数理解析研究所講究録
第 742 巻 1991 年 1-7

青本, Gel'fand の hypergeometric function の determinant について.

千葉大・教. 寺杣友秀
マンハイム大.

1 Introduction.

織田氏との共著の論文の中で, 構成された, Braid 群の表現, 及び, その determinant に関する研究は, 自然に, 一般組紐群 (= generalized braid group) の表現の構成, その determinant に関する研究へと, 一般化される. determinant というものは, 与えられた表現の Abel 的な部分のみを扱っているので, もちろん, 表現に関して知るには, 不十分であるが, いわゆる "一般 Magnus 表現" の determinant 及び その Hodge analogue とも言える, 青本-Gel'fand の hypergeometric function の determinant は, Jacobi 和や, Γ-関数, Discriminant 等の重要かつ興味深い invariant を含む.

著者が話した determinant に関する結果は, すでに, 独立に Varchenko 氏により発見されており (1989年) 事実としては, 知られていたが, Braid 群の Monodromy 表現として, それを見る時, それは, Galois 表現とも関連づけられる. Varchenko 氏の手法は, Configuration に対して, pencil をつくるという仕方で, これらのものをとらえているが, この考え方は, F. Loeser 氏によって, $\mathbb{Q}_\ell$ sheaf の場合に, analogy がなされた. 彼は, これにより, 有限体上のあるゼータ関数に関する等式を, Fourier 変換を使い示した. Loeser 氏の証明は, やはり, Configuration

の Pencil を使う、美しい手法でなされる

さて、少し話は変わるが、Hypergeometric function には、q-analogue が存在する。Γ関数、Beta関数が、自然に q-analogue に拡張される様に、hypergeometric function も q-analogue に拡張される。これについても織田-T.-の類似が存在することが最近示された。(準備中) 最近の青木氏の Selberg integral の q-analogue の論文には、b-関数の q-analogue が現われる。これらのものは、何か新しい configuration space, q-analogue 等の、新古典的対象の存在を、予想させる様に思われる。

2. 青木-Gel'fand の hypergeometric function の determinant

初めに、Configuration に関する Notation を定めよう

m, n を、$m > n+1$ なる整数とする。$A = (a_{ij})$ を、$M(m \times (n+1))$ の元とする。A が条件

$$(*) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \cdots 0, 1 \end{pmatrix} \text{ のすべての } (n+1)\text{-小行列式}$$

が 0 でない

を満たすとする。$\mathbb{C}^n$ を、$\mathbb{P}^n$ の open set $= \{(x_0 : \cdots : x_n) \mid x_0 \neq 0\}$ と見ると、$\mathbb{C}^n$ 内の hyperplane $H_i^0 = \{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_{i,n+1} = 0\}$ $(i = 1, \cdots, m)$ の closure H_i は、$\mathbb{P}^n$ 内の projective hyperplane を定める。$H_\infty = \mathbb{P}^n - \mathbb{C}^n$ とする。この時、条件$(*)$は、$H_1 \cup \cdots \cup H_m \cup H_\infty$ が $\mathbb{P}^n$ 内で、normal crossing になることと同値である。

$\tilde{X}$ を、$X = \mathbb{C}^n - \bigcup_{i=1}^{m} H_i^0$ 上の covering で、

$\exp(w_i) = L_i(x) \quad (i = 1, \cdots, m)$

で定義されたものとする。

Definition (Schur function)

Ω を indexset $\Omega = \{(i_1, \cdots, i_n) \mid 1 \leqq i_1 < \cdots < i_n \leqq m-1\}$ とする。Ω の元, J に対して, $t_1, \cdots, t_n$ の関数 t_J を. ($J = (j_1, \cdots, j_n)$ とする)

$$t_J = \det \begin{pmatrix} t_1^{j_1-1}, & \cdots, & t_1^{j_n-1} \\ t_n^{j_1-1}, & \cdots, & t_n^{j_n-1} \end{pmatrix} \times$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 \cdots\cdots & t_1^{n-1} \\ 1 \cdots\cdots & t_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

で定義すると. $t_1, \cdots t_n$ に関する対称式なので. 基本対称式の多項式として. unique に書き表わされる x_i を $t_1, \cdots, t_n$ の i 次基本対称式として、t_J を. $S_J(x_1, \cdots, x_n)$ と表わす時. S_J を Schur polynomial と言う. さて. 今から. $\tilde{X}$ 上の differential form 及び. chain を定義しよう. $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ を. $Re(\alpha_i) > 0$ を満たすベクトルとする。

Definition of differential form ω_J on $\tilde{X}$

$\tilde{X}$ を $\exp(w_i) = L_i(x_1, \cdots, x_n)$ とする。J を Ω の元とする時. $\tilde{X}$ 上の differential form ω_J を.

$$\omega_J = \prod_{j=1}^{m} \exp\{(\alpha_i - 1)\omega_j\} \underbrace{S_J(x_1, \cdots, x_n)}_{dx_n \wedge \cdots \wedge dx_1}$$

とおく。

Definition of Chain $\tilde{D}_I$

I を $\mathfrak{N}$ の元とする。$M(m\times(n+1),\mathbb{C})$ 内の $(*)$ を満たす元からなる集合を、$M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{C})$, $M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{C})\cap M(m\times(n+1),\mathbb{R}) = M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{R})$ とおく。

$M_S^\circ = \{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m) \mid \lambda_i \neq \lambda_j,\ \lambda_i\in\mathbb{R}\}$ の元、

$(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ は、$M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{R})$ の元、

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \lambda_1^n \\ & & \\ 1 & \cdots\cdots & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$ を定める。

これにより定まる写像 $M_S^\circ \longrightarrow M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{R})$ の chamber $\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m) \mid \lambda_1<\cdots<\lambda_m\}$ の像を含む $M^\circ(m\times(n+1),\mathbb{R})$ の connected component を M_0 と書く。

$A\in M_0$ とする。$I\in\mathfrak{N}$ の元とすると、$\mathbb{R}^n$ 内の領域

$$D_I = \{(x_1,\cdots,x_n) \mid (-1)^{p-1}L_{i_p}(x_1,\cdots,x_n)>0,\ (-1)^p L_{i_p+1}(x_1,\cdots,x_n)>0 \ \text{for all } p=1,\cdots,n\}$$

は、relatively compact である。そして、Covering $\tilde{X}\longrightarrow X=\mathbb{C}^n-\bigcup_{i=1}^m H_i$ を考えた時、D_I の $\tilde{X}$ への lifting $\tilde{D}_I$ は、

(1) $(x_1,\cdots,x_n)\in D_I$

(2) $\omega_j \in \mathbb{R}-\mu\pi i$、ここで $\mu=\#\{k \mid j_k<j\}$

なる条件で unique に定まる。

そして、$\tilde{X}$ 上の differential form ω_J 及び、chain $\tilde{D}_I$ が $\mathfrak{N}$ の元 I, J に対して定義されたので、その行列式

$\det\left(\int_{\tilde{D}_I}\omega_J\right)$ が考えられる。

Main Theorem を述べる前に、いくつかの小行列式の定義をしよう。Index set $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_\infty$ をそれぞれ、

$\mathcal{C} = \{(i_1, \cdots, i_{n+1}) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{n+1} \leq m\}$

$\mathcal{C}_\infty = \{(i_1, \cdots, i_n) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m\}$

とする。$\mathcal{C}$ の元 I 及び $\mathcal{C}_\infty$ の元 I' に対して、D_I, $D_{I'}$ をそれぞれ、

$$D_I = \det \begin{pmatrix} a_{i_1,1} & \cdots & a_{i_1,n+1} \\ & \vdots & \\ a_{i_{n+1},1}, & \cdots, & a_{i_{n+1},n+1} \end{pmatrix}$$

$$D_{I'} = \det \begin{pmatrix} a_{i_1,1}, & \cdots & a_{i_1,n} \\ & \vdots & \\ a_{i_n,1}, & \cdots, & a_{i_n,n} \end{pmatrix}$$

と定義する。また、$I \in \mathcal{C}$, $I' \in \mathcal{C}_\infty$ として、α_∞, α_I, $\alpha_{I'}$ をそれぞれ、 $\alpha_\infty = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\alpha_I = \sum_{i \in I} \alpha_i$, $\alpha_{I'} = \sum_{i \in I'} \alpha_i + \alpha_\infty$ で定義する。

<u>Theorem</u> 周期行列 $\left(\int_{\tilde{D}_I} \omega_J\right)$ の行列式は、

$$\det\left(\int_{\tilde{D}_I} \omega_J\right) = \frac{\prod_{I \in \mathcal{C}} D_I^{\alpha_I} \cdot \prod_{I' \in \mathcal{C}_\infty} D_{I'}^{\alpha_{I'}}}{\prod_{I \in \mathcal{C}} D_I} \times$$

$$\prod_{i=1}^{m} \exp\left(N(1-i)\alpha_i \pi\sqrt{-1}\right) \times \left(\frac{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}\right)^N$$

で与えられる。ここで $N = {}_{m-2}C_{n-1}$.

さて、定理の Braid 群の表現論的な意味であるが、それは、次の様に解釈できる。

$\mathfrak{M}_{\mathbb{C}} = M^{\circ}(m\times(n+1), \mathbb{C})$ 上に、各 $A\in\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}$ に対して、$\tilde{X}$ を対応させることにより、$\tilde{X}$ の family $\tilde{\mathfrak{X}}$ ができる。具体的に、
$\tilde{\mathfrak{X}} = \{(w_i, x_j, A) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \times \mathfrak{M}_{\mathbb{C}} \mid \exp(w_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j + a_{i,n+1},\ i=1,\cdots,m\}$
で与えられる。Structure morphism を、$\varphi: \tilde{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}$ とする。この時、$R^n\varphi_*\mathbb{Z}$ は、$\pi_1(\mathfrak{M}_{\mathbb{C}})$-module となる。また、$\tilde{\mathfrak{X}}$ には、$\sigma_j : w_i \longmapsto w_i + \delta_{ij}$ $(j=1,\cdots,m)$ によって、$\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}$ 上の $G = \bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}\sigma_i$ action が存在する。かくして、$\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}$ の点、$\eta = [A]$ を1つ fix すれば、$H^n(\tilde{\mathfrak{X}}_\eta, \mathbb{Z})$ は、$G\times\pi_1(\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}, \eta)$ module の構造をもつ。よって、G の群環 $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[\sigma_1^{\pm1}, \cdots, \sigma_m^{\pm1}]$ を A、その商体を K と書く。

<u>Proposition</u> $H^n(\tilde{\mathfrak{X}}_\eta, \mathbb{Z}) \otimes_A K$ は、K 上 $b = (-1)^n \chi(\mathbb{C}^n - \bigcup_{i=1}^{m} H_i)$ 次元である

この Proposition から、$\pi_1(\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}, \eta)$ は、K 上の1次元 vector space $\bigwedge^b_K H^n(\tilde{\mathfrak{X}}_\eta, \mathbb{Z}) \otimes_A K$ に act する。これから、

$$\Phi : \pi_1(\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}, \eta) \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(K) = K^\times$$

を得る。これは、$\pi_1(\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}, \eta)^{ab}$ を経由してゆくが、$\pi_1(\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}, \eta)^{ab}$ の構造を、記述することにしよう。

$\chi_I : \pi_1(\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}, \eta) \longrightarrow \mathbb{Z}$ (resp $\chi_{I'}$) を、D_I, (resp $D_{I'}$) に関する、exponential-Kummer character、すなわち、$\sigma \longmapsto \sigma(\log D_I) - \log D_I$ (resp $\sigma(\log D_{I'}) - \log D_{I'}$) とする。この時、

<u>Proposition</u> $\bigoplus_{I\in\mathcal{C}} \chi_I \oplus \bigoplus_{I'\in\mathcal{C}_\infty} \chi_{I'} : \pi_1^{ab}(\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}, \eta) \longrightarrow \bigoplus_{I, I'} \mathbb{Z}$

は、Isomorphism.

この等式において、右辺の対応するgenerator を、ξ_I, $\xi_{I'}$ と書く。 $\sigma_\infty = (\sigma_1 \cdots\cdots \sigma_m)^{-1}$ とおく

Corollary to main theorem

$$\Phi(\xi_I) = \prod_{i \in I} \sigma_i \quad \in K^\times$$

$$\Phi(\xi_{I'}) = \prod_{i \in I'} \sigma_i \times \sigma_\infty \quad \in K^\times$$

Rem この Corollary と比較定理を使って、generalized Braid group に関する、Oda-T. の定理の Analogy ができる。