流体の表面を表しており、静止状態では $\eta\equiv0$ とする。

第二式は $y=h$ の位置に固定壁がある条件で、第三式は自由表面条件、第四式は圧力連続条件を示している。$T$ は表面張力係数であり、$\rho$ は流体密度、$g'$ は下方加速度である。界面の振幅や、流速が微小だとして平面波近似を行うと次のような解と分散関係式を得る。

$$\psi(x,y,t)=C\sinh kb\cosh k(h-y)\cos(kx-\omega t)$$
$$\eta(x,y,t)=C\sinh kb\,\frac{k}{\omega}\sinh kh\,\sin(kx-\omega t)$$
$$\omega^2=\left(\frac{T}{\rho}k^3-g'k\right)\tanh(kh)$$

ここで $k_c=\sqrt{\frac{\rho g'}{T}}$ なる臨界波数を定義すると、$k>k_c$ では平面波は準安定であり、$k<k_c$ では、不安定になって振幅は指数関数的に増大する。 また $k=\sqrt{\frac{\rho g'}{3T}}$ において、は負の最大値をとる。

次に振幅が有限の場合の非線形波動（準単色波）を考える。ただし波長に応じて次の二つの場合を考えた。

1） $k>k_c$ 安定領域

2） $k\simeq k_c$ 臨界領域

それぞれに応じて、逓減摂動法を用いると二つの非線形発展方程式が得られた。以下個別に説明をする。

1）安定領域

まず、$\eta$ と $\psi$ とを次のように摂動展開する。

$$\eta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon^{n}\sum_{m=-n}^{n}e^{im(kx-\omega t)}\,\eta^{(n,m)}_{(x,t)}$$

$$\psi(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon^{n}\sum_{m=-n}^{n}e^{im(kx-\omega t)}\,\psi^{(n,m)}_{(x,y,t)}$$

但し$\epsilon$は微小パラメーターである。 far field の記述のため、次のGM変換を用いる。

$$\xi=\epsilon(x-Vt)$$

$$\tau=\epsilon^{2}t$$

$\epsilon^3$ のオーダーの議論から $\tilde{\eta}^{(1,1)}$ に関して次の型の非線形シュレディンガー方程式（NLS）が得られた。

$$i\tilde{\eta}^{(1,1)}_{\tau}+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\omega}{\partial k^{2}}\tilde{\eta}^{(1,1)}_{\xi\xi}+\beta|\tilde{\eta}^{(1,1)}|^{2}\tilde{\eta}^{(1,1)}=0$$

$$\tilde{\eta}^{(1,1)}=\eta^{(1,1)}e^{i\tau k}$$

係数 $K,\beta$ は複雑な形になるが、 特に kh が非常に大きい極限を考えるとこの1ソリトン解は、 $k_2=\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\,k_c$ を境に $k>k_2$ でdark型 $k_c<k<k_2$ でbright型になる。 ストークス波は、前者では安定、後者では不安定である。

この領域は $k>k_c$ という高波長域であるので実際は、粘性が無視できないと考えられるが、実験をするときは $g'$ と供に $k_c$ をいくらでも小さくする事ができるので、扱う空間スケールが大きくなるのでこのときは粘性を考えなくて良い。

2）準安定領域

さて1）において $k \to k_c$ とすると、群速度Vやソリトンの幅が発散してしまい、別の定式化をしなければならない。 この極限においては分散関係は、

$$\omega^2 \sim k - k_c$$

となることを考えて、次のようにGM変換を導入する。

$$\xi = \epsilon^2 x$$
$$\tau = \epsilon (t - Wx)$$

1）と同様に摂動展開をして次の型の不安定シュレディンガー方程式（UNLS）が得られた。

$$\eta_\xi^{(1,1)} + \frac{i}{2}\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\eta_{\tau\tau}^{(1,1)} + D|\eta^{(1,1)}|^2\eta^{(1,1)} = 0$$

特に $k = k_c$ では、上式は次のようになる。

$$\eta_{\tau\tau}^{(1,1)} - 2i\tanh(k_c h)\, k_c^2 \frac{T}{\rho}\eta_\xi^{(1,1)} - \frac{3}{2}\tanh(k_c h)\, k_c^5 \frac{T}{\rho}|\eta^{(1,1)}|^2\eta^{(1,1)} = 0$$

UNLSは渡辺(1)がプラズマ系において，角谷(2)は軸対称流体の表面張力波において導出している。 初期値問題は、矢嶋ら(3)によって逆散乱法で解かれた。 UNLSは不安定系を記述する方程式として有用だと思われる。

最後に不安定域に関する議論をつけ加える。波数が臨界値より小さいと、線形波近似で不安定になり同様に議論を行うのは難しいが、過度的な振る舞いを記述するため次のような変数変換を考える。

$$\omega = i\gamma$$

$$\eta = \epsilon e^{ikx} e^{\gamma t} \eta^{(1,1)} + c.c + O(\epsilon^2)$$

特に不安定効果の最も大きい $k_1 = \sqrt{\frac{\beta g}{3T}}$ なる波長で考えると最終的に拡散型の非線系方程式

$$\tilde{\eta}^{(1,1)}_{\tau} + \alpha \tilde{\eta}^{(1,1)}_{\xi\xi} + \beta |\tilde{\eta}^{(1,1)}|^2 \tilde{\eta}^{(1,1)} = 0$$

$$\alpha < 0, \quad \beta < 0$$

が得られた。これは反応拡散方程式と呼ばれ、解は爆発的に振る舞うことがわかっている。これは物理的に考えてもおかしくない結果といえよう。

(1) T. Watanabe J. Phys. Soc. Jpn 27 5 (1969)

(2) T. Kakutani Yoshimori Inoue an T. Kan J. Phy. Soc. Jpn 37 2 (1974)

(3) T. Yajima and M. Wadati. J. Phys. Soc. Jpn. 59 (1990)