数理解析研究所講究録
第 741 巻 1991 年 137-146

位相的ミニマックス定理

慶應義塾大学商学部　小宮英敏　(Hidetoshi Komiya)

1　序論

ミニマックス定理を成立させる条件として, その戦略空間は凸集合をなし, 利得関数は第一変数に関して凹関数であり, 第二変数に関して凸関数であるといったものがよく知られている. 凸集合はその任意の二点を結ぶ線分が再びその集合に含まれるということで定義されるが, この二点を結ぶ線分は [0,1] 区間によって連続的にパラメータ付けされているために, 位相的にはコンパクトかつ連結であり, 順序的には全順序が自然に定義されるなど, 様々な属性を持つ. 最近 Kindler-Trost[3, Corollary 5.2] によって, Sion タイプのミニマックス定理 [7] には本質的に二点を結ぶ線分の連結性のみが必要であることが, Interval Space という空間概念を定義することにより示された. ここでは, Interval Space の考え方に触発され, 表面的には代数的な形をしている Fan タイプのミニマックス定理 [1] も位相的な連結性を内蔵していることを明らかにするとともに, 上述の Kindler-Trost の定理も包含するミニマックス定理を提出する.

2　位相的ミニマックス定理

X を空でない集合とし, $\mathcal{B}(X)$をX上のすべての上に有界な実数値関数からなる集合とする. Xの部分集合 L に対し, $\mathcal{B}(X)$上の実数値関数M_Lを

$$M_L(f) = \sup_{x\in L} f(x), \quad f \in \mathcal{B}(X)$$

で定義する. 集合$\mathcal{B}(X)$の部分集合$\mathcal{F}$に対し, $\mathcal{B}(X)$の部分集合$\mathcal{F}^*$を

$$\mathcal{F}^* = \{f \in \mathcal{B}(X) : f \geq g \text{が} \mathcal{F} \text{のある元} g \text{に対して成立する.}\}$$

で定義する. Xの部分集合 L は, 有限個の$\mathcal{F}$の元 $h_1, \ldots, h_n$と実数αが存在して,

$$L = \{x \in X : h_i(x) > \alpha,\ i = 1, \ldots, n\}$$

と書くことができるとき, $\mathcal{F}$のレベル集合であるをいう.

この節の主定理は定理 2.1であるが, その証明のためにはいくつかの補題を必要とする.

補題 2.1　Xを空でない集合とし, $\mathcal{B}(X)$をX上の上に有界な実数値関数の全体からなる集合とし, $\mathcal{F}$を$\mathcal{B}(X)$の部分集合とする. $\mathcal{F}$の任意の元fとgに対し, 次の性質を満たす連結位相空間 Wと写像 $S: W \to \mathcal{F}^*$ があるとする.

(i) $f,\ g \in S(W)$.

(ii) 任意の $x \in X$ に対し,$S(\cdot)(x) : W \to R$ は下半連続である.

(iii) 任意の $w \in W$ に対して,

$$f \vee g \geq S(w).$$

(iv) 任意の $w \in W$ と任意の空でない $\mathcal{F}$ のレベル集合 L に対して,

$$M_L(f \wedge g) \geq M_L(f \wedge S(w)) \wedge M_L(g \wedge S(w)).$$

このとき $f, g \in \mathcal{F}$ とし, L を $\mathcal{F}$ の空でないレベル集合または X そのものとすると,

$$\inf_{h \in \mathcal{F}} M_L(h) \leq M_L(f \wedge g)$$

が成立する.

証明 任意の $\alpha < \inf_{h \in \mathcal{F}} M_L(h)$ に対して, $\alpha \leq M_L(f \wedge g)$ を示せばよい. $\alpha > M_L(f \wedge g)$ を仮定して, 矛盾を導く.

$$L(w) = \{x \in L : S(w)(x) > \alpha\}$$

とおくと, $L(w) \neq \emptyset$ $(w \in W)$ は仮定よりよい. $u, v \in W$ を $S(u) = f$, $S(v) = g$ なるものとする. $L(u) \cap L(v) = \emptyset$ も背理法の仮定よりよい.

$$U = \{w \in W : L(w) \subset L(u)\}, \quad V = \{w \in W : L(w) \subset L(v)\}$$

とおくと, $u \in U$, $v \in V$, $U \cap V = \emptyset$ は明らか. 次に, $S(w) \leq f \vee g$ の仮定より,

$$L(w) \subset L(u) \cup L(v).$$

ここで, $L(w) \cap L(u) \neq \emptyset$, $L(w) \cap L(v) \neq \emptyset$ なる w があるとすると, L がレベル集合のときは, 仮定より,

$$\alpha < M_L(S(w) \wedge f) \wedge M_L(S(w) \wedge g) \leq M_L(f \wedge g)$$

となり, 背理法の仮定に反する. また, $L = X$ のときは, $L(w) \cap L(u)$ と $L(w) \cap L(v)$ からそれぞれ点 x_1 と x_2 を選び, さらに $h \in \mathcal{F}$ を一つ選びレベル集合 $\{x \in X : h(x) > h(x_1) \wedge h(x_2)\}$ を考え, 再び上の仮定より背理法の仮定に矛盾する. 従って,

$$L(w) \subset L(u) \quad \text{または} \quad L(w) \subset L(v),$$

即ち, $W = U \cup V$ となる. このとき, U は開である. 実際, $w_0 \in U$ をとり, $\alpha < S(w_0)(x_0)$ なる $x_0 \in L$ をとり固定する. このとき, $x_0 \in L(w_0) \subset L(u)$. さらに, $G = \{w \in W : \alpha < S(w)(x_0)\}$ とおくと, G は w_0 の開近傍で, $w \in G$ とすると, $x_0 \in L(w)$. よって, $x_0 \in L(u) \cap L(w)$ となり, $L(w) \subset L(u)$ が出て, $w \in U$. 即ち, $G \subset U$. 同様にして, V も開となりこれは W の連結性に反する.

注意 2.1 Kindler-Trost[3] によると, 位相空間 X と $X \times X$ から X のすべての連結部分集合の族への写像$\langle \cdot, \cdot \rangle$ で $\{x, y\} \subset \langle x, y \rangle$ を満たすものが与えられたとき, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を Interval Space という. また, X の部分集合 Z は, $\langle z_1, z_2 \rangle \subset Z$ がすべての $z_1, z_2 \in Z$ に対して成立するとき, 凸であるという. Interval Space X 上の実数値関数 f は任意の実数αに対して, $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ が凸であるとき, 擬凸であるといい, $-f$ が擬凸であるとき f は擬凹であるという.

X, Y を二つの Interval Spaces とし, $f : X \times Y \to R$ は, $f(\cdot, y)$ は上に有界, 上半連続で擬凹であり, $f(x, \cdot)$ は下半連続で擬凸であるとする. このとき, $\mathcal{F} = \{f(\cdot, y) : y \in Y\}$ とおき, $y_1, y_2 \in Y$ に対して, $W = \langle y_1, y_2 \rangle$, $S(w)(x) = f(x, w)$, $w \in W$ とおけば, 補題2.1の (i) から (iv) が満たされる.

実際, (i) から (iii) は明らか. (iv) に関しては, $M_L(f_1 \wedge f_2) < \alpha < M_L(S(w) \wedge f_1) \wedge M_L(S(w) \wedge f_2)$ なるα が存在したとすると（ここで $f_1(x) = f(x, y_1)$, $f_2(x) = f(x, y_2)$ としている）,

$$\{x \in L : S(w)(x) > \alpha\} \cap \{x \in L : f_1(x) \geq \alpha\} \neq \emptyset,$$
$$\{x \in L : S(w)(x) > \alpha\} \cap \{x \in L : f_2(x) \geq \alpha\} \neq \emptyset$$

が成立するから, 集合 $\{x \in L : S(w)(x) > \alpha\}$ の連結性と (iii) より $\{x \in L : f_1(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in L : f_2(x) \geq \alpha\} \neq \emptyset$ となり, これは $M_L(f_1 \wedge f_2) < \alpha$ に矛盾する.

注意 2.2 X, Y を集合とし, $f : X \times Y \to R$ は第一変数に対して concavelike であり, 第二変数に対して convexlike であるとする. 即ち, 任意の $x_1, x_2 \in X$ と $s \in [0, 1]$ に対して, $x_0 \in X$ が存在して,

$$f(x_0, y) \geq (1 - s)f(x_1, y) + sf(x_2, y), \quad y \in Y$$

であり, 任意の $y_1, y_2 \in Y$ と $t \in [0, 1]$ に対して, $y_0 \in Y$ が存在して,

$$f(x, y_0) \leq (1 - t)f(x, y_1) + tf(x, y_2), \quad x \in X$$

とする. さらに, $f(\cdot, y)$ は X 上で上に有界とする. このとき, $\mathcal{F} = \{f(\cdot, y) : y \in Y\}$ とおき, y_1, $y_2 \in Y$ に対して, $W = [0, 1]$, $S(w)(x) = (1 - w)f(x, y_1) + wf(x, y_2)$ とおくとやはり補題2.1の (i) から (iv) を満たす.

実際, $S(w) \in \mathcal{F}^*$ であることは convexlikeness よりでて, (i) から (iii) は明らか. (iv) に関しては, 注意 2.1と同様なα が存在したとすると,

$$S(w)(x_1) > \alpha, \ f_1(x_1) > \alpha, \ S(w)(x_2) > \alpha, \ f_2(x_2) > \alpha$$

なる x_1, $x_2 \in L$ が存在する. $f_1(x_2) < \alpha$ だから, $\alpha = \mu f_1(x_1) + \nu f_1(x_2)$, $\mu + \nu = 1$ なる μ, $\nu \geq 0$ が存在して, concavelikeness より $x_0 \in L$ が存在して, $\alpha \leq f_1(x_0)$. 一方

$$\begin{aligned} \alpha &< \mu S(w)(x_1) + \nu S(w)(x_2) \\ &= (1 - w)\alpha + w(\mu f_2(x_1) + \nu f_2(x_2)) \\ &\leq (1 - w)\alpha + wf_2(x_0) \end{aligned}$$

が成立するから,

$$\alpha \le (f_1 \wedge f_2)(x_0) \le M_L(f_1 \wedge f_2) < \alpha$$

となり, 矛盾がでる.

補題 2.2 補題 *2.1*と同じ仮定のもとに $f_1, \dots, f_n$ を $\mathcal{F}$の有限個の要素とすると,

$$\inf_{h\in\mathcal{F}} M_X(h) \le M_X(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$$

が成立する.

証明 $n=1$ のときは明らか. $n=2$ のときは補題2.1そのもの. $n \ge 3$ として, $n-1$ に対し, 上の命題が成立するものと仮定する. $\inf_{h\in\mathcal{F}} M_X(h) > \alpha$ なる任意のαに対して, 帰納法の仮定より任意の $g \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\alpha < M_X(f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-2} \wedge g)$$

従って, 各 g に対して, $x \in X$ が存在して,

$$\alpha < (f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-2} \wedge g)(x)$$

よって, $L = \{x \in X : \alpha < (f_1 \wedge \cdots \wedge f_{n-2})(x)\}$ とおくと, $L \ne \emptyset$ で, $\alpha < M_L(g)$ だから, $\alpha \le \inf_{g\in\mathcal{F}} M_L(g)$. 補題 2.1より, $\inf_{g\in\mathcal{F}} M_L(g) \le M_L(f_{n-1} \wedge f_n)$. これより, $\alpha \le M_L(f_{n-1} \wedge f_n)$ となり, $\alpha \le M_X(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$ がでる.

定理 2.1 Xをコンパクト位相空間とし, $\mathcal{U}(X)$をX上の上半連続実数値関数の全体からなる集合とし, $\mathcal{F}$を$\mathcal{U}(X)$の部分集合とする. $\mathcal{F}$の任意の元fとgに対し, 次の性質を満たす連結位相空間Wと写像 $S: W \to \mathcal{F}^*$ があるとする.

(i) $f,\ g \in S(W)$.

(ii) 任意の $x \in X$に対し,$S(\cdot)(x) : W \to R$は下半連続である.

(iii) 任意の $w \in W$ に対して,

$$f \vee g \ge S(w).$$

(iv) 任意の $w \in W$ と任意の空でない$\mathcal{F}$のレベル集合 L に対して,

$$M_L(f \wedge g) \ge M_L(f \wedge S(w)) \wedge M_L(g \wedge S(w)).$$

このとき等式

$$\max_{x\in X} \inf_{f\in\mathcal{F}} f(x) = \inf_{f\in\mathcal{F}} \max_{x\in X} f(x)$$

が成立する.

証明 $\alpha = \inf_{h\in\mathcal{F}} M_X(h)$ とおき, $h \in \mathcal{F}$ に対し, $X_h = \{x \in X : h(x) \ge \alpha\}$ とおくと, 補題 2.2より $\{X_h\}$ は有限交叉性を持つから, $x_0 \in \bigcap_{h\in\mathcal{F}} X_h$ なる x_0 が存在する. 従って, $\alpha \le \inf_{h\in\mathcal{F}} h(x_0) \le M_X(\inf_{h\in\mathcal{F}} h)$.

前述の注意 2.1と注意 2.2より, 次の系が得られることは明らかである.

系 2.1 (Kindler-Trost) X, Y を二つの *Interval Spaces* とし,X はコンパクトで, $f : X \times Y \to R$ は次の性質を満たすとする.

(i) $f(\cdot, y)$ は上半連続で擬凹である.

(ii) $f(x, \cdot)$ は下半連続で擬凸である.

このとき等式

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) = \inf_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

が成立する.

系 2.2 (Fan) X をコンパクト位相空間, Y を空でない集合とし, $f : X \times Y \to R$ は次の性質を満たすとする.

(i) f は第一変数に関して *concavelik* である.

(ii) f は第二変数に関して *convexlike* である.

(iii) $f(\cdot, y)$ は上半連続である.

このとき等式

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) = \inf_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$$

が成立する.

3 König の定理について

Fan のミニマックス定理（系 2.2）に関連して, König[4] は concavelike, convexlike の概念を拡張した s-concavelikeness, t-convexlikeness を導入し新たなミニマックス定理を証明した.

X, Y を集合とし, s, $t \in (0, 1)$ とする. $f : X \times Y \to R$ が第一変数に対して s-concavelike であるとは, 任意の x_1, $x_2 \in X$ に対して, x_0 が存在して,

$$f(x_0, y) \geq (1 - s) f(x_1, y) + s f(x_2, y), \quad y \in Y$$

が成立することをいい, f が第二変数に対して t-convexlike であるとは, 任意の y_1, $y_2 \in Y$ に対して, y_0 が存在して,

$$f(x, y_0) \leq (1 - t) f(x, y_1) + s f(x, y_2), \quad x \in X$$

が成立することをいう.

次の定理は König による.

定理 3.1 (König) X をコンパクト位相空間, Y を空でない集合とし, $f: X \times Y \to R$ は $s,\ t \in (0,1)$ が存在して次の性質を満たすとする.

(i) f は第一変数に関して s-*concavelike* である.

(ii) f は第二変数に関して t-*convexlike* である.

(iii) $f(\cdot, y)$ は上半連続である.

このとき等式

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x,y) = \inf_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y)$$

が成立する.

この定理3.1の仮定 (i) 及び (ii) はそれぞれ次の (i'),(ii') に置き換えることができることは容易にわかる.

(i') $[0,1]$ の稠密部分集合 D が存在し, 任意の $s \in D$ と任意の $x_0,\ x_1$ に対して, x_s が存在して, すべての $y \in Y$ に対して,

$$f(x_s, y) \geq (1-s) f(x_0, y) + s f(x_1, y)$$

が成立する.

(ii') $[0,1]$ の稠密部分集合 E が存在し, 任意の $t \in E$ と任意の $y_0,\ y_1$ に対して, y_t が存在して, すべての $x \in X$ に対して,

$$f(x, y_t) \leq (1-t) f(x, y_0) + t f(x, y_1)$$

が成立する.

Fan のミニマックス定理の仮定と上の二つの仮定の違いは二つの不等式が $[0,1]$ 上のすべての数に対して成立するか, その稠密部分集合に対して成立するかの違いだが, この König の定理も定理2.1と同様にして証明されることを示すことができる. 実際, 定理3.1を証明するためには次の補題を証明すれば十分であることは, 第2節の考察より明らかである.

補題 3.1 X, Y を集合とし, $f: X \times Y \to R$ は上の (i'), (ii') を満たし, $f(\cdot, y)$ は各 y ごとに X 上で上に有界とする. $y_0,\ y_1 \in Y$ とし, L を X内の f のレベル集合または X そのものとすると,

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in L} f(x,y) \leq \sup_{x \in L} \min(f(x,y_0), f(x,y_1))$$

が成立する.

証明 $\sup_{x\in L}\min(f(x,y_0),f(x,y_1))<\alpha<\beta<\inf_{y\in Y}\sup_{x\in L}f(x,y)$ を仮定して, 矛盾を導く. $t\in[0,1]$ に対して,

$$L(t)=\{x\in L:(1-t)f(x,y_0)+tf(x,y_1)>\alpha\}$$

とおく. $t\in E$ のときは, $(1-t)f(x,y_0)+tf(x,y_1)\geq f(x,y_t)$ と $\alpha<\inf_{y\in Y}\sup_{x\in L}f(x,y)$ より $L(t)\neq\emptyset$ はよい. $t\notin E$ で $L(t)=\emptyset$ なる t があったとすると, すべての $x\in L$ に対して, $(1-t)f(x,y_0)+tf(x,y_1)\leq\alpha$. t に十分近い $t'\in E$ をとって, $(1-t')f(x,y_0)+t'f(x,y_1)<\beta$ とできる.

実際, $M>0$, $M>2\beta$ なる $f(\cdot,y_0)$ と $f(\cdot,y_1)$ に共通の上界 M を選ぶ. このとき,

$$d=\min(\frac{1-t}{2},\frac{(1-t)(\beta-\alpha)}{3(1+t)M-6\beta},\frac{\beta-\alpha}{3M})$$

とおくと, $t<t'<t+d$ なる $t'\in E$ を選べば, すべての $x\in L$ に対して,

$$(1-t')f(x,y_0)+t'f(x,y_1)<\beta$$

である. 実際, L を次の三つの集合 L_1, L_2, L_3 に分割する.

$$\begin{aligned}L_1&=\{x\in L:f(x,y_0)<\frac{2\beta-(1+t)M}{1-t}\},\\L_2&=\{x\in L\setminus L_1:f(x,y_1)<0\},\\L_3&=L\setminus(L_1\cup L_2).\end{aligned}$$

$x\in L_1$ のとき, $t'<t+(1-t)/2=(t+1)/2$ より, $1+t>2t'$. $1-t=2(1-(t+1)/2)>2(1-t')$ に注意すると

$$f(x,y_0)<\frac{2\beta-2t'M}{2(1-t')}=\frac{\beta-t'M}{1-t'}.$$

従って,

$$\begin{aligned}\beta&>(1-t')f(x,y_0)+t'M\\&>(1-t')f(x,y_0)+t'f(x,y_1)\end{aligned}$$

$x\in L_2\cup L_3$ のときは,

$$t<t'<t+\frac{(1-t)(\beta-\alpha)}{3(1+t)M-6\beta}$$

より,

$$\begin{aligned}\frac{\beta-\alpha}{3}&>(t'-t)\frac{(1+t)M-2\beta}{1-t}\\&\geq(t-t')f(x,y_0)\end{aligned}$$

従って,

$$(1-t')f(x,y_0)<(1-t)f(x,y_0)+\frac{\beta-\alpha}{3}.$$

ここで, $x \in L_2$ のときは, $t < t'$, $f(x,y_1) < 0$ より, $t'f(x,y_1) < tf(x,y_1)$ となり,

$$\begin{aligned} & (1-t')f(x,y_0) + t'f(x,y_1) \\ < \; & (1-t)f(x,y_0) + tf(x,y_1) + \frac{\beta-\alpha}{3} \\ \leq \; & \alpha + \frac{\beta-\alpha}{3} \\ < \; & \beta. \end{aligned}$$

また, $x \in L_3$ のときは, $t' < t + (\beta-\alpha)/3M$ に注意すると $f(x,y_1) \geq 0$ だから,

$$\begin{aligned} t'f(x,y_1) & \leq tf(x,y_1) + \frac{\beta-\alpha}{3M} f(x,y_1) \\ & \leq tf(x,y_1) + \frac{\beta-\alpha}{3} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} & (1-t')f(x,y_0) + t'f(x,y_1) \\ \leq \; & (1-t)f(x,y_0) + \frac{\beta-\alpha}{3} + tf(x,y_1) + \frac{\beta-\alpha}{3} \\ \leq \; & \beta. \end{aligned}$$

従って, $f(x, y_{t'}) < \beta < \inf_{y \in Y} \sup_{x \in L} f(x,y)$ がすべての $x \in L$ に対して成立するがこれは矛盾. よって, $t \in [0,1]$ に対して, $L(t) \neq \emptyset$. さらに, 背理法の仮定より $L(0) \cap L(1) = \emptyset$ が成立するのは明らか.

$$T_0 = \{t \in [0,1] : L(t) \subset L(0)\}, \quad T_1 = \{t \in [0,1] : L(t) \subset L(1)\}$$

とおくと, $0 \in T_0$, $1 \in T_1$, $T_0 \cap T_1 = \emptyset$ は明らか. さらに,

$$L(t) \subset L(0) \cup L(1)$$

も明らか. ここで, $x_0 \in L(t) \cap L(0)$, $x_1 \in L(t) \cap L(1)$ なる $t \in [0,1]$ と x_0, x_1 があるとすると,

$$(1-t)f(x_0,y_0) + tf(x_0,y_1) > \alpha, \quad f(x_0,y_0) > \alpha,$$

$$(1-t)f(x_1,y_0) + tf(x_1,y_1) > \alpha, \quad f(x_1,y_1) > \alpha.$$

従って, t に十分近い $t' \in E$ をとれば, 上の不等式は t を t' に入れ換えても成立するので, $x_0 \in L(t') \cap L(0)$, $x_1 \in L(t') \cap L(1)$ である. ここで, $t' \neq 0$, $t' \neq 1$ は明らか.

$$\sup_{x \in L} \min(f(x,y_0), f(x,y_1)) < \alpha - \frac{1-t'}{t'} \epsilon$$

なる$\epsilon > 0$ をとる. $f(x_1,y_0) \leq \alpha$, $f(x_0,y_0) > \alpha$ より, $s \in D$ が存在して,

$$\alpha \leq (1-s)f(x_0,y_0) + sf(x_1,y_0) < \alpha + \epsilon$$

左側の不等式より, $\alpha \le f(x_s, y_0)$. $x_0 \in L(t')$ より, $\alpha < (1-t')f(x_0,y_0) + t'f(x_0,y_1)$. $x_1 \in L(t')$ より, $\alpha < (1-t')f(x_1,y_0)+t'f(x_1,y_1)$. 従って,

$$\begin{aligned}\alpha &< (1-s)((1-t')f(x_0,y_0)+t'f(x_0,y_1))+s((1-t')f(x_1,y_0)+t'f(x_1,y_1)) \\ &= (1-t')((1-s)f(x_0,y_0)+sf(x_1,y_0))+t'((1-s)f(x_0,y_1)+sf(x_1,y_1)) \\ &< (1-t')(\alpha+\epsilon)+t'f(x_s,y_1)\end{aligned}$$

従って,

$$\alpha - \frac{1-t'}{t'}\epsilon \le f(x_s, y_1)$$

よって,

$$\begin{aligned}\alpha - \frac{1-t'}{t'}\epsilon &\le \min(f(x_s,y_0), f(x_s,y_1)) \\ &\le \sup_{x\in L}\min(f(x,y_0),f(x,y_1))\end{aligned}$$

となり矛盾である. 従って,

$$L(t) \subset L(0), \quad \text{または} \quad L(t) \subset L(1)$$

即ち, $[0,1] = T_0 \cup T_1$ となる. このとき, T_0 は開である. 実際, $t_0 \in T_0$ をとり, $\alpha < (1-t_0)f(x_0,y_0)+t_0f(x_0,y_1)$ なる $x_0 \in L$ をとり固定する. このとき, $x_0 \in L(t_0) \subset L(1)$. さらに, $G = \{t \in [0,1] : \alpha < (1-t)f(x_0,y_0)+tf(x_0,y_1)\}$ とおくと, G は t_0 の開近傍で, $t \in G$ とすると, $x_0 \in L(t)$. よって, $x_0 \in L(t) \cap L(0)$ となり, $L(t) \subset L(0)$ が出て, $t \in T_0$. 即ち, $G \subset T_0$. 同様にして, T_1 も開となりこれは $[0,1]$ の連結性に反する.

注意 3.1 補題 3.1の証明は定理 3.1の仮定の (iii) と X のコンパクト性を使えばかなり簡単になるが, ここではこれらの仮定を使わなかった. 従って, 補題 2.2に対応する命題はこれらの仮定なしに成立する. このことを考慮すると有理数体をスカラーとする線型空間における次のミニマックス定理が成立することがわかる.

定理 3.2 X と Y をそれぞれ有理数体をスカラーとする線型空間内の凸集合（即ち, その任意の二点の有理凸結合が再びそれに属す集合）と凸多角形（即ち, 有限個の点の有理凸結合の全体）とする. $f : X \times Y \to R$ は次の性質を満たすとする.

(i) $f(\cdot, y)$ は中点凹で, 上に有界である.

(ii) $f(x, \cdot)$ は中点アフィンである.

このとき等式

$$\sup_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

が成立する.

参考文献

[1] K. Fan, *Minimax theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39** (1953), 42–47.

[2] M. A. Geraghty and B. L. Lin, *Minimax theorems without linear structure*, Linear and Multilinear Algebra **17** (1985), 171-180.

[3] J. Kindler and R. Trost,*Minimax theorems for interval spaces*, Acta Math. Hung. **54** (1989), 39–49.

[4] H. König, *Über das von Neumannsche Minimaxtheorem*, Arch. Math. **19** (1968), 482–487.

[5] H. Komiya, *Elementary proof for Sion's minimax theorem*, Kodai Math. J. **11** (1988), 5–7.

[6] H. Komiya, *On Minimax theorems*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **17** (1989), 171–178.

[7] M. Sion, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math. **8** (1958), 171–176.