数理解析研究所講究録
第742巻 1991年 30-43

ヒルベルト・モジュラ軌道体の一意化微分方程式の例

佐藤 猛 （東京大・理） Takeshi SATO

最近 [SY], [St] において、ヒルベルト・モジュラ軌道体の一意化微分方程式が数個、得られています。ここでは、それらを求めるための手順を示し、具体例をいくつか紹介したいと思います。

★

軌道体の一意化微分方程式

言葉の説明をしておきます。X を $P_N(C)$ に埋め込まれた単連結な複素多様体とし、 Γ を X に作用する不連続群で $P_N(C)$ の自己同型に拡張できる元からできているとします。商空間 M＝X／Γ 上には軌道体の構造が入ります、すなわち分岐被覆 π : X→M の分岐軌道の成分を D_j、それに沿った分岐指数 b_j としたとき分岐因子 $D = \Sigma b_j D_j$ が定まります。また X／Γ のコンパクト化には、付け加えた因子に沿った分岐指数を無限大と定義することにより、軌道体の構造が入ります。π の多価逆射像 ϕ を軌道体の展開射像と言います。

階数（一次独立な解の個数）が N＋1 の M 上の線型微分方程式 (EQ)を考えます。$z_0, z_1, \cdots, z_N$ をその一次独立な解とします。このとき M 上の点 x に対し $[z_0(x):z_1(x):\cdots:z_N(x)]$ を対応させることにより、M から P(C) への多価射像（射影解）が定まります。これが軌道体 (M,D) の展開射像を与えるとき、(EQ) を (M,D) の一意化微分方程式といいます。

たとえば M がリーマン球面、分岐因子の成分が 0，1，∞ のとき、一意化微分方程式はガウスの超幾何微分方程式 $E(\alpha, \beta, \gamma)$ で与えられます。ただし 0，1，∞ に沿った分岐指数をそれぞれ b_0，b_1，b_∞

としたとき、$1/b_0=|1-\gamma|, 1/b_1=|\gamma-\alpha-\beta|, 1/b_\infty=|\alpha-\beta|$ です。しかし軌道体が与えられたとき、その一意化微分方程式を求めるための一般的な方法が知られているわけではありません。

以下では軌道体は H×H で一意化され、($P_2(C)$, 2D) と表せるものとします。目標は与えられた軌道体の一意化微分方程式を求めることです。

★

H×H は $P_1(C)\times P_1(C)$ に自然に埋め込まれますが、$P_1(C)\times P_1(C)$ は $P_3(C)$ 内の非特異二次曲面に同型です。そしてこれらの埋め込みはそれぞれの自己同型群の間に次の包含関係をひきおこします。

$$\mathrm{Aut}(H\times H)\subset \mathrm{Aut}(P_1(C)\times P_1(C))\subset \mathrm{Aut}(P_3(C)).$$

したがって我々が考察する軌道体の展開射像は $P_3(C)$ に値をとります。一意化微分方程式は二変数階数四になりますから、次の微分方程式を考えます。

$$(\mathrm{EQ})\qquad \begin{aligned} Z_{xx} &= \ell Z_{xy} + aZ_x + bZ_y + pZ \\ Z_{yy} &= mZ_{xy} + cZ_x + dZ_y + qZ \end{aligned}$$

$\ell, m, a, b, c, d, p, q$ は x と y の関数です。z を (EQ) の一次独立な４つの解を並べたベクトルとしたとき、正規化因子 θ を次の式で定義しておきます。

$$e^{2\theta} = \det(z, z_x, z_y, z_{xy}).$$

★

正則共形構造 (ℓ, m の決定)

微分方程式(EQ)より決まるテンソル $\ell dx^2+2dxdy+mdy^2$ の共形類は変数変換 $\bar{x}=\bar{x}(x,y), \bar{y}=\bar{y}(x,y), \bar{z}=\lambda(x,y)z$ で不変です。これを正則共形構造

と呼びます。

軌道体上の局所座標として H×H の自然な座標 $u=z_1$, $v=z_2$ を下に落としたものをとれば、一意化微分方程式は次の自明なものになります。

(EQ0) $$Z_{uu}=0, \quad Z_{vv}=0.$$

(EQ0)の正則共形構造は 2dudv です。2dudv は Aut(H×H) で不変ですから、軌道体 ($P_2(C)$,2D) 上に落ちます。したがって 2dudv を $P_2(C)$ の非斉次座標で表示することができ、一意化微分方程式の係数 ℓ, m が決定されます。

軌道体上の共形構造を $Pdx^2+2Qdxdy+Rdy^2$ (ただし P、Q、R は (x,y) 平面上で pole をもたない)と表わしておきます。

2dudv は H×H 上で非退化ですが軌道体に落とすと分岐曲線 D に沿って退化します。このとき次が成り立っています。([KN])

(Ⅰ) P, Q, R は ((Dの次数)/2 + 1)次の多項式

(Ⅱ) $D=\{Q^2-PR=0\}$

(Ⅲ) $PD_y-QD_x \equiv QD_y-RD_x \equiv 0 \pmod D$

これらの条件から共形構造が決定されます。実際の計算例では群不変性を考慮に入れ、必要な場合は計算機を用ました。

★

二次条件 (a,b,c,d の決定)

射影空間に埋め込められた超曲面片 S が二次超曲面と同値(射影変換で写りあう)であるための必要十分条件は S のフビニーピックの3次不変量(定義は省略します。[Ss]を見て下さい。)が消えていることです。方程式(EQ)の射影解によって埋め込まれる曲面片のフビニーピックの3次不変量は ℓ,m,…,p,q とそれらの微分で書くことができ、それから次の定理がしたがいます。

定理 [SY] (EQ)の射影解がある二次曲面に値をとるための必要十分

条件は次の式が成立することである：

$$a = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}\xi + \theta\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\log(\ell) - \frac{1}{4}\xi + \theta\right)$$

$$b = \frac{\ell}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\log(\ell) - \frac{3}{4}\xi - \theta\right)$$

$$c = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\log(m) - \frac{3}{4}\xi - \theta\right)$$

$$d = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4}\xi + \theta\right) - \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\log(m) - \frac{1}{4}\xi + \theta\right).$$

したがって正規化因子を固定すれば l,m から a,b,c,d が決定されます。p,q は定まりません。しかしSの次元が３以上の場合は、共形構造が与えられているとき、二次条件からすべての係数が決定されます。

★

積分可能条件　(p,q の決定)

正規化因子 θ が固定され l,m,a,b,c,d が定理 のように定められていれば、微分方程式(EQ)の積分可能条件（階数４）は次で与えられます。

$$\text{(IC)} \qquad \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

ここで D_{ij}, R_i はそれぞれ l,m,a,b,c,d より定まる一階の微分作用素および関数です。具体的な形は [SY] を見てください。

方程式(IC)を p,q について解くためには、 p,q の極の評価や(EQ)の群不変性を使うのですが、この作業は煩雑な計算を要し、またテクニカルでもあるので省略します。最終的には計算機を使い未定係数法で解きました。

★

具体例を挙げておくことにします。以下に挙げる６つの例は、ほぼ同じ様相を示していますから、共通した状況については先に述べておきます。

Ｋ を実二次体、ｏ をその整数環とします。Ｇ は PSL(2,o) またはその拡大、Γ は Ｇ の部分群とします。Γ(Ｉ) (resp. Γ^+(Ｉ)) は ｏ のイデアル Ｉ に対する PSL(2,o) (resp. Ｇ) の主合同部分群を表します。Ｇ は Ｘ（Ｘ は Ｈ×Ｈ または Ｈ×Ｈ˜、ただし Ｈ は上半平面、Ｈ˜ は下半平面）に次のように作用します。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G : (z1,\ z2) \mapsto \left(\frac{a z1 + b}{c z1 + d},\ \frac{a' z2 + b'}{c' z2 + d'} \right).$$

また Ｘ 上の変換 τ を

$\tau(z1,\ z2) = (z2,\ z1)$ 　（Ｘ＝Ｈ×Ｈの場合）

$\tau(z1,\ z2) = (-z2,\ -z1)$ 　（Ｘ＝Ｈ×Ｈ˜の場合）

で定義します。Ｘ/＜Γ，τ＞ は ｋ個の点（因子ではなくて点です）を付け加えることにより（例６の場合にはさらに２１個の（－２）－曲線をブローダウンします）、P_2（Ｃ） と同型になります。Γ の作用は固定点を持ちませんが、指数２の元 τ は Ｘ の対角成分を固定点に持ちます。したがって射影 Ｘ →Ｐ（Ｃ） はある曲線 Ｄ に沿った分岐指数 ２ の分岐被覆になっています。我々は軌道体（P_2（Ｃ），2D）を問題にます。この上の共形構造を P_2（Ｃ）の非斉次座標 ｘ，ｙ を用いて P(dx)(dx) + 2Q(dx)(dy) + R(dy)(dy)と書くことにします。これらは Ｇ'＝Ｇ/Γ で不変です。ここで Ｇ' は S_i（ｉ次の対称群）、A_i（ｉ次の交代群）、G_{168}（位数１６８の単純群）のどれかです。

P_2（Ｃ）/Ｇ' は射影平面と同型でありませんが双有理同値となりま

す。一意化微分方程式を x,y で書くのは大変なので $P_2(C)/G'\sim P_2(C)$ の非斉次座標 X,Y で書くことにします。射影

$\delta : P_2(C) \rightarrow P_2(C)/G' \sim P_2(C)$ は次で与えられます。ただし、ここでは記号を乱用して、(x, y, z) および (X, Y, Z) でそれぞれの斉次座標を表しています。

① $G' = S_4$ の場合 $\delta(x:y:z)=(B^2, AC, A^3)$

ただし $A=x^2+y^2+2z^2$, $B=(x^2-y^2)z$, $C=(z^2-x^2)(z^2-y^2)$.

② $G' = A_5$ の場合 $\delta(x:y:z)=(A^2B, C, A^5)$

ただし $A=z^2+xy$, $B=8xyz^4-2x^2y^2z^2+x^3y^3-z(x^5+y^5)$, $C=6x^5y^5+320x^2y^2z^6$
$-160x^3y^3z^4+20x^4y^4z^2-4z(x^5+y^5)(32z^4-20x\ yz^2+5x^2y^2)+x^{10}+y^{10}$

③ $G' = S_3$ の場合 $\delta(x:y:z)=(4\sigma, 4\sigma, \sigma)$

ただし $\sigma_1=x+y+z$, $=xy+yz+zx$, $\sigma_3=xyz$

④ $G' = G_{168}$ の場合 $\delta(x:y:z)=(8B^3, -56A^3B+4B^3+AC, 32A^3B)$

ただし $A=x^3y+y^3z+z^3x$, $B=5x^2y^2z^2-(x^5z+z^5y+y^5x)$

$$C = \frac{1}{9}\det\begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} & B_x \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} & B_y \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} & B_z \\ B_x & B_y & B_z & 0 \end{pmatrix}$$

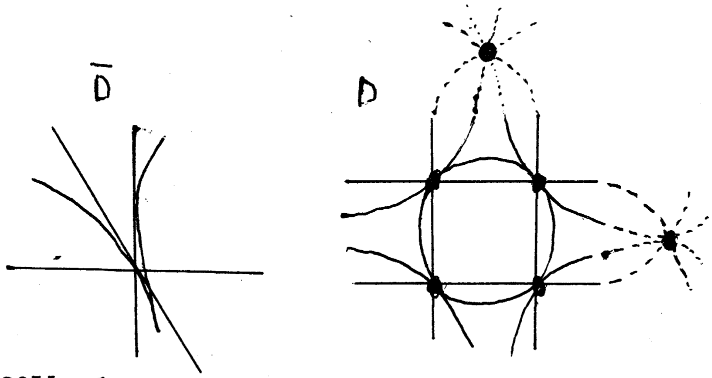
δ はブローアップを含んでいるので、$P_2(C)/G'\sim P_2(C)$ の上の軌道体構造は分岐指数∞の分岐曲線を持ちます。以下に挙げておいた例1から例4は ($P_2(C), 2\overrightarrow{D}+\infty L$) の、例5と例6は ($P_2(C), 2D_1+\infty(D_2+L)$) の一意化微分方程式になっています。Lは無限遠直線です。

分岐曲線がどのような配置になっているかを図に示しておきます。●はコンパクト化の際に付け加えられた点です

Example 1

$$K = Q(\sqrt{2})$$
$$\Gamma =< \Gamma(2), \gamma >, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$G = PSL(2, o), \quad G/\Gamma = S_4$$
$$X = H \times H, \quad k = 6$$
$$D = (1-x^2)(1-y^2)(1-x^2y^2)(2-x^2-y^2)$$
$$= C(AC+B^2)$$
$$\overline{D} = XY(X+Y)\{(54X+36Y-1)^2-(12Y+1)^3\}$$

$$P = (1-y^2)(2-y^2-x^2y^2)$$
$$Q = -xy(1-x^2)(1-y^2)$$
$$R = (1-x^2)(2-x^2-x^2y^2)$$



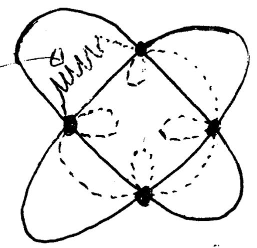
$$e^{2\theta} = \frac{36X+20Y-1}{X^{\frac{1}{2}}(X+Y)^{\frac{7}{2}}\{(54X+36Y-1)^2-(12Y+1)^3\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$l = \frac{-24XY+X-8Y^2+2Y}{X(36X+20Y-1)}$$
$$m = \frac{-54X^2-42XY+2X-4Y^2+Y}{Y(36X+20Y-1)}$$
$$a = \frac{-144X^2Y-2X^2-156XY^2-28Y^3+Y^2}{2XY(X+Y)(36X+20Y-1)}$$
$$b = \frac{-48XY+2X-32Y^2+3Y}{2X(X+Y)(36X+20Y-1)}$$
$$c = \frac{108X^3+96X^2Y-4X^2-3XY-4Y^3}{2Y^2(X+Y)(36X+20Y-1)}$$
$$d = \frac{-42XY+X-26Y^2+2Y}{2Y(X+Y)(36X+20Y-1)}$$
$$p = \frac{-1}{XY(36X+20Y-1)}, \qquad q = \frac{-1}{2Y^2(36X+20Y-1)}.$$

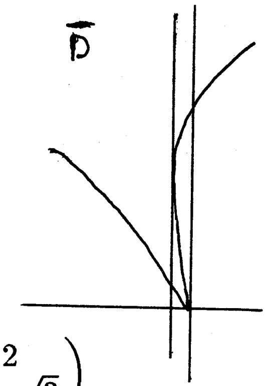
Example 2

D

(2,3)-cusps



$\overline{D}$



$K = Q(\sqrt{3})$

$\Gamma = \Gamma(\sqrt{3})$

$G =< PSL(2,o), \delta >, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 2 \\ -2 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$G/\Gamma = S_4$

$X = H \times H, \qquad k = 4$

$$D = (4 + \rho(x-y)^2 + \rho^2(x+y)^2)(4 + \rho(x+y)^2 + \rho^2(x-y)^2)(2x^6 + 2y^6 + 6x^2y^4 + 6x^4y^2 - 15x^4 - 15y^4 + 24x^2 + 24y^2 + 78x^2y^2 + 16)$$
$$= (12C + A^2)(27B^2 - 2A^3)$$

$$\overline{D} = X(12Y+1)(27X-2)\{(54X+36Y-1)^2 - (12Y+1)^3\}$$

ρ is a primitive cubic root of unity

$$P = 2x^4y^2 + x^4 + 4x^2y^4 + 22x^2y^2 - 8x^2 + 2y^6 - 15y^4 + 24y^2 + 16$$
$$Q = -2xy(x^2+y^2+2)(x^2+y^2-4)$$
$$R = 2x^2y^4 + y^4 + 4x^4y^2 + 22x^2y^2 - 8y^2 + 2x^6 - 15x^4 + 24x^2 + 16$$

$$e^{2\theta} = \frac{72X - 144Y^2 + 40Y - 1}{X^{\frac{1}{2}}(32X - 14Y^2 + 8Y - 1)^{\frac{1}{2}}\{(54X+36Y-1)^2 - (12Y+1)^3\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$l = \frac{-18XY - 3X + 4Y^2 - Y}{X(27X-2)}, \qquad m = \frac{-18X - 4Y + 1}{12Y+1}$$

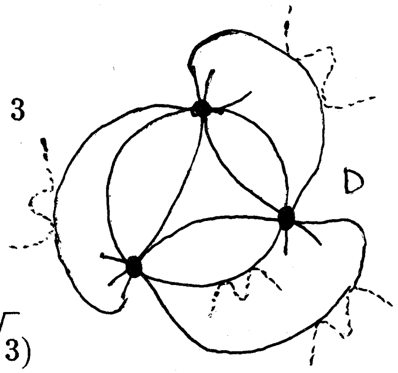
$$a = \frac{-648XY - 45X + 24Y^2 + 34Y + 2}{2X(27X-2)(12Y+1)}, \qquad c = \frac{54X - 12Y - 5}{(12Y+1)^2}$$

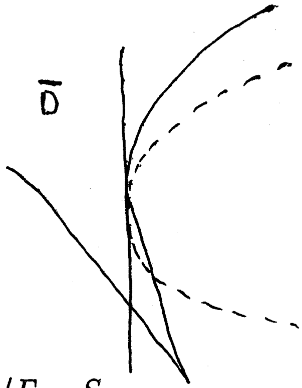
$$b = \frac{-3(162XY + 27X + 36Y^2 - 33Y - 4)}{4X(27X-2)^2}, \qquad d = \frac{-9(54X - 12Y - 5)}{4(27X-2)(12Y+1)}$$

$$p = \frac{9(972XY + 135X - 144Y^2 - 204Y - 20)}{16X(27X-2)^2(12Y+1)}$$

$$q = \frac{-27(54X - 12Y - 5)}{4(27X-2)(12Y+1)^2}.$$

Example 3





$$K = Q(\sqrt{3})$$

$$\Gamma =< \Gamma(2), \gamma >, \quad G =< PSL(2,o), \delta >, \quad G/\Gamma = S_4$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 2 \\ -2 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$X = H \times H^{-}, \quad k = 3$$

$$D = (x^2+4x-y^2)(x^2-4x-y^2)(x^2+4y-y^2)(x^2-4y-y^2)(x^2 \\ \quad +y^2+2) = (32AB^2-16C^2+8A^2C-A^4)A$$

$$\overline{D} = X(32X-16Y^2+8Y-1)\{(54X+36Y-1)^2-(12Y+1)^3\}$$

$$P = y^6-2x^2y^4-14y^4+x^4y^2-28x^2y^2-32y^2-6x^4$$

$$Q = -xy(x^4+y^4-24x^2-24y^2-2x^2y^2-64)$$

$$R = x^6-2x^4y^2-14x^4+x^2y^4-28x^2y^2-32x^2-6y^4$$

$$e^{2\theta} = \frac{72X-144Y^2+40Y-1}{X^{\frac{1}{2}}(32X-14Y^2+8Y-1)^{\frac{1}{2}}\{(54X+36Y-1)^2-(12Y+1)^3\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$l = \frac{-84XY+5X+6Y(4Y-1)^2}{X(72X-144Y^2+40Y-1)}, \quad m = \frac{216XY+42X-(4Y-1)^2}{72X-144Y^2+40Y-1}$$

$$a = \frac{1}{2}(-4224X^2+8064XY^2-2752XY+184X \\ -3840Y^4+2944Y^3-768Y^2+72Y-1)X^{-1} \\ (72X-144Y^2+40Y-1)^{-1}(32X-16Y^2+8Y-1)^{-1}$$

$$b = \frac{-1344XY+80X-192Y^3+16Y^2+28Y-5)}{2X(72X-144Y^2+40Y-1)(32X-16Y^2+8Y-1)}$$

$$c = \frac{2(1728X^2+128XY-32X+64Y^3-48Y^2+12Y-1)}{(72X-144Y^2+40Y-1)(32X-16Y^2+8Y-1)}$$

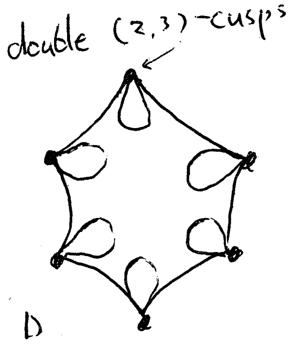
$$d = \frac{5184XY-528X-1728Y^3+1168Y^2-260Y+19}{(72X-144Y^2+40Y-1)(32X-16Y^2+8Y-1)}$$

$$p = \frac{6(12Y+1)(4Y-1)}{X(72X-144Y^2+40Y-1)(32X-16Y^2+8Y-1)}$$

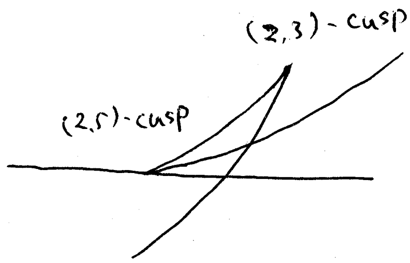
$$q = \frac{-48(18X+4Y-1)}{(72X-144Y^2+40Y-1)(32X-16Y^2+8Y-1)}.$$

Example 4

$$K = Q(\sqrt{5})$$
$$\Gamma = \Gamma(\sqrt{5}), \quad G = PSL(2, o), \quad G/\Gamma = A_5$$
$$X = H \times H, \quad k = 6$$
$$D = 320x^2y^2 - 160x^3y^3 + 20x^4y^4 + 6x^5y^5$$
$$\qquad - 4(x^5 + y^5)(32 - 20xy + 5x^2y^2) + x^{10} + y^{10}$$
$$\overline{D} = Y(1728X^5 - 720X^3Y + 80XY^2 - 64(5X^2 - Y)^2 - Y^3)$$



D



$\overline{D}$

$$P = 2(8y^2 - 6xy^3 + x^2y^4 - x^4y + 4x^3)$$
$$Q = -24xy + 10x^2y^2 - 2x^3y^3 + x^5 + y^5$$
$$R = 2(8x^2 - 6x^3y + x^4y^2 - xy^4 + 4y^3)$$

$$e^{2\theta} = \frac{Y^{\frac{1}{2}}(32X - 36Y^2 + Y)}{\{1728X^5 - 720X^3Y + 80XY^2 - 64(5X^2 - Y)^2 - Y^3\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$l = \frac{-20(4X^2 + 3XY - 4Y)}{36X^2 - 32X - Y}, \qquad m = \frac{-2(54X^3 - 50X^2 - 3XY + 2Y)}{5Y(36X^2 - 32X - Y)}$$
$$a = \frac{5(4X^2 - 9XY + 4Y)}{Y(36X^2 - 32X - Y)}, \qquad c = \frac{54X^3 - 50X^2 + 3XY - 2Y}{10Y^2(36X^2 - 32X - Y)}$$
$$b = \frac{-10(8X + 3Y)}{36X^2 - 32X - Y}, \qquad d = \frac{-216X^2 + 200X + 9Y}{10Y(36X^2 - 32X - Y)}$$
$$p = \frac{40X + 9Y}{2Y(36X^2 - 32X - Y)}, \qquad q = \frac{-40X^2 + 400X - 3Y}{40Y^2(36X^2 - 32X - Y)}.$$

Example 5

$$K = Q(\sqrt{11})$$
$$\Gamma = \Gamma(p_2), \quad p_2 \quad \textit{is the ideal of norm } 2$$
$$G = PSL(2, o), \quad G/\Gamma = S_3$$
$$X = H \times H^-, \quad k = 3$$
$$D = \sigma_1\sigma_3(\sigma_2{}^6 - 4\sigma_1\sigma_2{}^4\sigma_3 + 8\sigma_2{}^3\sigma_3{}^2 + 16\sigma_3{}^4)$$
$$D_1 = X(X - Y^2 - 2Y - 1)\{(9X - 27Y - 2)^2 - 4(1 - 3X)^3\}$$
$$D_2 = Y.$$

$$P = -y(x^3y^4 - 2x^3y^2 + x^3 - x^2y^4 + x^2y^2 - x^2y + 3xy^4 - 6xy^3 + 3xy^2 - 11y^4 - 11y^3)$$
$$Q = xy(5x^3y^2 + 5x^2y^3 - x^3y - xy^3 - 5x^3 - 5y^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 6x^2 - 6y^2 + x^3y^3 + 4x^2y^2 + 4xy)$$
$$R = -x(y^3x^4 - 2y^3x^2 + y^3 - y^2x^4 + y^2x^2 - y^2x + 3yx^4 - 6yx^3 + 3yx^2 - 11x^4 - 11x^3)$$

$$e^{2\theta} = \frac{X^{\frac{1}{2}}(X^2 + 2XY - 5X + 9Y^2 + 2Y + 4)}{\{(9X - 27Y - 2)^2 - 4(1 - 3X)^3\}^{\frac{3}{2}}(X - Y^2 - 2Y - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$l = -\frac{Y(X^2 + 3XY - 19X + 27Y^2 + 43Y + 16)}{2X(X^2 + 2XY - 5X + 9Y^2 + 2Y + 4)}$$
$$m = -\frac{2(X^3 + X^2Y - 2X^2 + 3XY^2 - 12XY + X + 11Y^2 + 11Y)}{Y(X^2 + 2XY - 5X + 9Y^2 + 2Y + 4)}$$

$$a = -\frac{5X^2 - 6XY^2 - 5XY - 14X - 9Y^3 - 14Y^2 + 15Y + 9}{4(X^2 + 2XY - 5X + 9Y^2 + 2Y + 4)(X - Y^2 - 2Y - 1)}$$

$$b = -\frac{1}{8}Y(2X^3 - 3X^2Y^2 - 6X^2Y - 3X^2 - 3XY^3 - 41XY^2 - 51XY - 13X + 27Y^4 + 97Y^3 + 129Y^2 + 75Y + 16)X^{-2} (X^2 + 2XY - 5X + 9Y^2 + 2Y + 4)^{-1}(X - Y^2 - 2Y - 1)^{-1}$$

$$c = X(X^3 - 2X^2Y^2 - 3X^2Y - 3X^2 - XY^3 + 6XY + 3X + 15Y^3 + 2Y^2 - 3Y - 1)Y^{-2}(X^2 + 2XY - 5X + 9Y^2 + 2Y + 4)^{-1}(X - Y^2 - 2Y - 1)^{-1}$$

$$d = -\frac{1}{2}(X^3Y^2 + 4X^3Y - X^3 - X^2Y^3 + 10X^2Y^2 + 7X^2Y + 2X^2 - 9XY^4 - 38XY^3 - 50XY^2 - 22XY - X + 11Y(Y+1)^3)X^{-1} Y^{-1}(X^2 + 2XY - 5X + 9Y^2 + 2Y + 4)^{-1}(X - Y^2 - 2Y - 1)^{-1}$$

$$p = \frac{1}{16}(2X^3 - 3X^2Y^2 - 6X^2Y - 5X^2 - 3XY^3 - 84XY^2 - 19XY - 4X + 27Y^4 + 60Y^3 + 51Y^2 + 30Y + 12)X^{-2} (X^2 + 2XY - 5X + 9Y^2 + 2Y + 4)^{-1}(X - Y^2 - 2Y - 1)^{-1}$$

$$q = -\frac{1}{4}(X^3 - 2X^2Y^2 - 4X^2Y - 5X^2 - XY^3 - 12XY^2 + 13XY + 7X + 23Y^3 + 17Y^2 - 9Y - 3)Y^{-2}(X^2 + 2XY - 5X + 9Y^2 + 2Y + 4)^{-1}(X - Y^2 - 2Y - 1)^{-1}.$$

Example 6

$$K = Q(\sqrt{7})$$
$$\Gamma = \Gamma^+(\sqrt{7})$$
$$G = \{g \in GL(2, o); det(g) \textit{ is a totally positive unit}\}/\{\alpha I; \alpha \textit{ is a unit}\}$$
$$G/\Gamma = G_{168}, \quad X = H \times H, \quad k = 24$$
$$D = A(4A^3 + B^2)(-56A^3B + 4B^3 + AC)$$
$$D_1 = (X+1)Y(2X^4 - 12X^3Y + 8X^3 + 24X^2Y^2 - 23X^2Y + 12X^2 - 16XY^3 - 40XY^2 - 10XY + 8X + Y + 2)$$
$$D_2 = X$$

$$P = -3x^{14}y^2 - 14x^{13}y^5 + 14x^{12}y + 84x^{11}y^4 + 56x^{10}y^7 + 21x^{10} + 182x^9y^3 + 525x^8y^6 + 142x^7y^9 - 24x^7y^2 + 21x^6y^{12} + 42x^6y^5 + 714x^5y^8 - 42x^5y + 266x^4y^{11} - 56x^4y^4 + 14x^3y^{14} + 462x^3y^7 - 14x^3 + 609x^2y^{10} + 42x^2y^3 + 70xy^{13} + 42xy^6 + 2y^{16} - 20y^9 + y^2$$

$$Q = 2x^{15}y + 14x^{14}y^4 - 28x^{12}y^3 - 7x^{11}y^6 + 21x^{10}y^2 + 70x^9y^5 - 69x^8y^8 + 93x^8y - 21x^7y^{11} + 105x^7y^4 - 147x^6y^7 + 49x^6 - 203x^5y^{10} - 14x^5y^3 - 14x^4y^{13} - 567x^4y^6 - 595x^3y^9 - 14x^3y^2 - 56x^2y^{12} - 63x^2y^5 + xy^{15} - 73xy^8 - 3xy - 49y^{11}$$

$$R = x^{16} - 14x^{15}y^3 + 42x^{13}y^2 - 42x^{12}y^5 + 42x^{11}y - 56x^{10}y^4 - 24x^9y^7 - 20x^9 + 21x^8y^{10} + 462x^8y^3 + 42x^7y^6 + 182x^6y^9 + 609x^6y^2 + 14x^5y^{12} + 714x^5y^5 + 525x^4y^8 + 70x^4y + 84x^3y^{11} + 266x^3y^4 - 3x^2y^{14} + 142x^2y^7 + 2x^2 + 56xy^{10} + 14xy^3 - 14y^{13} + 21y^6$$

$$e^{2\theta} = (5X - Y - 2)Y^{\frac{1}{2}}(2X^4 - 12X^3Y + 8X^3 + 24X^2Y^2 - 23X^2Y + 12X^2 - 16XY^3 - 40XY^2 - 10XY + 8X + Y + 2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$l = \frac{-2X^3 - 44X^2Y - 6X^2 + 24XY^2 + 59XY - 6X - 4Y^2 - 9Y - 2}{8(5X - Y - 2)(X + 1)X}$$

$$m = \frac{-(7X + 4Y + 7)X}{2(5X - Y - 2)Y}$$

$$a = \frac{1}{32}(2X^3 - 204X^2Y + 6X^2 + 48XY^2 - 11XY + 6X + 12Y^2 + 25Y + 2)(5X - Y - 2)^{-1}(X + 1)^{-1}X^{-1}Y^{-1}$$

$$b = \frac{1}{64}(-14X^4 - 132X^3Y - 34X^3 - 24X^2Y^2 - 235X^2Y - 18X^2 + 20XY^2 + 45XY + 10X + 16Y^2 + 36Y + 8) (5X - Y - 2)^{-1}(X + 1)^{-2}X^{-2}$$

$$c = \frac{(7X - 4Y + 7)X}{8(5X - Y - 2)Y^2}, \quad d = \frac{-49X^2 + 28XY - 21X + 24Y + 28}{16(5X - Y - 2)(X + 1)Y}$$

$$p = \frac{1}{256}(14X^4 + 16X^3Y + 34X^3 - 20X^2Y^2 - 29X^2Y$$
$$+ 18X^2 + 4XY^2 - 45XY - 10X + 16Y^2 + 28Y - 8)$$
$$(5X - Y - 2)^{-1}(X+1)^{-2}X^{-2}Y^{-1}$$
$$q = \frac{8YX - 15X - 11X^2 + 4Y - 4}{64(5X - Y - 2)(X+1)Y^2}$$

References

	orbifold	*conformal structure*	*uniformizing diff. eq.*
example1	[*H*1]	[*KN*]	[*SY*]
example2	[*H*2]	[*St*]	[*St*]
example3	[*H*2]	[*St*]	[*St*]
example4	[*H*1]	[*KN*]	[*St*]
example5	[*G*]	[*St*]	[*St*]
example6	[*H*1]	[*St*]	[*St*]

[G] G. van der Geer, *Hilbert modular forms for the field* $Q(\sqrt{6})$, Math Ann. **233** (1978), 163-179.

[H1] F. Hirzebruch, *The ring of Hilbert modular forms for real quadratic fields of small discriminant*, Lect. Notes in Math. **627** (1977), 287-323.

[H2] F. Hirzebruch, *Überlagerungen der projective Eben und Hilbertische modulflächen*, Enseign Math. **24** (1978), 63-78.

[KN] R. Kobayashi and I. Naruki, *Holomorphic conformal structures and uniformization of complex surfaces*, Math Ann. **279** (1988), 485-500.

[Ss] T. Sasaki, *On the projective geometry of hypersurfaces*, Max Planck Institute preprint **86-7** (1986).

[St] T. Sato. to appear

[SY] T. Sasaki and M. Yoshida, *Linear differential equations in two variables of rank four*, Math Ann. **282** (1988), 69-111.