数理解析研究所講究録
第742巻 1991年 8-29

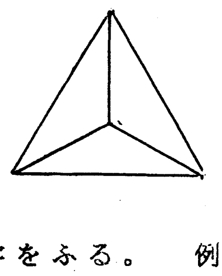
射影平面上の六点の配置空間

九州大学理学部　吉田正章 (Masaaki Yoshida)

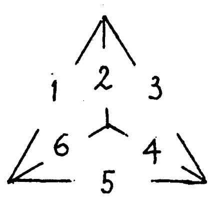
序　射影平面上の順序付けられた六点の配置空間を問題にする。 これは (3.6) 型里芋（旧名 Aomoto-Gelfand）超幾何微分方程式の定義域を調べる時に出てきた問題だが、今回は微分方程式にはふれないで純粋に幾何の問題として述べる。 結論は この様な配置空間は２９次元射影空間の４次元部分多様体として実現され、その上に６次の対称群とそれと可換な involution が自然に働いていて involution の固定点は或二次曲線に乗っている六点となっていることである。

１）四次元射影多様体　Y

（正）四面体

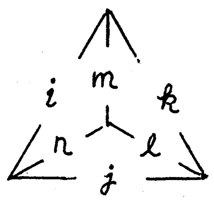


の各辺に１から６までの数字をふる。 例えば

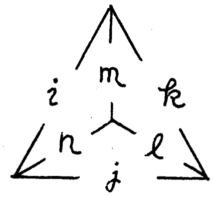


裏返しを含めた四面体群で移りあう物は同一視する事にする。 するとふり方は $|S_6/S_4| = 30$ 通りある。 ここで S_n は n 次対称群を表す。
四面体の双対図形はまた四面体なので対応する辺に対応する番号をふることによ

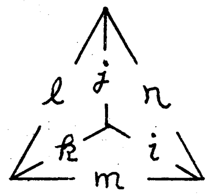
り、番号をふられた四面体に ”双対 ”を定義する。 記号として "conj" を用いる。 即ち



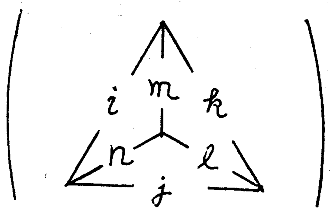
$\xleftrightarrow[\text{双対}]{}$ conj



=

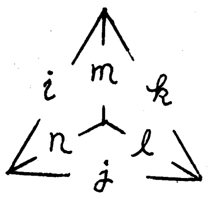


さて、番号をふられた四面体を重さ 1 の不定元と思ってそれらによって生成される次数付環に対応する射影空間 P を考える。 即ち座標が



$(ijk\ell mn) \in S_6/S_4$

である 29 次元射影空間である。 四面体を手書きするのは煩わしいので以後



を

$$\begin{array}{ccccc} & & m & & \\ & i & & k & \\ n & - & j & - & \ell \end{array}$$

と書く。 すると

$$\mathrm{conj}\ \begin{array}{ccccc} & & m & & \\ & i & & k & \\ n & - & j & - & \ell \end{array} \ = \ \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & \ell & & n & \\ k & - & m & - & i \end{array}$$

となる。 その他に以下の記号を用意する。

$$\delta(ijk) := \sum_{(abc)\in S_3} \begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & c & & b & \\ j & - & a & - & k \end{array}$$

ここで $\{a,b,c\} = \{1,2,3,4,5,6\} - \{i,j,k\}$ で和はすべての置換をわたる。
定義から $\delta(ijk)$ は (i,j,k) の順列にはよらない。

10

射影空間 P の部分多様体 Y を以下の式 (1),...,(6) で定義する。

(1)

$$\begin{smallmatrix}&&5&&\\&1\diagup&&\diagdown 3&\\6\diagup&-&2&-&\diagdown 4\end{smallmatrix} - \mathrm{conj} \begin{smallmatrix}&&5&&\\&1\diagup&&\diagdown 3&\\6\diagup&-&2&-&\diagdown 4\end{smallmatrix}$$

$$= \mathrm{sign}\binom{123456}{ijk\ell mn}\left[\begin{smallmatrix}&&m&&\\&i\diagup&&\diagdown k&\\n\diagup&-&j&-&\diagdown \ell\end{smallmatrix} - \mathrm{conj} \begin{smallmatrix}&&m&&\\&i\diagup&&\diagdown k&\\n\diagup&-&j&-&\diagdown \ell\end{smallmatrix}\right],$$

$$\left[\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\m\diagup&-&i&-&\diagdown n\end{smallmatrix} - \mathrm{conj} \begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\m\diagup&-&i&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\right]\delta(\ell mn)$$

(2)

$$= \begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\m\diagup&-&i&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&j\diagup&&\diagdown i&\\m\diagup&-&k&-&\diagdown n\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&j\diagup&&\diagdown i&\\m\diagup&-&k&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&i\diagup&&\diagdown k&\\m\diagup&-&j&-&\diagdown n\end{smallmatrix}$$

$$+ \begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&i\diagup&&\diagdown k&\\m\diagup&-&j&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\m\diagup&-&i&-&\diagdown n\end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&j\diagup&&\diagdown k&\\m\diagup&-&i&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&i\diagup&&\diagdown j&\\m\diagup&-&k&-&\diagdown n\end{smallmatrix}$$

$$- \begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&i\diagup&&\diagdown j&\\m\diagup&-&k&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&k\diagup&&\diagdown i&\\m\diagup&-&j&-&\diagdown n\end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&k\diagup&&\diagdown i&\\m\diagup&-&j&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&j\diagup&&\diagdown k&\\m\diagup&-&i&-&\diagdown n\end{smallmatrix},$$

$$\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&m\diagup&&\diagdown j&\\k\diagup&-&i&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\quad\delta(\ell mn)$$

(3)

$$= -\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\m\diagup&-&i&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\left[\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&j\diagup&&\diagdown k&\\m\diagup&-&i&-&\diagdown n\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&i\diagup&&\diagdown k&\\m\diagup&-&j&-&\diagdown n\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&j\diagup&&\diagdown i&\\m\diagup&-&k&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\right]$$

$$+ \begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&k\diagup&&\diagdown i&\\m\diagup&-&j&-&\diagdown n\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}&&\ell&&\\&i\diagup&&\diagdown j&\\m\diagup&-&k&-&\diagdown n\end{smallmatrix},$$

(4)

$$\begin{smallmatrix}&&k&&\\&n\diagup&&\diagdown i&\\j\diagup&-&\ell&-&\diagdown m\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}&&k&&\\&\ell\diagup&&\diagdown i&\\j\diagup&-&n&-&\diagdown m\end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix}&&k&&\\&m\diagup&&\diagdown i&\\j\diagup&-&n&-&\diagdown \ell\end{smallmatrix}\begin{smallmatrix}&&k&&\\&n\diagup&&\diagdown i&\\j\diagup&-&m&-&\diagdown \ell\end{smallmatrix}$$

$$+\ \begin{array}{ccccc} &&k&& \\ &\ell&&i& \\ j&-&m&-&n\end{array}\ \begin{array}{ccccc} &&k&& \\ &m&&i& \\ j&-&\ell&-&n\end{array}\ +\left[\begin{array}{ccccc} &&5&& \\ &1&&3& \\ 6&-&2&-&4\end{array}\ -\ \mathrm{conj}\ \begin{array}{ccccc} &&5&& \\ &1&&3& \\ 6&-&2&-&4\end{array}\right]^2 = 0,$$

(5)

$$\begin{array}{ccccc} &&\ell&& \\ &k&&j& \\ m&-&i&-&n\end{array}\ \begin{array}{ccccc} &&\ell&& \\ &j&&i& \\ m&-&k&-&n\end{array}\ \begin{array}{ccccc} &&\ell&& \\ &i&&k& \\ m&-&j&-&n\end{array}$$

$$+\ \begin{array}{ccccc} &&\ell&& \\ &j&&k& \\ m&-&i&-&n\end{array}\ \begin{array}{ccccc} &&\ell&& \\ &i&&j& \\ m&-&k&-&n\end{array}\ \begin{array}{ccccc} &&\ell&& \\ &k&&i& \\ m&-&j&-&n\end{array}\ = 0\ ,$$

(6)

$$\left[\begin{array}{ccccc} &&\ell&& \\ &k&&j& \\ m&-&i&-&n\end{array}\ \cdot\ \mathrm{conj}\ \begin{array}{ccccc} &&\ell&& \\ &k&&i& \\ m&-&j&-&n\end{array}\right]^2$$

$$= \delta(\ell km)\,\delta(min)\,\delta(nj\ell)\,\delta(ikj)\ .$$

定義から以下はただちに従う。

<u>命題</u>　6文字の置換の成す群　S_6　と双対　conj の成す群　$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$　の直積群　$S_6\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$　が射影多様体　Y　に自己同型として働く。

<u>注意</u>　関係式 (4) から以下の関係式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} &&i&& \\ &n&&j& \\ k&-&\ell&-&m\end{array}\ \begin{array}{ccccc} &&i&& \\ &m&&j& \\ k&-&n&-&\ell\end{array}\ \begin{array}{ccccc} &&i&& \\ &\ell&&j& \\ k&-&m&-&n\end{array}$$

$$-\ \begin{array}{ccccc} &&i&& \\ &m&&j& \\ k&-&\ell&-&n\end{array}\ \begin{array}{ccccc} &&i&& \\ &\ell&&j& \\ k&-&n&-&m\end{array}\ \begin{array}{ccccc} &&i&& \\ &n&&j& \\ k&-&m&-&\ell\end{array}\ = 0$$

<u>補題</u>　$\{i,j,k,\ell,m,n\} = \{1,2,3,4,5,6\}$ とする。

1)　Y 上では

$$\delta(ijk) = \delta(\ell mn)$$

2)　Y 上の点が　$\delta(ijk) = \delta(\ell mn) = 0$　を満たせば次のうち少なくとも一方がなりたつ：　面 $\Delta(ijk)$ を含む四面体はすべて 0；面 $\Delta(\ell mn)$ を含む四面体はすべて 0。

12

<u>証明</u>　1）関係式（1）から出る。

2）$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$, $\{\ell,m,n\}=\{4,5,6\}$ とする。関係式（6）より

$$\begin{array}{ccccc}&&4&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\5\diagup&-&i&-&\diagdown 6\end{array}\quad\begin{array}{ccccc}&&i&&\\&6\diagup&&\diagdown 5&\\j\diagup&-&4&-&\diagdown k\end{array}=0\qquad\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$$

また関係式（1）より

$$\begin{array}{ccccc}&&4&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\5\diagup&-&i&-&\diagdown 6\end{array}-\begin{array}{ccccc}&&i&&\\&6\diagup&&\diagdown 5&\\j\diagup&-&4&-&\diagdown k\end{array}=\operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\i&j&k\end{pmatrix}\alpha$$

$$\alpha:=\begin{array}{ccccc}&&4&&\\&3\diagup&&\diagdown 2&\\5\diagup&-&1&-&\diagdown 6\end{array}-\begin{array}{ccccc}&&1&&\\&6\diagup&&\diagdown 5&\\2\diagup&-&4&-&\diagdown 3\end{array}$$

故

$\operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\i&j&k\end{pmatrix}=1$ のとき

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{array}{ccccc}&&4&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\5\diagup&-&i&-&\diagdown 6\end{array}=0\quad\text{かつ}\quad\begin{array}{ccccc}&&i&&\\&6\diagup&&\diagdown 5&\\j\diagup&-&4&-&\diagdown k\end{array}=-\alpha\\ \text{あるいは}\\ \begin{array}{ccccc}&&4&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\5\diagup&-&i&-&\diagdown 6\end{array}=\alpha\quad\text{かつ}\quad\begin{array}{ccccc}&&i&&\\&6\diagup&&\diagdown 5&\\j\diagup&-&4&-&\diagdown k\end{array}=0;\end{array}\right.$$

$\operatorname{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\i&j&k\end{pmatrix}=-1$ のとき

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{array}{ccccc}&&4&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\5\diagup&-&i&-&\diagdown 6\end{array}=-\alpha\quad\text{かつ}\quad\begin{array}{ccccc}&&i&&\\&6\diagup&&\diagdown 5&\\j\diagup&-&4&-&\diagdown k\end{array}=0\\ \text{あるいは}\\ \begin{array}{ccccc}&&4&&\\&k\diagup&&\diagdown j&\\5\diagup&-&i&-&\diagdown 6\end{array}=0\quad\text{かつ}\quad\begin{array}{ccccc}&&i&&\\&6\diagup&&\diagdown 5&\\j\diagup&-&4&-&\diagdown k\end{array}=\alpha.\end{array}\right.$$

一方関係式（3）より

$$\begin{array}{c}4\\ k\diagup\ \diagdown j\\ 5-i-6\end{array}\left[\begin{array}{c}4\\ j\diagup\ \diagdown k\\ 5-i-6\end{array}+\begin{array}{c}4\\ i\diagup\ \diagdown k\\ 5-j-6\end{array}+\begin{array}{c}4\\ j\diagup\ \diagdown i\\ 5-k-6\end{array}\right]$$

$$-\begin{array}{c}4\\ k\diagup\ \diagdown i\\ 5-j-6\end{array}\ \begin{array}{c}4\\ i\diagup\ \diagdown j\\ 5-k-6\end{array}=0,$$

$$\begin{array}{c}1\\ n\diagup\ \diagdown m\\ 2-\ell-3\end{array}\left[\begin{array}{c}1\\ m\diagup\ \diagdown n\\ 2-\ell-3\end{array}+\begin{array}{c}1\\ \ell\diagup\ \diagdown n\\ 2-m-3\end{array}+\begin{array}{c}1\\ m\diagup\ \diagdown \ell\\ 2-n-3\end{array}\right]$$

$$-\begin{array}{c}1\\ n\diagup\ \diagdown \ell\\ 2-m-3\end{array}\ \begin{array}{c}1\\ \ell\diagup\ \diagdown m\\ 2-n-3\end{array}=0$$

となるので条件 $\delta(123)=\delta(456)=0$ と併せて結論を得る。 ■

2) 射影平面上の六点配置の空間

射影平面上の順序付けられた六点はそれらの同次座標を縦に列べることにより

$$z=(zij)=\begin{pmatrix} z11 & & z16\\ z21 & \cdots & z26\\ z31 & & z36\end{pmatrix}\in M(3,6)$$

と表すことが出来る。 小行列式の記号:

$$D(ijk):=\det\begin{pmatrix} z1i & z1j & z1k\\ z2i & z2j & z2k\\ z3i & z3j & z3k\end{pmatrix}.$$

射影平面上の同次座標の採り方に依らぬ様にするために以下の空間

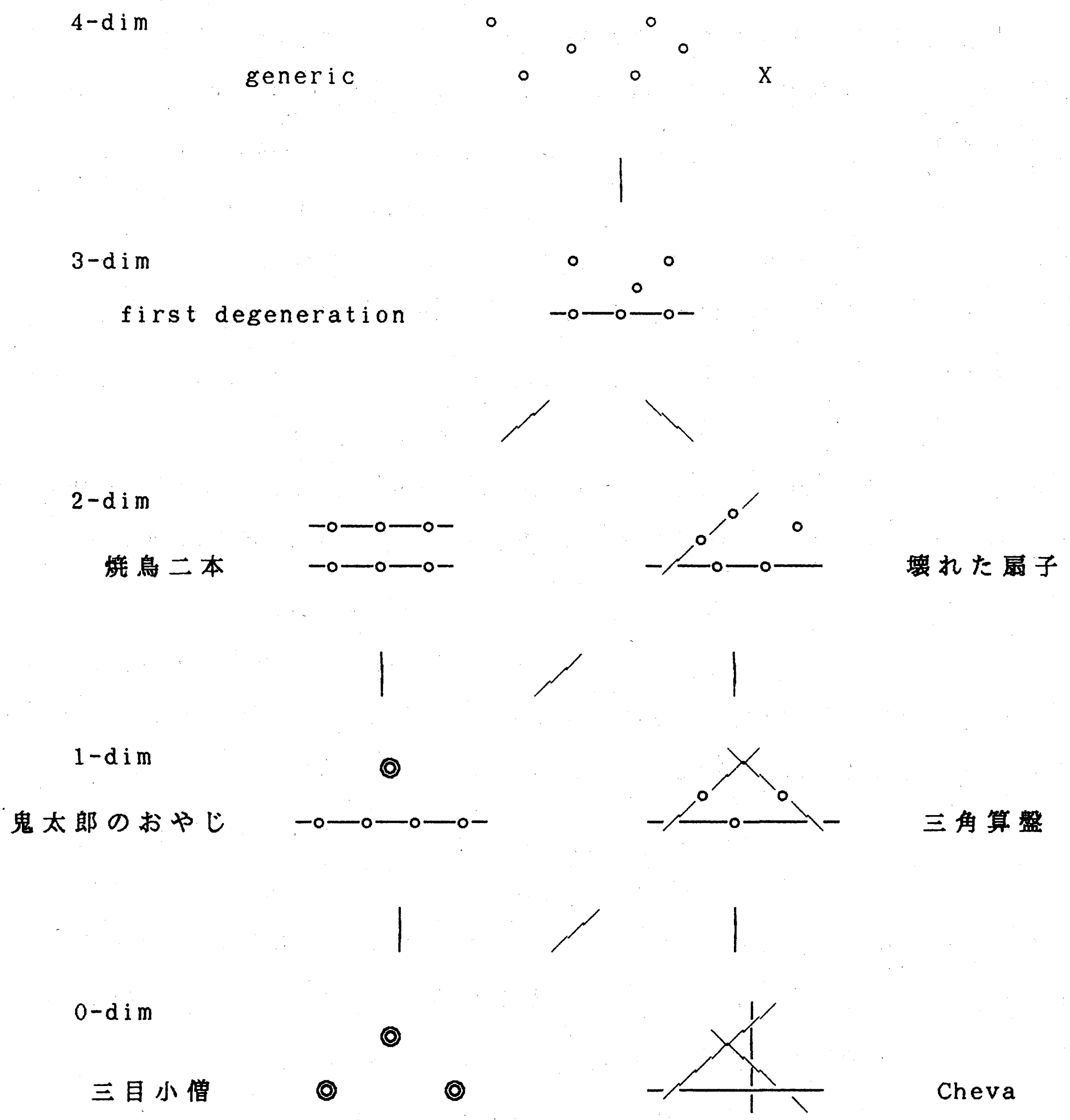
$$GL(3,\mathbb{C})\backslash\{\ z=(zij)\ \}/(\mathbb{C}^*)^6$$

を考えたいが すべての z を許すとよい構造が入らない。 その為にまず六点が<u>一般の位置</u>にある場合をかんがえる。 一般の位置とはどんな三点も同一直線上に無い事である。 この様な配置の全体を

$$X:=G\backslash\{\ z\in M(3,6)\mid D(ijk)\neq 0,\ 1\le i<j<k\le 6\}/H$$

$$G:=GL(3,\mathbb{C}),\quad H:=(\mathbb{C}^*)^6$$

と置く。 この空間 X に degenerate した配置をいくつか付け加えて都合のよい compact 化をしたい。 射影平面上の六点配置の空間上どんな事がやりたいかによって compact 化は色々考えられるが今回はある意味で最小の物を構成する。 先ず我々の付け加える degenerate した配置を図示する：



ここで —o—o—o— は三点が同一直線上にある事を示し、◎ は二点が重なっている事をしめす。また二つの図形が線で結ばれているときは下の物は上の物の極限として表れることを示す。

<u>記号</u>

$$X_{fd}^{\{ijk\}} := G\backslash \{z \in M(3,6) \mid D(ijk) = 0,\ 他の小行列式 \neq 0\} / H$$

これは i,j,k と番号付けられた三点が同一直線上にありその他に特別なことはなにも起こってない配置全体である。(fd は first degeneration の頭文字)

$$X_{yn}^{\{ijk;\ell mn\}} := G\backslash \{z \in M(3,6) \mid D(ijk) = D(\ell mn) = 0,\ 他の小行列式 \neq 0 \quad \{i,j,k,\ell,m,n\} = \{1,\ldots,6\}\} / H$$

これは点 i,j,k が同一直線上にあり、点 ℓ,m,n が同一直線上にありその他に特別なことはなにもおこってない配置である。(yn は焼鳥二本の頭文字)

$$X_{ks}^{\{ijk;lmn\}} := G\backslash \{z \in M(3,6)\ D(ijk) = D(imn) = 0,\ 他の小行列式 \neq 0 \quad m,n \notin \{i,j,k\}\} / H$$

これは点 i,j,k が同一直線上にあり、点 i,m,n が同一直線上にありその他に特別なことはなにもおこってない配置である。(ks は壊れた扇子の頭文字)

$$X_{ko}^{\{ij\}} = G\backslash \{z \in M(3,6) \mid D(ijk) = 0,\ D(\ell mn) = 0, \quad k,\ell,m,n \notin \{i,j\} 他の小行列式 \neq 0\} / H$$

これは点 i,j が同一点であり、他の四点が同一直線上にありその他に特別なことは何も起こってない配置である。(ko は鬼太郎の親父の頭文字)

$$X_{ss}^{\{ijk;k\ell m;mni\}} := G\backslash \{z \in M(3,6) \mid D(ijk) = D(k\ell m) = D(mni) = 0, \quad 他の小行列式 \neq 0\} / H$$

これは点 i,j,k と k,ℓ,m と m,n,i が同一直線上にありその他に特別なことは何も起こってない配置である。(ss は三角算盤の頭文字)

$$X_{mk}^{\{ij;k\ell;mn\}} := G\backslash \{z \in M(3,6) \mid D(pqr) \neq 0,\ p \in \{i,j\}, \quad q \in \{k,\ell\},\ r \in \{m,n\},\ 他の小行列式 = 0\} / H$$

これは点 i,j が同一点であり、 点 k,ℓ が同一点であり、点 m,n が同一点であり、これらの三点が同一直線上にない配置である。(mkは三目小僧の頭文字)

$$X_{cv}^{\{ijk;k\ell m;mni;j\ell n\}} := G\backslash \{z \in M(3,6) \mid D(ijk) = D(k\ell m) = D(mni) = D(j\ell n) = 0,\ 他の小行列式 \neq 0\} / H$$

これは点 i,j,k と k,ℓ,m と m,n,i と j,ℓ,n が同一直線上にありその他に特別なことは何も起こってない配置である。(cv は Cheva 図形の略)

$$X_{fd} := \cup X_{fd}^{\{ijk\}} \quad 20ケ$$

$$X_{yn} := \cup X_{yn}^{\{ijk;\ell mn\}} \quad 10ケ \qquad X_{ks} := \cup X_{ks}^{\{ijk:imn\}} \quad 90ケ$$

$$X_{ko} := \cup X_{ko}^{\{ij\}} \quad 15ケ \qquad X_{ss} := \cup X_{ss}^{\{ijk;k\ell m;mni\}} \quad 120ケ$$

$$X_{mk} := \cup X_{mk}^{\{ij;k\ell;mn\}} \quad 15ケ \qquad X_{cv} := \cup X_{cv}^{\{ijk;k\ell m;mni;j\ell n\}} \quad 30ケ$$

上に挙げたすべての degenetate した図形を X に付け加えた集合を $\overline{X}$ とする。

$$\overline{X} := X \cup X_{fd} \cup X_{yn} \cup X_{ks} \cup X_{ko} \cup X_{ss} \cup X_{mk} \cup X_{cv}$$

定義から $\overline{X}$ には (zij) の列の入れ替えとして 対称群 S_6 が働いている。 以下 $\overline{X}$ が先に定義した射影多様体 Y と一対一に対応する事を示し、$\overline{X}$ に射影多様体の構造が入ることを示す。

3) 写像 $f: \overline{X} \to Y$

$\overline{X}$ から Y への写像を定義する: $z = (z_{ij})$ $(1 \le i \le 3,\ 1 \le j \le 6)$ に対して各番号をふられた四面体に四つの自然に向き付けられた面に対応する z の小行列式の積を対応させる。 即ち $\{i,j,k,\ell,m,n\} = \{1,2,3,4,5,6\}$ に対して

$$f:\ z \ \mapsto \ \begin{array}{ccccc} & & m & & \\ & i & & k & \\ n & - & j & - & \ell \end{array} \ = D(min)D(nj\ell)D(\ell km)D(kji).$$

この定義は四面体の向き付けには依らない。 $\overline{X}$ のどんな degenerate した配置に対しても 少なくとも一つの零でない四面体がある。 $GL(3,\mathbb{C})$ の左からの、$(\mathbb{C}^*)^6$ の右からの作用で不変。故に f は $\overline{X}$ から $\mathbb{P}^{30-1}$ への写像を定義する。また定義から f は S_6 の $\overline{X}$ と $\mathbb{P}^{30-1}$ への作用と可換である。 $f(\overline{X})$ が Y と一致することは以下に段階を追って証明する。

<u>補題</u> $f(\overline{X}) \subset Y$

<u>証明</u> 馬鹿正直にやるなら小行列式の計算を辛抱強くやって (1),...,(6) を示すとよい。それがいやな人は以下の考察のなかに比較的簡単な証明のヒント

を見いだすべきである。 ■

Generic case

記号　　T : 四面体

$$Y_{gn} = \{\ (T) \in Y \mid T \neq 0 \quad \text{for all} \quad T\ \}$$

補題　　$f: X \longrightarrow Y_{gn}$ は bijection.

証明

$$T(ijk) := \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & 4 & & 6 & \\ k & - & 5 & - & i \end{array} \qquad \{i,j,k\} = \{1,2,3\}$$

と置くと、関係式 (6) より Y_{gn} 上すべての $\{\ell,m,n\}$ に対して $\delta(\ell mn) \neq 0$ であり特に $\delta(456) \neq 0$ 故、関係式 (2) と (3) より $T(ijk)$ 以外のすべて四面体は $T(ijk)$ の分母が零にならない有理式で書ける。また $T(ijk)$ 間には関係式 (5) より三次関係式

(7)　$$T(123)T(312)T(231) + T(321)T(213)T(132) = 0$$

が成り立っている。即ち Y_{gn} は $(T(ijk))$ を同次座標とする5次元射影空間の (7) で定義される3次超曲面の affine open set である。

一方 $z \in X$ のときは

$$z \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c & d \end{bmatrix}$$

と書ける。即ち X は (a,b,c,d)-空間の affine open set である。

さて、像 $f(z)$ の座標のうち $T(ijk)$ は、

$$T(ijk) = D(i6j)D(j4k)D(k5i)D(654)$$

故

$$T(123) = -\,ad\ D(654), \quad T(312) = -b\ D(654), \quad T(231) = -\,c\ D(654),$$
$$T(321) = a\ D(654), \quad T(213) = d\ D(654), \quad T(132) = bc\ D(654).$$

この事により $f: X \to Y_{gn}$ が bijection であることは補題？よりわかる。 ■

First degeneration

次に Y の点で 或四面体が零であるものを考える。 関係式 (6) より或 $\{p,q,r\}$ があって $\delta(pqr)=0$ となる。 すると補題？より或三角形 $\Delta(ijk)$ があってそれを面に持つ四面体はすべて零となる。

記号

$$Y_{fd}^{\{ijk\}} := \{(T)\in Y \mid \Delta(ijk)\text{ を面に持つすべての四面体} = 0,\ \text{他の四面体} \fallingdotseq 0\}$$

補題 f: $X_{fd}^{\{ijk\}} \longrightarrow Y_{fd}^{\{ijk\}}$ bijection

証明 $(\overline{X},X)$, (Y,Y_{gn}) には S_6 が働いているから一般性を失うことなく $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ とする。

$Y_{fd}^{\{123\}}$ 上では

$$(8)\qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 3/ & & \backslash 2 & \\ m/ & - & 1 & - & \backslash n \end{array} = 0, \qquad \begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & 6/ & & \backslash 5 & \\ j/ & - & 4 & - & \backslash k \end{array} = \mathrm{sign}\begin{pmatrix}123\\ ijk\end{pmatrix} \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 6/ & & \backslash 5 & \\ 2/ & - & 4 & - & \backslash 3 \end{array}$$

となっており残りの１８個

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & n/ & & \backslash 2 & \\ 3/ & - & \ell & - & \backslash m \end{array}, \quad \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & n/ & & \backslash 3 & \\ 1/ & - & \ell & - & \backslash m \end{array}, \quad \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & n/ & & \backslash 1 & \\ 2/ & - & \ell & - & \backslash m \end{array} \qquad \{\ell,m,n\}=\{4,5,6\}$$

の間には次の関係式が成り立つ：

$$(9)\qquad \alpha = \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 6/ & & \backslash 5 & \\ 2/ & - & 4 & - & \backslash 3 \end{array} \quad (\fallingdotseq 0)$$

と置くと、(1) より

$$(10)\qquad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & n/ & & \backslash 2 & \\ 3/ & - & \ell & - & \backslash m \end{array} - \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \ell/ & & \backslash 2 & \\ 3/ & - & n & - & \backslash m \end{array} = \alpha, \qquad \mathrm{sign}\begin{pmatrix}456\\ \ell mn\end{pmatrix} = 1$$

$$(11)\quad \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & n & & 3 & \\ 1 & - & \ell & - & m \end{array} - \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & \ell & & 3 & \\ 1 & - & n & - & m \end{array} = \alpha, \quad \mathrm{sign}\binom{456}{\ell mn} = 1$$

$$(12)\quad \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & n & & 1 & \\ 2 & - & \ell & - & m \end{array} - \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & \ell & & 1 & \\ 2 & - & n & - & m \end{array} = \alpha, \quad \mathrm{sign}\binom{456}{\ell mn} = 1$$

また (1.2) において $i = 1$, $j = 2$, $m = 3$ と置くと四面体の対称性から

$$\begin{array}{ccccc} & & \ell & & \\ & 2 & & k & \\ 3 & - & 1 & - & n \end{array} + \begin{array}{ccccc} & & \ell & & \\ & 1 & & k & \\ 3 & - & 2 & - & n \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & k & & n & \\ 2 & - & \ell & - & 3 \end{array} + \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & k & & \ell & \\ 2 & - & n & - & 3 \end{array} = \pm(\alpha - \alpha) = 0$$

故

$$- \begin{array}{ccccc} & & \ell & & \\ & k & & 2 & \\ 3 & - & 1 & - & n \end{array} \begin{array}{ccccc} & & \ell & & \\ & 1 & & k & \\ 3 & - & 2 & - & n \end{array} + \begin{array}{ccccc} & & \ell & & \\ & k & & 1 & \\ 3 & - & 2 & - & n \end{array} \begin{array}{ccccc} & & \ell & & \\ & 1 & & 2 & \\ 3 & - & k & - & n \end{array} = 0.$$

四面体の対称性からこれは以下と同じ： $\{\ell,m,n\} = \{4,5,6\}$ に対して

$$(13)\quad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & n & & 2 & \\ 3 & - & \ell & - & m \end{array} \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & m & & 3 & \\ 1 & - & n & - & \ell \end{array} - \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & m & & 3 & \\ 1 & - & \ell & - & n \end{array} \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & \ell & & 2 & \\ 3 & - & n & - & k \end{array} = 0$$

(ijk) を (123) の偶置換と取り替える事により同様に

$$(14)\quad \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & n & & 3 & \\ 1 & - & \ell & - & m \end{array} \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & m & & 1 & \\ 2 & - & n & - & \ell \end{array} - \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & m & & 1 & \\ 2 & - & \ell & - & n \end{array} \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & \ell & & 3 & \\ 1 & - & n & - & k \end{array} = 0$$

$$(15)\quad \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & n & & 1 & \\ 2 & - & \ell & - & m \end{array} \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & m & & 2 & \\ 3 & - & n & - & \ell \end{array} - \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & m & & 2 & \\ 3 & - & \ell & - & n \end{array} \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & \ell & & 1 & \\ 2 & - & n & - & k \end{array} = 0$$

を得る。 (4) より $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, $\{\ell,m,n\} = \{4,5,6\}$ に対して

(16)

$$\begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & 6 & & j & \\ k & - & 4 & - & 5 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & 4 & & j & \\ k & - & 6 & - & 5 \end{array} + \begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & 5 & & j & \\ k & - & 6 & - & 4 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & 6 & & j & \\ k & - & 5 & - & 4 \end{array}$$

$$+ \begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & 6 & & j & \\ k & - & 4 & - & 5 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & 4 & & j & \\ k & - & 6 & - & 5 \end{array} + \alpha^2 = 0$$

(17)

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & n & & 2 & \\ 3 & - & \ell & - & m \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & m & & 3 & \\ 1 & - & \ell & - & n \end{array} + \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & n & & 3 & \\ 1 & - & \ell & - & m \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & m & & 1 & \\ 2 & - & \ell & - & n \end{array}$$

$$+ \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & m & & 1 & \\ 2 & - & \ell & - & n \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & m & & 2 & \\ 3 & - & \ell & - & n \end{array} + \alpha^2 = 0$$

記号

$$\alpha := \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 6 & & 5 & \\ 2 & - & 4 & - & 3 \end{array} = \mathrm{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix} \begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & 6 & & 5 & \\ j & - & 4 & - & k \end{array}$$

$$x_1 := \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 6 & & 2 & \\ 3 & - & 4 & - & 5 \end{array} \qquad x_2 := \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 6 & & 3 & \\ 1 & - & 4 & - & 5 \end{array} \qquad x_3 := \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 6 & & 1 & \\ 2 & - & 4 & - & 5 \end{array}$$

$$y_1 := \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 5 & & 2 & \\ 3 & - & 6 & - & 4 \end{array} \qquad y_2 := \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 5 & & 3 & \\ 1 & - & 6 & - & 4 \end{array} \qquad y_3 := \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 5 & & 1 & \\ 2 & - & 6 & - & 4 \end{array}$$

$$z_1 := \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 4 & & 2 & \\ 3 & - & 5 & - & 6 \end{array} \qquad z_2 := \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 4 & & 3 & \\ 1 & - & 5 & - & 6 \end{array} \qquad z_3 := \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 4 & & 1 & \\ 2 & - & 5 & - & 6 \end{array}$$

$$x'_1 := \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 5 & & 2 & \\ 3 & - & 4 & - & 6 \end{array} \qquad x'_2 := \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 5 & & 3 & \\ 1 & - & 4 & - & 6 \end{array} \qquad x'_3 := \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 5 & & 1 & \\ 2 & - & 4 & - & 6 \end{array}$$

$$y'_1 := \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 4 & & 2 & \\ 3 & - & 6 & - & 5 \end{array} \qquad y'_2 := \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 4 & & 3 & \\ 1 & - & 6 & - & 5 \end{array} \qquad y'_3 := \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 4 & & 1 & \\ 2 & - & 6 & - & 5 \end{array}$$

$$z_1' := \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 6 & & 2 & \\ 3 & - & 5 & - & 4 \end{array} \qquad z_2' := \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 6 & & 3 & \\ 1 & - & 5 & - & 4 \end{array} \qquad z_3' := \begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & 6 & & 1 & \\ 2 & - & 5 & - & 4 \end{array}$$

この記号を用いると 関係式 (10),...,(17) は

$$(18) \qquad x_i - x_i' = y_i - y_i' = z_i - z_i' = \alpha$$

$$(19) \qquad \begin{cases} x_i y_i' + y_i z_i' + z_i x_i' + \alpha^2 = 0 & i = 1,2,3 \\ x_1 x_2' + x_2 x_3' + x_3 x_1' + \alpha^2 = 0 & \\ y_1 y_2' + y_2 y_3' + y_3 y_1' + \alpha^2 = 0 & \\ z_1 z_2' + z_2 z_3' + z_3 z_1' + \alpha^2 = 0 & \end{cases}$$

$$(20) \qquad \begin{cases} x_1 y_2 = y_1' x_2', & y_1 z_2 = z_1' y_2', & z_1 x_2 = x_1' z_2' \\ x_2 y_3 = y_2' x_3', & y_2 z_3 = z_2' y_3', & z_2 x_3 = x_2' z_3' \\ x_3 y_1 = y_3' x_1', & y_3 z_1 = z_3' y_1', & z_3 x_1 = x_3' z_1' \end{cases}$$

これらにより残りのすべての四面体は α, x_1, x_2, y_1 の分母が $Y_{fd}^{\{123\}}$ 上零にならぬ有理式で書ける事が分かる。

一方 $z \in X_{fd}^{\{123\}}$ は

$$(21) \qquad z \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & e \end{pmatrix}$$

と書けて、 f(z) は

$$(22) \qquad \begin{cases} \alpha = abe(d-c), & & \\ x_1 = -bec(a-b), & x_2 = ae\delta, & x_3 = abed, \\ y_1 = b\delta(e-c), & y_2 = ad\delta', & y_3 = abc(d-e), \\ z_1 = be\delta', & z_2 = -ae(d-e)(a-b), & z_3 = abe(e-c), \\ x_1' = -be\delta, & x_2' = aed(a-b), & x_3' = abec, \\ y_1' = -bc\delta', & y_2' = a(d-e)\delta, & y_3' = -abd(e-c), \\ z_1' = -be(a-b)(e-c), & z_2' = -ae\delta', & z_3' = -abe(d-e), \end{cases}$$

と成ることが分かる。ここで

$$\delta = ad-bc, \quad \delta' = \delta - e(a-b)$$

なる略記号を用いた．　これから

$$\frac{x_1 - \alpha}{x_2} = -\frac{b}{a}, \qquad \frac{x_1}{\alpha} = (1 - \frac{b}{a})(\frac{d}{c} - 1)^{-1}, \qquad \frac{y_1}{x_2} = \frac{b}{a}(1 - \frac{c}{e})$$

が分かり補題？より $f: X_{fd}^{\{123\}} \to Y_{fd}^{\{123\}}$ の bijection なる事が示される。■

Second degeneration

$Y_{fd}^{\{ijk\}}$ の境界上の点は α が零か α 以外の座標が零かで二通りに分かれる。

記号

$Y_{yn}^{\{ijk;\ell mn\}} := \{(T) \in Y \mid \Delta(ijk)$ あるいは $\Delta(\ell mn)$ を面にもつ四面体 $= 0$, 他の四面体 $\neq 0$, $\{i,j,k,\ell,m,n\} = \{1,\ldots,6\}\}$

$Y_{ks}^{\{ijk;imn\}} := \{(T) \in Y \mid \Delta(ijk)$ あるいは $\Delta(imn)$ を面にもつ四面体 $= 0$, 他の四面体 $\neq 0$, $m,n \notin \{i,j,k\}\}$

注意　補題？　より上の二通りを考えればよいことが分かる。

補題　$f: X_{yn}^{\{ijk;lmn\}} \to Y_{yn}^{\{ijk;lmn\}}$　bijection

証明　対称群 S_6 の作用があるから一般性を失うことなく $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, $\{l,m,n\} = \{4,5,6\}$ とする。 $Y_{yn}^{\{123;456\}}$ 上の点の座標で零でない物は１８個で

$$x_1 = x_1' \qquad x_2 = x_2' \qquad x_3 = x_3'$$
$$y_1 = y_1' \qquad y_2 = y_2' \qquad y_3 = y_3'$$
$$z_1 = z_1' \qquad z_2 = z_2' \qquad z_3 = z_3'$$

関係式 (20) は

$$x_1:x_2:x_3 = y_1:y_2:y_3 = z_1:z_2:z_3$$
$$x_1:y_1:z_1 = x_2:y_2:z_2 = x_3:y_3:z_3$$

となり、またこの場合 $\alpha = 0$ であるから 関係式 (19) は

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$$
$$x_1y_1 + y_1z_1 + z_1x_1 = 0$$

となる。　一方　$z \in X_{yn}^{\{123;456\}}$ は

$$z \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & b & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & e \end{pmatrix}$$

と表され $f(z)$ は

$$\alpha = 0$$

$$x_1 = -bec(a-b), \quad x_2 = aec(a-b), \quad x_3 = abec$$

$$y_1 = -bc(a-b)(c-e), \quad y_2 = ac(a-b)(c-e), \quad y_3 = abc(c-e)$$

$$z_1 = be(a-b)(c-e), \quad z_2 = -ae(a-b)(c-e), \quad z_3 = -abe(c-e)$$

となる。　このことより補題は示される。　■

<u>補題</u>　$f: X_{ks}^{\{ijk;imn\}} \to Y_{ks}^{\{ijk;imn\}}$　bijection

<u>証明</u>　対称群 S_6 の作用があるから一般性を失うことなく $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, $\{i,m,n\} = \{1,4,6\}$ とする。 $Y_{ks}^{\{123;146\}}$ 上の点の座標は α と

$$\begin{array}{lll} x_1 & x_2 = \alpha & x_3 = 0 \\ y_1 & y_2 = 0 & y_3 = \alpha \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1' & x_2' = 0 & x_3' = -\alpha \\ y_1' & y_2' = -\alpha & y_3' = 0 \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{array}$$

ここで y_2, x_2', x_3, y_3' 以外のものは零でない。　関係式は (18), (19), (20) において $y_2 = x_2' = x_3 = y_3' = 0$ とおいたもの。具体形は省略。

一方 $z \in X_{ks}^{\{123;146\}}$ は (21) において $d = 0$ としたものであり、 $f(z)$ は (22) において $d = 0$ としたものである。 $f: X_{ks}^{\{123;146\}} \to Y_{ks}^{\{123;146\}}$ が bijection であることは見やすい。

<u>Third degeneration</u>

$Y_{ks}^{\{ijk;imn\}}$ の境界上の点は α が零か α 以外の座標が零かで二通りに分かれる。

$Y_{yn}^{\{ijk;\ell mn\}}$ の境界上の点は $Y_{ks}^{\{ijk;imn\}}$ の境界上の点で α が零のものに一致す

る。 今話を決めるために $Y_{ks}^{\{123;146\}}$ の点で $\alpha = 0$ のときを考えてみよう。

座標

$$x_1 = x_1' \qquad x_2 = x_2' = 0 \qquad x_3 = x_3' = 0$$
$$y_1 = y_1' \qquad y_2 = y_2' = 0 \qquad y_3 = y_3' = 0$$
$$z_1 = z_1' \qquad z_2 = z_2' \qquad z_3 = z_3'$$

の間には (19), (20) より

$$x_1y_1 + y_1z_1 + z_1x_1 = 0$$
$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$$
$$x_1z_2 = y_1z_2 = x_1z_3 = y_1z_3 = 0$$

が成立するので、 $z_2 = z_3 = 0$ あるいは $x_1 = x_2 = 0$ である。

$$Y_{ko}^{\{ij\}} = \{(T) \in Y \mid \text{二辺 } i,j \text{ が頂点を共有している四面体} = 0,\ \text{他の四面体} \neq 0\}$$

次に $Y_{ks}^{\{123;146\}}$ の境界の点で $\alpha \neq 0$ のときを考える。

記号 $\{i,j,k,\ell,m,n\} = \{1,2,3,4,5,6\}$ に対して

$$Y_{ss}^{\{ijk;k\ell m;mni\}} := \{(T) \in Y \mid \Delta(ijk),\ \Delta(k\ell m),\ \text{あるいは } \Delta(mni) \text{ を面にもつ 四面体} = 0,\ \text{他の四面体} \neq 0\}$$

補題 $f\colon X_{ko}^{\{ij\}} \to Y_{ko}^{\{ij\}}$ bijection

証明 対称群 S_6 の作用があるから一般性を失うことなく $\{i,j\} = \{2,3\}$ とする。 $Y_{ko}^{\{23\}}$ の点の座標は、零以外のものは

$$x_1,\ y_1,\ z_1 \qquad (x_1y_1 + y_1z_1 + z_1x_1 = 0)$$

のみ。 一方 $z \in X_{ko}^{\{23\}}$ は (21) において $\alpha = 0$ とおいたものであり

f(z) は

$$x_1 = b^2ec,\quad y_1 = b^2c(c-e),\quad z_1 = -b^2c(c-e)$$

となるから 補題はしめされる。 ■

補題 $f\colon X_{ss}^{\{ijk;k\ell m,mni\}} \to Y_{ss}^{\{ijk;k\ell m;mni\}}$ bijection

証明 対称群 S_6 の作用があるから一般性を失うことなく $(ijk\ell mn) =$

(123564) と仮定してよい。

$Y_{ss}^{\{123;356;641\}}$ 上の点の座標は α と

$$
\begin{array}{lll}
x_1 = \alpha & x_2 = \alpha & x_3 = 0 \\
y_1 & y_2 = 0 & y_3 = \alpha \\
z_1 = 0 & z_2 = \alpha & z_3 \\
x_1' & x_2' = 0 & x_3' = -\alpha \\
y_1' = 0 & y_2' = -\alpha & y_3' = 0 \\
z_1' = -\alpha & z_2' = 0 & z_3'
\end{array}
$$

ここで z_1, y_1', y_2, x_2', z_2', x_3, y_3' 以外のものは零でない。 関係式は (18), (19), (20) において $z_1 = y_1' = y_2 = x_2' = z_2' = x_3 = y_3' = 0$ としたもの。具体形は省略。

一方 $z \in X_{ss}^{\{123;356;641\}}$ は (21) において $d = be-bc-ae = 0$ としたものであり、 $f(z)$ は (22) において $d = \delta' = 0$ としたものである。 ここで $f: X_{ss}^{\{ijk;k\ell m,mni\}} \to Y_{ss}^{\{ijk;k\ell m;mni\}}$ が bijection であることは見やすい。■

<u>Fourth degeneration</u>

$Y_{ss}^{\{ijk;k\ell m;mni\}}$ の境界上の点は α が零か α 以外の座標が零かで二通りに分かれる。$Y_{ko}^{\{ij\}}$ の境界上の点は $Y_{ss}^{\{ijk;k\ell m;mni\}}$ の境界上の点で α が零のものに一致する。 今話を決めるために $Y_{ss}^{\{123;356;641\}}$ の境界の点で $\alpha = 0$ のときを考えてみよう。 座標は

$$
\begin{array}{lll}
x_1 = x_1' \fallingdotseq 0 & x_2 = x_2' = 0 & x_3 = x_3' = 0 \\
y_1 = y_1' = 0 & y_2 = y_2' = 0 & y_3 = y_3' = 0 \\
z_1 = z_1' = 0 & z_2 = z_2' = 0 & z_3 = z_3' = 0
\end{array}
$$

となる。

<u>記号</u>

$Y_{mk}^{\{ij;k\ell;mn\}}$:= { (T) ∈ Y | 相対する二辺が i,j; k,ℓ; m,n なる四面体 $\fallingdotseq 0$, 他の四面体 $= 0$ }

<u>補題</u>　f: $X_{mk}^{\{ij;k\ell;mn\}} \to Y_{mk}^{\{ij;k\ell;mn\}}$ bijection

<u>証明</u>　対称群 S_6 の作用があるから一般性を失うことなく $(ijk\ell mn) = (123456)$ とする。 $Y_{mk}^{\{12;34;56\}}$ の点の座標は、零以外のものは $x_3 = x_3'$ のみである。 一方 $z \in X_{mk}^{\{12;34;56\}}$ は

$$z \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と表され、f(z) の座標が $x_3 = x_3'$ 以外すべて零なることは見やすい。 ■

次に $Y_{ss}^{\{123;356;641\}}$ の境界の点で $\alpha \fallingdotseq 0$ のときを考える。

<u>記号</u>　$\{i,j,k,\ell,m,n\} = \{1,2,3,4,5,6\}$ に対して

$$Y_{cv}^{\{ijk;k\ell m;mni;j\ell n\}} := \{(T) \in Y \mid \Delta(ijk),\ \Delta(k\ell m),\ \Delta(mni),$$
$$\text{あるいは } \Delta(j\ell n) \text{ を面にもつ 四面体} = 0,\ \text{他の四面体} \fallingdotseq 0\}$$

<u>補題</u>　f: $X_{cv}^{\{ijk;k\ell m;mni;j\ell n\}} \to Y_{cv}^{\{ijk;k\ell m;mni;j\ell n\}}$ bijectioon

<u>証明</u>　対称群 S_6 の作用があるから一般性を失うことなく $(ijk\ell mn) = (123564)$ とする。

$Y_{cv}^{\{123;356;641;254\}}$ 上の点の座標は α と

$x_1 = \alpha$	$x_2 = \alpha$	$x_3 = 0$
$y_1 = \alpha$	$y_2 = 0$	$y_3 = \alpha$
$z_1 = 0$	$z_2 = \alpha$	$z_3 = \alpha$
$x_1' = 0$	$x_2' = 0$	$x_3' = -\alpha$
$y_1' = 0$	$y_2' = -\alpha$	$y_3' = 0$
$z_1' = -\alpha$	$z_2' = 0$	$z_3' = 0$

一方 $z \in X_{cv}^{\{123;356;641;254\}}$ は

$$z \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と書け、f(z) は $Y_{cv}^{\{123;356;641;254\}}$ と一致することが解る。 ■

4）　結論

命題　各 Y_{gn}, $Y_{fd}^{\{ijk\}}$, $Y_{yn}^{\{ijk;\ell mn\}}$, $Y_{ks}^{\{ijk:imn\}}$, $Y_{ko}^{\{ij\}}$, $Y_{ss}^{\{ijk;k\ell m;mni\}}$, $Y_{mk}^{\{ij;k\ell;mn\}}$, $Y_{cv}^{\{ijk;k\ell m;mni;j\ell n\}}$ は irreducible non-singular affine variety of dimension 4, 3, 2, 2, 1, 1, 0, 0, respectively.

証明　補題　　　の証明から明らか。

記号

$$Y_{fd} := \cup\, Y_{fd}^{\{ijk\}} \quad 20\text{ケ}$$

$Y_{yn} := \cup\, Y_{yn}^{\{ijk;\ell mn\}}$ 10 ケ　　　$Y_{ks} := \cup\, Y_{ks}^{\{ijk:imn\}}$ 90 ケ

$Y_{ko} := \cup\, Y_{ko}^{\{ij\}}$ 15 ケ　　　$Y_{ss} := \cup\, Y_{ss}^{\{ijk;k\ell m;mni\}}$ 120 ケ

$Y_{mk} := \cup\, Y_{mk}^{\{ij;k\ell;mn\}}$ 15 ケ　　　$Y_{cv} := \cup\, Y_{cv}^{\{ijk;k\ell m;mni;j\ell n\}}$ 30 ケ

命題　射影多様体 Y は以下の stratification を持つ：

$$Y = Y_{gn} \cup Y_{fd} \cup Y_{yn} \cup y_{ks} \cup Y_{ko} \cup Y_{ss} \cup Y_{mk} \cup Y_{cv}$$

$f: \overline{X} \to Y$ は X, Y の stratification までこめて一対一対応。

証明　補題　　　の証明から明らか。

命題　射影多様体 Y は $Y_{gn} \cup Y_{fd} \cup Y_{yn} \cup y_{ks} \cup Y_{ss} \cup Y_{cv}$ 上 non-singular

命題　conj は各 stratum に働く。 Stratum Y_{yn}, Y_{ko}, Y_{mk} 上 identity.

stratum Y_{fd}, Y_{ks}, Y_{ss}, Y_{cv} 上 fixed point free.

証明　補題　　　の証明から明らか。

定義　YQ を conj の fixed point set とする。 また

$$\overline{XQ} := f^{-1}(YQ)$$

$$XQ := X \cap \overline{XQ}$$

と置く。

系 $YQ = (Y_{gn} \cap YQ) \cup Y_{yn} \cup Y_{ko} \cup Y_{mk}$

$\overline{XQ} = XQ \cup X_{yn} \cup Y_{ko} \cup Y_{mk}$

注意 $\overline{XQ}$ は射影平面上の六点が二次曲線上に乗っている配置からなる。