

共鳴的加振の下での水面波の分岐現象

九大応力研 船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

九大応力研 井上 進 (Susumu Inoue)

九大応力研 星野スマ子 (Sumako Hoshino)

深さ d まで水を入れた半径 a の円筒形容器を水平方向に加振すると、水面波が励起される。この水面波の固有モードは一般に、自由表面変位 $z = \eta$ について

$$\eta = (A_1(t) \cos m\theta + A_2(t) \sin m\theta) J_m(k_{m,n}r), \quad (1)$$

と書かれる。ここで z は鉛直上向きの座標であり、 $z = 0$ が静止水面に対応するとする。また (r, θ) は、水平方向座標平面を極座標であらわしたものであって、 $\theta = 0, \pi$ が加振軸に対応するものとする。そして m は周方向の波数をあらわす 0 以上の整数であり、 n は、正の整数であって「 $k_{m,n}a$ が J'_m の n 番目の正の零点である」という条件をみたすとするので、動径方向の波数のようなものである。以下では各固有モードを、この m と n を用いて、 (m, n) モードと呼ぶことにする。また t は時間であって、 (m, n) モードにおいては、 $A_1(t), A_2(t)$ は固有振動数 $\omega_{m,n} = \sqrt{gk_{m,n} \tanh k_{m,n}d}$ で正弦波的に変化する。ここで g は重力加速度である。

本研究では、容器の加振変位が

$$x = x_0 \cos \frac{2\pi}{T}t, \quad (2)$$

という正弦波的なものであり、しかも加振周期 T が $(1, 1)$ モードの固有周期 $T_0 (= 2\pi/\omega_{1,1})$ に近い共鳴的加振の場合を考える。このときには η の主要な項は

$$\eta = a[(p_1 \cos \omega t + q_1 \sin \omega t) \cos \theta + (p_2 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t) \sin \theta] J_1(kr), \quad (3)$$

の形に書けると予想される。ここで $\omega = 2\pi/T$, $k = k_{1,1} = 1.8412/a$ であり、 p_1, q_1, p_2, q_2 は T にくらべてゆっくりとしたタイムスケールでのみ変化するものとする。Miles¹⁾ は、こ

の問題に対して

$$\varepsilon \equiv (x_0/a)^{1/3} \ll 1, \quad (4)$$

と仮定し、

$$\left. \begin{aligned} p_n, q_n &= O(\varepsilon), \quad [n = 1, 2] \\ (p_n, q_n \text{ の変化の代表的タイムスケール})/T &= O(\varepsilon^{-2}), \\ T_r &\equiv (T - T_0)/T_0 = O(\varepsilon^2), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

というスケーリングの下で弱非線形の仮定と $O(\varepsilon^2)$ の線形減衰の仮定を用いて、 p_n, q_n に対する次の方程式を導いた。

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\alpha p_1 - (\beta + AE)q_1 + BMp_2, \\ \dot{q}_1 &= -\alpha q_1 + (\beta + AE)p_1 + BMq_2 + cx_0/a, \\ \dot{p}_2 &= -\alpha p_2 - (\beta + AE)q_2 - BMp_1, \\ \dot{q}_2 &= -\alpha q_2 + (\beta + AE)p_2 - BMq_1, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

ここで、ドットは時間 $t' (= \omega t)$ による微分を示し、

$$\left\{ \begin{aligned} M &= p_1 q_2 - p_2 q_1, \\ E &= (p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)/2, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

であるので、 M や E の含まれている項は 3 次の非線形項である。また A, B, c は a/d のみの関数で、本研究では $a/d = 0.655$ に対応する $A = 0.224, B = -0.306, c = 1.315$ の値を用いた。そして β は

$$\beta = \frac{\omega^2 - \omega_{1,1}^2}{2\omega_{1,1}^2}, \quad (8)$$

で定義される、固有振動数（周期）と加振振動数（周期）のずれに対応するパラメータであるが、以下では、このずれを表わすのに β のかわりに (5) で定義された T_r を用いる。そして α は、加振のないときに波のエネルギー E が

$$E \propto \exp(-2\alpha \omega t), \quad (9)$$

のように減衰していくという仮定から定義されたものである。

Funakoshi と Inoue^{2),3)} はこの共鳴的水平加振の場合の実験を行ない、その結果を方程式 (6) [ただし α として実験での測定値を用いたもの] の解と比較して、良い一致を見出した。

本研究では、無次元加振振幅 x_0/a と流体によって決まる減衰率 α をいろいろな値に固定し、 T_r を変えていったときの方程式 (6) の解の挙動の変化を詳しく調べていくことをめざす。ところが (6) は、もし $(p_1(t'), q_1(t'), p_2(t'), q_2(t'))$ がパラメータ $\alpha, x_0/a, \beta, A, B, c$ に対する解であれば、任意の正数 ν に対して、 $(\nu p_1(\nu^{-2}t'), \nu q_1(\nu^{-2}t'), \nu p_2(\nu^{-2}t'), \nu q_2(\nu^{-2}t'))$ はパラメータ $\nu^2\alpha, \nu^3x_0/a, \nu^2\beta, A, B, c$ に対する解である、という相似性をもっている。従って、 $\alpha/(x_0/a)^{2/3} = \text{const.}$ という条件をみたすすべての $(x_0/a, \alpha)$ に対しては、 T_r を変化させていったときの解の挙動は本質的に同じである。すなわち時間や空間座標を適当にスケールしなおし T_r の値を適当に変換して考えると、方程式の係数が同一になり、同じ解が得られる。従って以下では α は、水の場合の実験において (9) から求められた $\alpha = 0.0043$ に固定し、 x_0/a だけを変えていくことにする。

また方程式 (6) は、 $(p_1(t'), q_1(t'), p_2(t'), q_2(t'))$ が解であれば $(p_1(t'), q_1(t'), -p_2(t'), -q_2(t'))$ も解である、という性質をもっており、これは考えている系の加振軸に関する対称性に対応している。

方程式 (6) の平衡点については Miles¹⁾ によって既に調べられており、 $\cos\theta$ のみが励起されて $p_2 = q_2 = 0$ であるので一次元モードと呼ぶものと、 $\cos\theta$ も $\sin\theta$ もともに励起され η の一番大きいところが回転しているように見えるので回転モードと呼ぶもの、の2種類がある。図1に、 x_0 を固定したときの平衡点の T_r 依存性の典型例を示してある。実線が一次元モード、破線が回転モードに対応し、太線部は安定、細線部は不安定である。回転モードは2点 A, B において超臨界型 Hopf 分岐をおこし、その間の区間では不安定となる。従って一次元モードがサドル・ノード分岐をおこす点 C と点 A の間にはさまれた T_r の領域では、安定な平衡点が1つも存在しない。一方 x_0 が充分小さいときには、回転モードの Hopf 分岐はおこらず、そのためすべての T_r に対して安定な平衡点が少なくとも1つは存在する。これらの結果をまとめて示したのが図2であり、回転モードの Hopf 分岐を示す実線と一次元モードのサドル・ノード分岐を示す破線によってはさまれた斜線部において安定平衡点が1つも存在しない。本研究では主にこのパラメータ領域について、(6) の解の挙動を調べた。

まず、いろいろな固定された x_0 に対して、 T_r を上のパラメータ領域の左端よりわずかに小さい値からごくゆっくりと増大させ、各 T_r で得られたアトラクターについて、 $p_1 = \langle p_1 \rangle$

という超平面を横切るときの M の値の集合 S を計算した。ここで、 $\langle p_1 \rangle$ は各アトラクターでの p_1 の値の長時間平均である。結果を示したのが図 3 で、 x_0 の比較的小さい図 3(a) では、多くの T_r では S は少数個の点からなり、水面波の振幅の周期的な modulation に対応するリミットサイクル状態が現れている。そして S が多数の点からなるカオス状態（水面波の振幅の不規則な modulation に対応）は比較的狭い T_r の範囲でのみ現れている。一方 x_0 が大きい図 3(b) では、逆に多くの T_r でカオス状態がみられ、リミットサイクル状態は狭い T_r の範囲でのみ見られる。他の x_0 についても調べた結果をまとめると、「 x_0 が大きくなるほど、カオス状態になる T_r の範囲は広くなり、リミットサイクル状態になる T_r の範囲は狭くなる」と言える。そして大きい x_0 では、リミットサイクルは数多くのごく狭い window 内でのみ現れ、 T_r の値を変化させたときの解の挙動は複雑なものになっている。さらに、 x_0 を少しずつ増大させていったときに解の定性的ふるまいの T_r 依存性がどのように変化するかをみると、次の (i), (ii) のような挙動がみられた。(i) あるリミットサイクル状態が連続的に存在する T_r の範囲が、ある x_0 で急に広がったり狭まったりする、(ii) いままで T_r とともに連続的に変化していたリミットサイクルが、ある x_0 をこえると T_r 依存性が不連続になり、同時に T_r を増大させたときと減少させたときでヒステリシスがでてくる。

本研究では、このような x_0 の増大に伴う挙動の複雑化の過程をしらべることを目的として、まず（安定なものも不安定なものも含めた）周期軌道を数値的に求め、そのふるまいから複雑化過程を解明しようと試みた。もちろん解の挙動全体を理解するためにはカオス状態についての考察も不可欠であるが、ここではさしあたり周期軌道のみについて考えていく。

周期軌道を求めるために、適当な超平面を考え、その超平面上の出発点と解軌道が一周まわって再びこの面を横切る点のずれの大きさが 0 に近づいていくようにニュートン法的方法で出発点を修正していく、という方法を用いた。この方法は Sparrow⁴⁾ の本に書いてあるものとほとんど同じであるので、それを参照してもらいたい。この方法では、最初の出発点さえ求めたい周期軌道上の点に充分近ければ、安定周期軌道も不安定周期軌道も求められる。

ここで、周期軌道を片方向周期軌道と両方向周期軌道に分類しておく。前者は、ほとんどすべての時刻において M の値が同一符号をとるもので、 η の最大の点がほぼ一定方向にまわるような水面波に対応する。後者は、一周期間に M の値が正も負もとり、 η 最大の点

が右回りにまわったり左回りにまわったりする水面波に対応する。この両方向周期軌道はさらに、先に述べた $(p_1, q_1, p_2, q_2) \rightarrow (p_1, q_1, -p_2, -q_2)$ という変換に対して不変である対称周期軌道と、不変でない非対称周期軌道に分けられるが、本研究では主に対称周期軌道に限って調べていく。

図2からわかるように、安定平衡点がどの T_r でも存在するのは $x_0 \leq 0.00103a$ に対するみであるので、まず x_0 がこの上限値を少しだけ越えたときの周期軌道の挙動を図4(a)に示す。この図で縦軸は周期軌道の周期 τ を T でわったものであり横軸は T_r である。回転モードの Hopf 分岐に対応する両端の点 H_1, H_2 をほぼまっすぐにつなぐような片方向軌道が得られ、これはすべての T_r に対して安定である。 x_0 を増大させていくと図4(b)のように τ の大きい部分が現れ、さらに図4(c)のように、さきの片方向軌道が2つのブランチに分れて、その間に両方向軌道のブランチが出現する。ここで及び以下ではつねに、両方向軌道の周期は半分にして示してある。また周期軌道が安定な部分は少し太めの実線で、不安定な部分は破線で示してある。この各ブランチの境目では $\tau \rightarrow \infty$ となり一次元モードの不安定平衡点に付随した homoclinic orbit が存在する(片方向も両方向も)。この x_0 の増大に伴う homoclinic bifurcation (homoclinic orbit の出現に伴う分岐) [以下では、h.b. と略称する] はより大きい x_0 で次々におこるが、つねにまん中のブランチが2つに分れてその間に新しいブランチが出現する、という形になっていると推測される。このとき、片(両)方向軌道のブランチが分れると両(片)方向軌道が出現する。図4(d)には、図4(c)のまん中の両方向軌道のブランチが2つに分れてその間に新しい片方向軌道のブランチが出現したあとのようすが示されている。これらの片方向と両方向の新しい軌道のブランチが次々と出現するようすを示したのが図5である。図5の実線は各 x_0 に対して homoclinic orbit の存在する T_r の値を示したもので、大ざっぱには、これらの線ではさまれた各領域に片方向や両方向軌道のブランチが存在する。なお、データ数が少ないため推定であるものは破線で示してある。そして一番下の実線は回転モードが Hopf 分岐をおこす点であり、一点鎖線は一次元モードがサドル・ノード分岐をおこす点である。

周期軌道が homoclinic orbit に漸近し、その $\tau - T_r$ 曲線が $\tau \rightarrow \infty$ に近づく近づき方には2種類あり、 T_r の値が単調に増大あるいは減少しながら $\tau \rightarrow \infty$ となるタイプ1と、 T_r の

値が振幅が減少する振動を行ないながら $\tau \rightarrow \infty$ となるタイプ II に分類される。図 5 の \circ 印はタイプ II、 \times 印はタイプ I であることを示す。Glendinning と Sparrow⁵⁾ は、3 次元系においてサドル・フォーカス型の平衡点に付随した homoclinic orbit が存在するときに、タイプ I と II の現われ方とこの平衡点の固有値との関係を局所的な解析に基いて議論した。それによるとこの固有値を $\nu_1 (> 0)$, $\nu_2 \pm i\omega_2$ ($\nu_2 < 0$) としたときに、 $|\nu_2|/\nu_1$ が 1 より大きいときにはタイプ I となり、1 より小さいときにはタイプ II となる。我々の系 (6) は 4 次元系であるが、homoclinic orbit に付随した平衡点の固有値は、上の 3 つのほか $\nu_3 (< 0)$ が付け加わった形をしている。(6) に対しては、 ν_3 が存在するので上の結果は直接には適用できないが、実際に計算してみると $|\nu_2|/\nu_1$ が 1 より小さいのは図 5 の 2 点鎖線より上の領域となり、上の結果とかなりよく合っているのがわかる。これは多分 $|\nu_3|/|\nu_2|$ が比較的大きくて 4 つめの次元が近似的に無視できるためと推測される。

以下では回転モードの T_r の小さい方の Hopf 分岐から出現する片方向軌道のブランチをブランチ I、そのすぐとなりの両方向軌道のブランチをブランチ II と呼ぶことにし、この 2 つのブランチの挙動を詳しく調べていく。

ブランチ I の周期軌道は、図 4(a)、(b) のような h.b. のまだ起っていない x_0 ではすべての T_r について安定であるが、最初の h.b. がおこる付近の x_0 で図 4(c) のように fold が形成され、それに伴って挙動の不連続な T_r 依存性及びヒステリシスが出現する。さらに x_0 を大きくすると、図 6(a) のように、fold がより明確になるとともに、いままで安定だった部分が 1 対の周期倍分岐 (period-doubling bifurcation) [以下では p.d.b. と略称する] によって不安定化する。この分岐はつねに超臨界型であり、周期軌道の不安定な区間におけるアトラクターは区間の両端の点から 2 重まきリミットサイクル、4 重まきリミットサイクル、…と順次複雑化し、区間巾が狭いときにはカオス状態には至らないが、巾が広いとカオス状態へと移行する (典型例が図 3(a) の $0.0065 \leq T_r \leq 0.0095$ あたりでみられる)。この p.d.b. による不安定区間は多くの場合 x_0 の増大とともに広がっていき、安定周期軌道の存在領域は狭まっていく。

また $x_0 = 0.00224a$ において、新しい片方向軌道のブランチが $T_r = 0.0078$ 付近で出現する。これをブランチ I⁺ と呼ぶことにすると、このブランチの $\tau - T_r$ 曲線は出現した直後は

小さい閉曲線で、上半分が安定、下半分が不安定である。そして x_0 の増大とともにより大きな閉曲線になっていき、 $x_0 = 0.002289a$ では図 6(b) のようになり大きくなっている。図 6(b) ではブランチ I と I^+ はつながっていなかったが、 $x_0 = 0.002294a$ 付近で 2 つのブランチは融合し図 6(c) のようになる。この結果例えば図 6(b) と (c) において、点 A から T_r を少しずつ下げていったときに、(b) では $T_r = 0.0102$ までしかリミットサイクル状態が連続的に存在しないのに対して、(c) では $T_r = 0.0088$ まで存在する。すなわち、ブランチの融合によって、あるリミットサイクル状態が連続的に存在する T_r の範囲が急激に広がる。なお図 6(c) では新たな 1 対の p.d.b. の出現による不安定化がみられる。

さらに x_0 を大きくしていくと、図 6 の $\tau - T_r$ 曲線は fold の形成及び新しいブランチの出現と融合を繰り返してどんどん複雑なものになっていき、同時に p.d.b. の対の新たな発生と不安定領域の拡大に伴って、安定周期軌道の存在領域が狭い window 状になっていく傾向がみられる。例えば図 6(d) では図 6(c) に比べて新たな一対の p.d.b. が出現している。また図 6(e) では、 $x_0 = 0.00344a$ で出現した新たなブランチがブランチ I に接近してきており、図 6(f) では両者が融合してしまっている。なお一般には、 τ の値だけでは各周期軌道を区別できず、従って、図 6 (や図 7) における $\tau - T_r$ 曲線の交差は、通常は特別の意味をもたない。

次にブランチ II は $x_0 = 0.001195a$ において h.b. により出現するが、その直後では図 4(c) のようにすべての T_r で安定である。しかしブランチ I と同じく、 x_0 の増大とともに fold が形成される (図 4 (d) 参照)。さらに、安定領域が 1 対の symmetry-breaking bifurcation (以下では s.b.b. と略称する) によって不安定化していく。図 4(d) や図 7(a) では 2 対の s.b.b. がみられる。s.b.b. によって不安定化した区間の両端付近では両方向非対称軌道がアトラクターとしてあらわれる。そしてこの不安定区間の巾が広いときには両方向非対称軌道の一連の p.d.b. とそれに続くカオスアトラクターがみられる。

x_0 をさらに大きくしていくと図 7(b) のように $\tau - T_r$ 曲線の一部がとがってきて、そのあと図 7(c) のように kink が形成される。これによって、いままで T_r とともに連続的に変化していたリミットサイクルが不連続性をもつようになり、ヒステリシスがおこる。

またブランチ I と同様に、 $x_0 = 0.00244a$ で新しいブランチ II^+ が出現し、図 7(c) ではこ

のブランチはかなり大きな閉曲線になっている（この図ではブランチ II と II⁺ は交差はしているが互いに独立なものである）。そして $x_0 = 0.002483a$ でブランチ II と II⁺ の融合が起こり図 7(d) のようになる。この結果、例えば図 7(c) と (d) の点 B から少しずつ T_r を下げていくと、リミットサイクルは (c) では $T_r = 0.0127$ までしか連続的に存在しないのに対して、(d) では $T_r = 0.0095$ まで連続的に存在するようになり、急激な存在領域の変化がみられる。

より大きい x_0 では、上に述べたような kink, fold の形成や s.b.b. の対発生が次々とおこって、リミットサイクルの存在領域が多数の狭い window にわかれていき、さらに、新しいブランチの出現と融合が新しいリミットサイクルの存在領域を発生させると思われる（例えば図 7(e), (f) を参照）。

以上のことより、 x_0 を大きくしていったときには、homoclinic bifurcation による新しい周期軌道のブランチの発生、各ブランチでの fold や kink の発生、新しく出現した別のブランチとの融合、さらに 1 対の周期倍分岐や symmetry-breaking bifurcation による周期軌道の不安定化により、方程式 (6) の解の挙動の T_r 依存性が複雑化していくことがわかった。

参考文献

- 1) Miles, J.W. (1984) Resonantly Forced Surface Waves in a Circular Cylinder, J.Fluid Mech., Vol.149, 15-31.
- 2) Funakoshi, M. and Inoue, S. (1988) Surface Waves due to Resonant Horizontal Oscillation, J.Fluid Mech., Vol.192, 219-247.
- 3) Funakoshi, M. and Inoue, S. (1990) Bifurcations of Limit Cycles in Surface Waves due to Resonant Forcing, Fluid Dyn. Res., Vol.5, 255-271.
- 4) Sparrow, C., "The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors", Springer-Verlag, 1982.
- 5) Glendinning, P. and Sparrow, C. (1984) Local and Global Behavior near Homoclinic Orbits, J.Stat.Phys., Vol.35, 645-696.

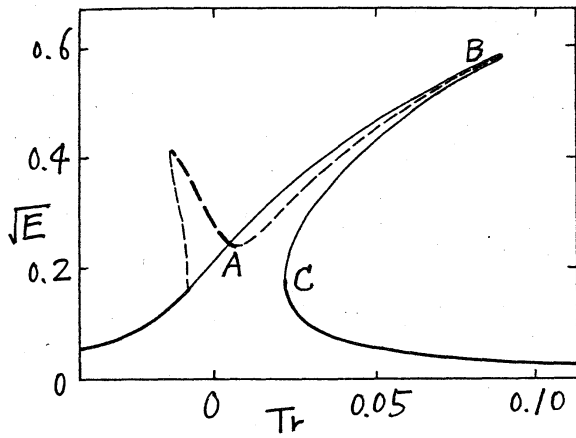


図1. 平衡点の Tr 依存性の典型例.
 $\alpha_0/a = 0.002706$.

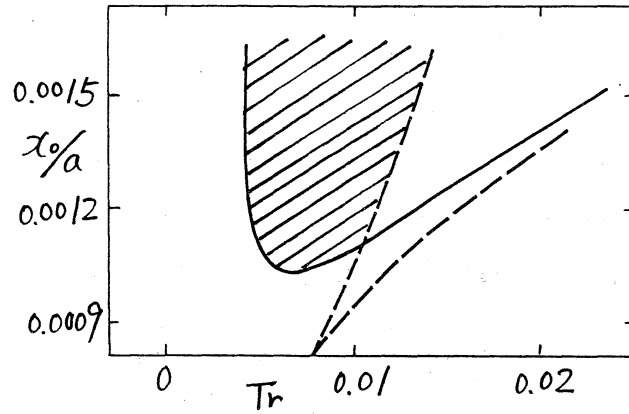


図2. 平衡点の分岐。実線は回転モードのHopf分岐を示し、破線は一次元モードのサドル・ノード分岐を示す。

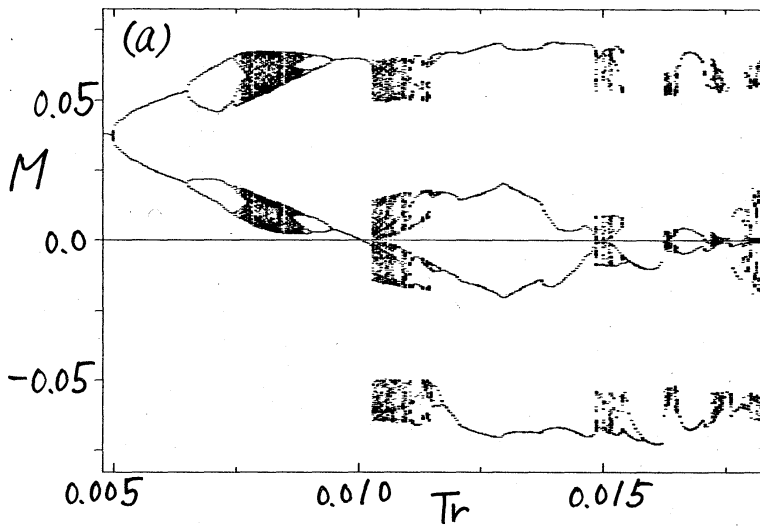
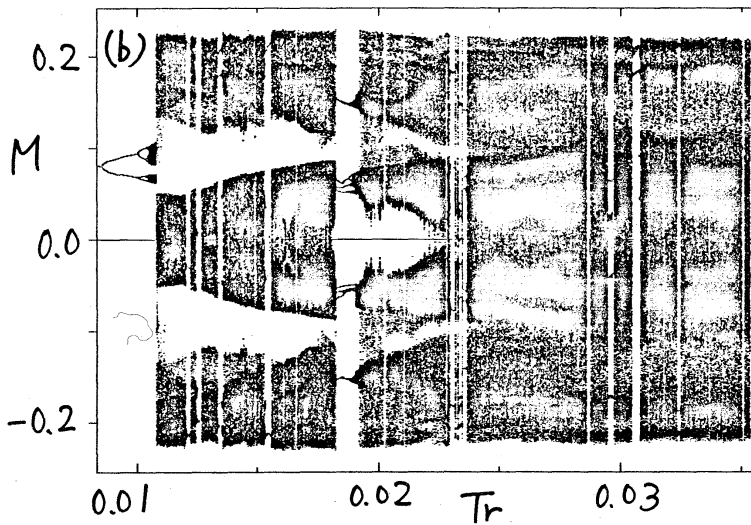


図3. アトラクタの Tr 依存性。

(a) $\alpha_0/a = 0.002165$,

(b) $\alpha_0/a = 0.005411$.



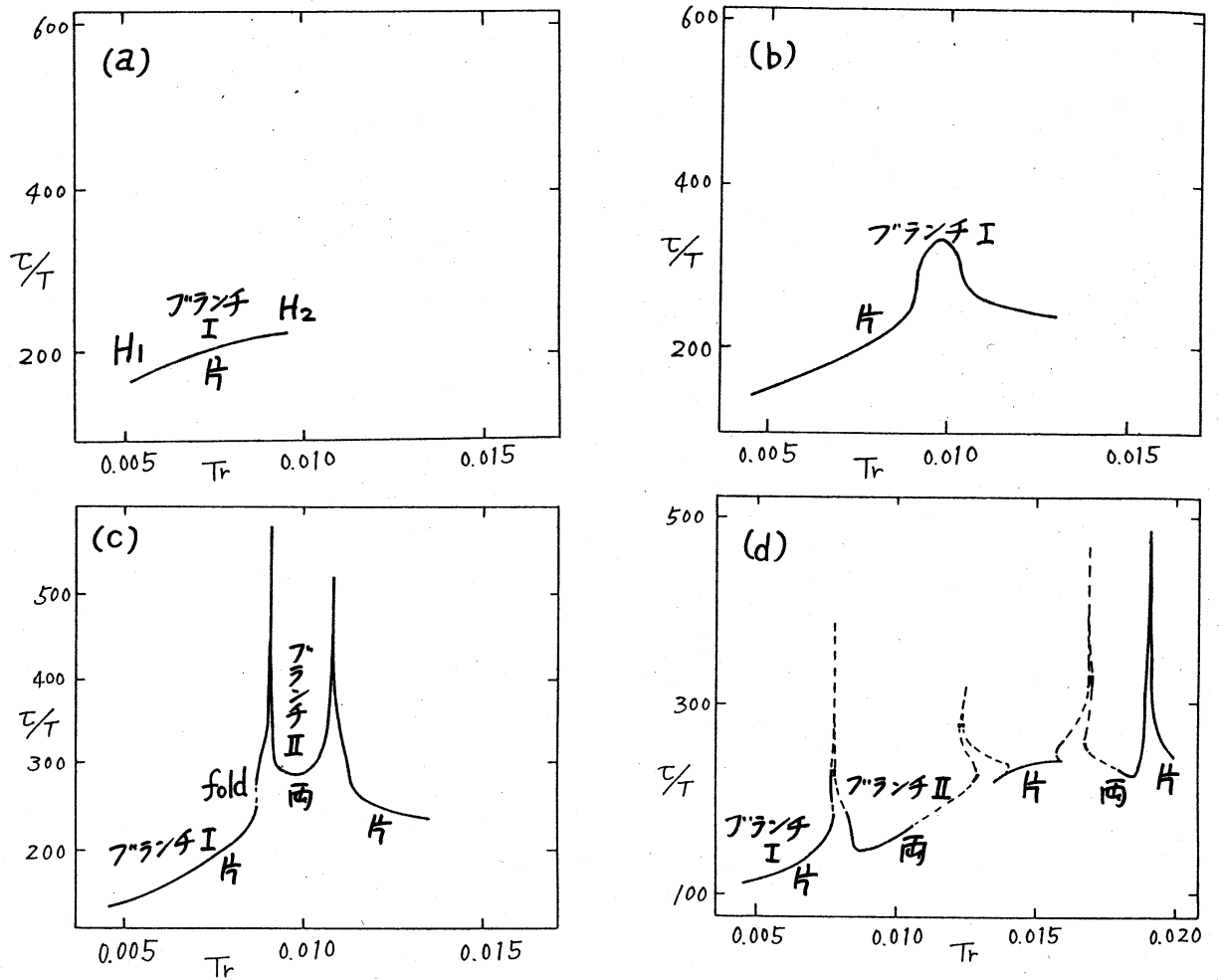


図4. 周期軌道の Tr 依存性. (a) $x_0/a = 0.001082$, (b) 0.001190 , (c) 0.001201 , (d) 0.001407 . T は周期軌道の周期であるが、両方向軌道については 2 でわったものを表示している.

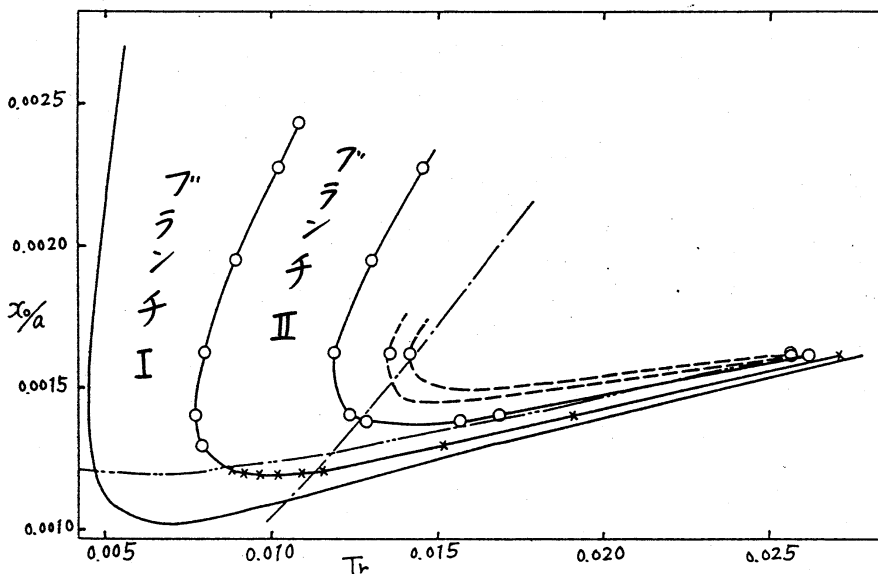


図5. homoclinic orbit の存在位置.

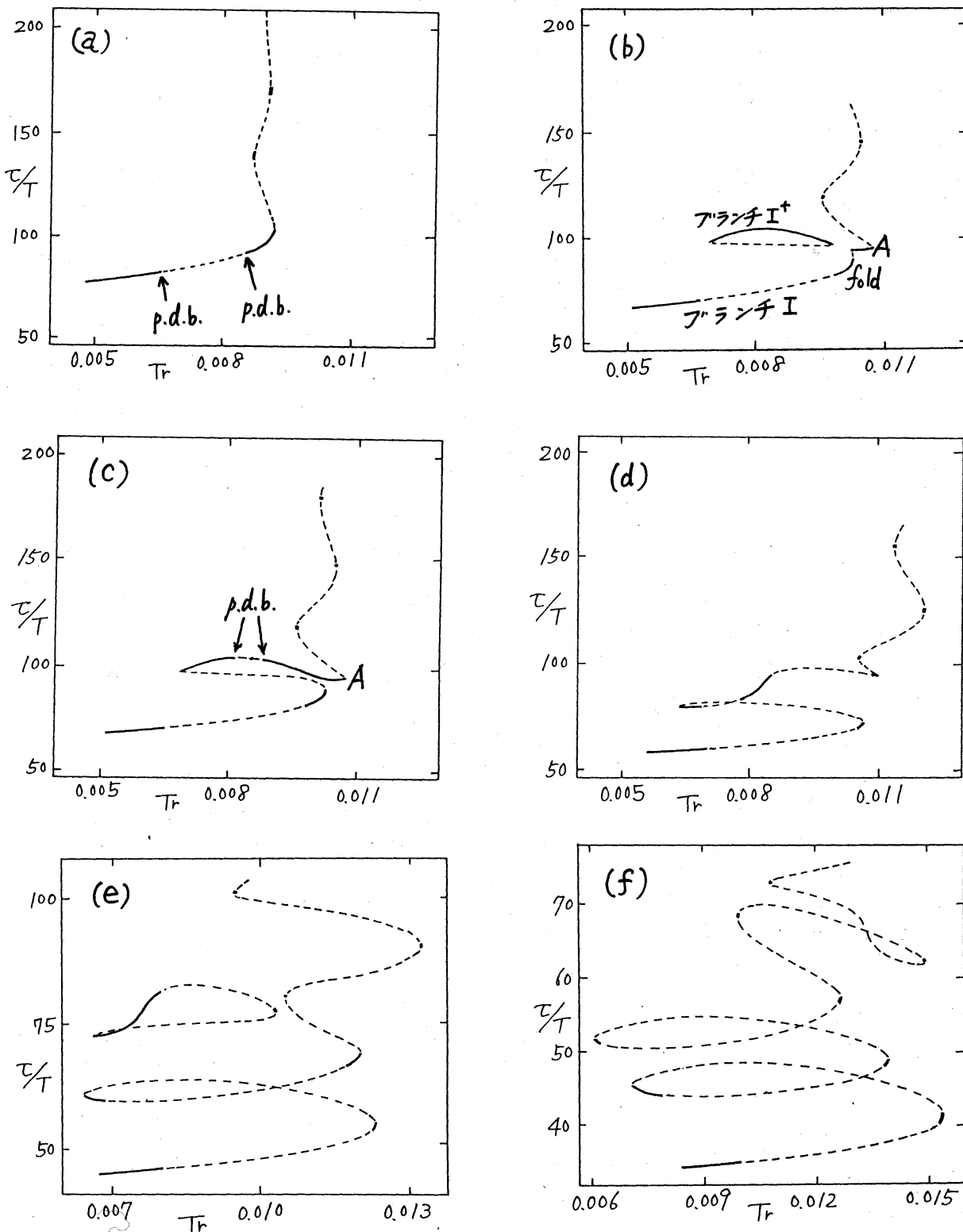


図6. フランチIの周期軌道の Tr 依存性. (a) $\lambda_0/a = 0.001948$,
 (b) 0.002289, (c) 0.002294, (d) 0.002706, (e) 0.003680,
 (f) 0.005411.

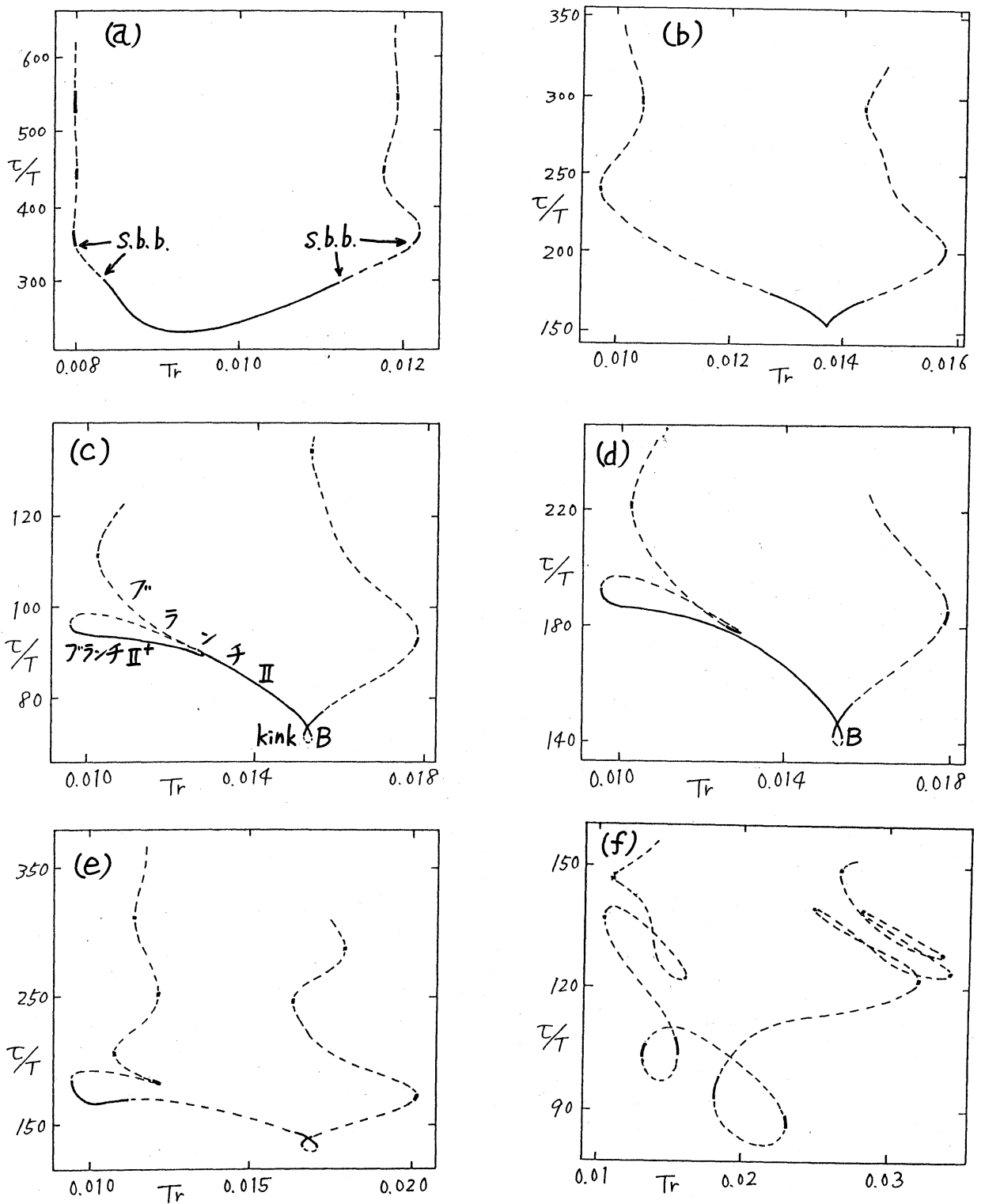


図7. ブランチIIの周期軌道の Tr 依存性。周期軌道の周期 T は2でわった値を表示している。(a) $x_0/a = 0.001623$, (b) 0.002273 , (c) 0.002478 , (d) 0.002489 , (e) 0.002706 , (f) 0.005411 .