数理解析研究所講究録
第 743 巻 1991 年 39-50

混合型平均について

武蔵工大　奈良 知恵 (Chie Nara)

§1. 算術幾何平均について

2つの正の実数 a, b について 数列$\{a_n\}, \{b_n\}$を以下の様に帰納的に定義する。 $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

この時、$a_n \geqq a_{n+1} \geqq \cdots \geqq b_{n+1} \geqq b_n$ と $0 \leqq a_n - b_n \leqq \frac{|a-b|}{2^n}$ から $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ が成立する。この極限値を算術幾何平均とよび $F(a,b)$ と書く。この値 $F(a,b)$ は

$$F(a,b) = \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \right\}^{-1}$$

と表されることが18世紀後半に Lagrange [5] や Gauss [4] によって発見されている。この証明については、$x = b\tan\theta$ と変数変換して $F(a,b) = \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(y^2+b^2)}} \right\}^{-1}$ になることを用いた Newman の方法が簡明である ([7] または [6] を見よ)。

このF(a,b)の値が楕円積分と関係が深いことは、右辺の積分値を $k^2=1-\frac{b^2}{a^2}$, $\sin\theta=x$ と変換して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{a}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx$$

(ただし, $b\leqq a$ としても一般性を失わないので $b\leqq a$ とした) と書き直せば第1種の楕円積分である事からわかる。そこで算術幾何平均は楕円積分の値を求めるとき、数列 $\{a_n\}$ の収束が非常に速いことからその近似値の計算に利用されてきた。また $r^2=\cos 2\theta$ で表されるレムニスケードの弧の長さも $\cos 2\theta=\cos^2\varphi$ の変換によって

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}=\frac{2\pi}{F(\sqrt{2},1)}$$

と表せば、やはり算術幾何平均によってその近似値が求まる。
(詳細やその他の歴史は[1]または[3]を参照)

§2 2つの一般化された平均の混合型平均

算術幾何平均のときに用いた算術平均と幾何平均の代りにより一般的な平均を取り扱うことにする。記号Iは実数の区間とする。

定義1　Iの直積I×I上で定義された実数値関数 $M(a,b)$ が次の3つの条件を満たすとき, MをI×I上の平均とよぶ。

(i) $a \neq b$ のとき $\min\{a,b\} < M(a,b) < \max\{a,b\}$, かつ

$$M(a,a) = a \qquad (a \in I)$$

(ii) 単調増加： $a \leqq a'$ かつ $b \leqq b'$ ならば

$$M(a,b) \leqq M(a',b')$$

(iii) 連続.

例えば p 乗平均 $\left(\dfrac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$ $(-\infty < p < \infty$, ただし $p=0$ は幾何平均とする）は平均で、こゝではこの平均を M_p と書くことにする。従って $p=1$ は算術平均, $p=0$ は幾何平均 $p=-1$ は調和平均である。この他にも I 上の連続かつ狭義単調増加な実数値関数 φ を用いて定義される *quasi-arithmetic mean* $\varphi^{-1}\left\{\dfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right\}$ も $I \times I$ 上の平均である。

<u>定義2</u>. 2つの $I \times I$ 上の平均を M, N とする。$I \times I$ の点 (a,b) について数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_1 = M(a,b)$, $b_1 = N(a,b)$

$$a_{n+1} = M(a_n, b_n), \qquad b_{n+1} = N(a_n, b_n) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

と定義する。

<u>命題1</u>　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は収束し $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ である。

[証明： 2数 x, y を両端にもつ区間を $\langle x, y \rangle$ と書く。平均

の性質(i),(ii)より

(1) $\langle a,b\rangle \supset \langle a_1,b_1\rangle \supset \cdots \supset \langle a_n,b_n\rangle \supset \langle a_{n+1},b_{n+1}\rangle \supset \cdots$.
従って $\bigcap_{n=1}^{\infty}\langle a_n,b_n\rangle = \langle \alpha,\beta\rangle$ と書ける。適当な部分列について $a_{n_j} \leqq b_{n_j}$ $(j=1,2,\ldots)$ または $a_{n_j} \geqq b_{n_j}$ $(j=1,2,\ldots)$ が成立しているので、$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_{n_j} = \beta$ とおける。$\alpha=\beta$ を示せばよい。等式 $M(a_{n_j}, b_{n_j}) = a_{n_j+1}$ と M の連続性から $j\to\infty$ とすれば $M(\alpha,\beta) = \lim_{j\to\infty} a_{n_j+1}$ で (1) より $\lim_{j\to\infty} a_{n_j+1} = \alpha$ または β, 従って $M(\alpha,\beta)=\alpha$ または β、故に(i)より $\alpha=\beta$]

<u>定理1</u>　I の2数 a,b について

$$F(a,b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

と定めると、$F(a,b)$ は $I\times I$ 上の平均である。

[証明：(iii)のみ示す。$M_n(a,b)=a_n$, $N_n(a,b)=b_n$ (すべての $(a,b)\in I\times I$) として定義される $I\times I$ 上の平均の列 $\{M_n\}$ および $\{N_n\}$ について (1)より

$$|M_n(a,b)-N_n(a,b)| \geqq |M_{n+1}(a,b)-N_{n+1}(a,b)| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)。$$

従って Dini の定理より $M_n(a,b)-N_n(a,b) \longrightarrow 0$ (閉区間上で一様に)、$|M_n(a,b)-N_n(a,b)| \geqq |M_n(a,b)-F(a,b)|$ から $M_n(a,b) \longrightarrow F(a,b)$ (閉区間上で一様に) となり F は連続。]

定義3　定理1で定めたFを<u>MとNの混合型平均</u>とよび、記号 $F_{M,N}$ または簡単にFで表す。

<u>Fの性質</u>

1° $F(a,b)=F(a_1,b_1)$　(こゝで $a_1=M(a,b),\ b_1=N(a,b)$)

2° 平均M, Nが $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ で定義され、positively homogeneous ならば、Fも positively homogeneous である、こゝで平均 $X(a,b)$ が <u>positively homogeneous</u> とは

$$X(ka,kb)=kX(a,b) \qquad (k,a,b>0)$$

が成立することである。

<u>問題1</u>　2つの平均M, Nから作られる混合型平均 $F_{M,N}$ はどんな関数表現をもつか。

これについては、$M=M_1,\ N=M_0$ のときが先に述べた算術幾何平均で、$M=M_p,\ N=M_{-p}$ のとき $F_{M,N}$ は M_0、すなわち幾何平均になる(証明は $\sqrt{a_nb_n}=\sqrt{ab}$ より簡単に示される)。その他の場合には未解決である([2])。次に $M=M_1,\ N=M_2$ の場合について調べた結果を述べる。

§3. 算術平均と2乗平均の混合型平均

この節では、I は正の実数全体 $(0,+\infty)$ とし、算術平均
$M(a,b)=\dfrac{a+b}{2}$ と2乗平均 $N(a,b)=\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(a,b>0)$
について混合型平均 $F=F_{M,N}$ を調べる。

関数 F は positively homogeneous（F の性質 2°）より、$a,b>0$ について $F(a,b)=\dfrac{a+b}{2}F\left(1-\dfrac{b-a}{a+b},\ 1+\dfrac{b-a}{a+b}\right)$ と書き表せば、関数 $F(a,b)$ $(a,b>0)$ は

$$F(1-x,\ 1+x) \quad (|x|<1)$$

に帰着される。そこで

$$a=\cos\theta-\sin\theta, \quad b=\cos\theta+\sin\theta \quad \left(|\theta|<\frac{\pi}{4}\right)$$

とおく。性質 1° より

$$F(\cos\theta-\sin\theta,\ \cos\theta+\sin\theta)=F(\cos\theta,\ 1) \quad \left(|\theta|<\frac{\pi}{4}\right),$$

従って 2° より

$$\cos\theta\, F(1-\tan\theta,\ 1+\tan\theta)=F(\cos\theta,\ 1) \quad \left(|\theta|<\frac{\pi}{4}\right)$$

$\tan\frac{\theta}{2}=x$ とおいて両辺に $1+x^2$ を掛ければ、2° より

$$(1-x^2)\,F\left(1-\frac{2x}{1-x^2},\ 1+\frac{2x}{1-x^2}\right)=F(1-x^2,\ 1+x^2) \quad (|x|<\sqrt{2}-1)$$

が成立する。

<u>定理2</u> 算術平均と2乗平均の混合型平均 F について

$$f(x)=F(1-x,\ 1+x) \quad (|x|<1)$$

とおくと、$f(x)$ は関数方程式

(*) $$(1-x^2)f\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=f(x^2) \qquad (|x|<\sqrt{2}-1)$$

を満たす。逆に(*)を満たす $x=0$ で連続な $|x|<1$ 上の関数 f は $f(x)=F(1-x,1+x)$ $(|x|<1)$ に限る。

[証明：後半。$g(x)$ を $|x|<1$ 上の(*)を満たす $x=0$ で連続な関数とする。

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)} \qquad (|x|<1)$$

について

(1) $$h\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=h(x^2) \qquad (|x|<\sqrt{2}-1)$$

が成立する。$h(x)\equiv 1$ $(|x|<1)$ を示す。任意の c, $|c|<1$ について数列 $\{c_n\}$ を $c_0=c$, c_{n+1} を $\frac{2x}{1-x^2}=c_n$ の正の解の平方数とする。従って、

(2) $$\frac{2\sqrt{c_{n+1}}}{1-c_{n+1}}=|c_n| \qquad (n=0,1,\cdots)$$

かつ、(1)より、$c_n<\sqrt{2}-1$ $(n=1,2,\cdots)$ と合わせて

(3) $$h(c_n)=h(c_{n+1}) \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

また $\left|\frac{2x}{1-x^2}\right|>x^2$ (すべての x, $0<|x|<\sqrt{2}-1$) より $|c|\geqq c_1\geqq c_2\geqq\cdots\geqq c_n\geqq c_{n+1}\geqq\cdots$ であるから $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$ が存在する。(2)の両辺を $n\to\infty$ とすれば $\alpha=0$。関数 $h(x)$ は $x=0$ で連続より $h(0)=\lim_{\to 0}h(c_n)=h(c)$、従って $h(0)=1$ と合わせて $h(x)\equiv 1$、すなわち $g(x)=f(x)$。]

次に $\{f(x)\}^{-1}=\dfrac{1}{F(1-x,1+x)}$ （$|x|<1$） の級数展開を考えてみる。 $f(x)$ が偶関数より

$$\{f(x)\}^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n} \qquad (|x|<1)$$

とおく。 $f(0)=1$ より $a_0=1$。 (*) の式 に代入して

$$\frac{1}{1-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{4n}$$

従って

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^{2n+1}=2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{4n+1}$$

これに $\dfrac{1}{(1-x^2)^n}=1+\binom{n}{1}x^2+\cdots+\binom{n+k}{k+1}x^{2(k+1)}+\cdots$ を代入して 両辺の係数を比較すれば

$$a_1=-\frac{1}{4},\quad a_2=\frac{7}{4^3},\quad a_3=-\frac{15}{4},\ \cdots$$

と求まる.

§4. 2つの一般化された平均をもうひとつの方法で混合した平均.

区間Iについて I×I 上の2つの平均を M, N とする。Iの2数 a, b について 数列 $\{a_n\}$ を $a_0=a$, $a_1=b$, $a_2=M(a_0,a_1)$, $a_3=M(a_1,a_2)$, 一般に

$$a_{2n}=M(a_{2n-2},a_{2n-1}),\ a_{2n+1}=N(a_{2n-1},a_{2n}) \quad (n=1,2\cdots)$$

と定義する。平均の条件(i)より $a<b$ ($b<a$) ならば常に $a_{2n}<a_{2n+1}$ （$a_{2n}>a_{2n+1}$） で $\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在する。

この極限値を $\tilde{F}(a,b)$ と書く。簡単な証明で次が成立する。

<u>命題2.</u>　$\tilde{F}(a,b)$ は $I \times I$ 上の平均である。

例えば、Mが算術平均，Nが幾何平均のときは良く知られている（高木貞治著「解析概論」p.33 または[6] を参照）。この他の場合について調べてみた。

$\tilde{F}$ の性質

1° $\tilde{F}(a,b) = \tilde{F}(a_{2n}, a_{2n+1})$ $(n=0,1,2,\cdots)$

2° MとNが positively homogeneous ならば $\tilde{F}$ も positively homogeneous である。

<u>問題2.</u>　$\tilde{F}(a,b)$ の具体的な形を求めよ。

平均MとNが positively homogeneous のときは $\tilde{F}(a,b)$ は適当な無限積の形に表現される。特にNがMの<u>双対平均</u>、すなわち $N(a,b) = \{M(a^{-1}, b^{-1})\}^{-1}$ のときは次の定理が成立する。

<u>定理3</u>　$I=(0,\infty)$ のとき，$I\times I$ 上の positively homogeneous な平均 M とその双対平均 N について，$\tilde{F}$ は，$a,b>0$ について

$$c_1 = M(a,b),\quad c_{n+1} = M(c_n, b) \quad (n=1,2,\cdots)$$

とおくと

$$\tilde{F}(a,b) = b\prod_{n=1}^{\infty}\frac{c_{2n-1}}{c_{2n}}$$

と表される。

[証明：$a_0=a$，$a_1=b$，$a_2=M(a,b)=c_1$，$a_3=N(b,c_1)$ $=\{M(b^{-1},c_1^{-1})\}^{-1}=b\frac{c_1}{c_2}$．従って $\tilde{F}$ の性質 $1°,2°$ より

$$\tilde{F}(a,b)=\tilde{F}(a_2,a_3)=\frac{c_1}{c_2}F(c_2,b)=\cdots\cdots=\prod_{n=1}^{m}\frac{c_{2n-1}}{c_{2n}}F(c_{2m},b)．$$

$\{c_n\}$ の定義より $\lim_{n\to\infty}c_n=b$ であるから $m\to\infty$ として定理が成立.]

<u>系</u>　p 乗平均 $M=M_p$ と $-p$ 乗平均 $N=M_{-p}$ について $\tilde{F}$ は次の形になる．$a,b>0$ について

$$\tilde{F}(a,b) = b\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4(a-b)+4^n b}{(2a-b)+4^n b}$$

[証明：定理3の c_n を具体的に求めて代入すればよい.]

系の場合の $M=M_p$ と $N=M_{-p}$ について、関数

$$f(x)=\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2x+4^n}{x+4^n}\right\} \qquad (x>-1)$$

を用いると　$\tilde{F}(a,b)=b\left\{f\left(\frac{b}{a}-1\right)\right\}^{-1}$　の関係にあるので　$f(x)$ の形がわかれば　$\tilde{F}(a,b)$ も求まる.

<u>命題3</u>　関数 $f(x)$ は　関数方程式

(**)　$$f(x)f(2x)=x+1 \qquad (x>-1)$$

を満たす。逆に (**) を満たす $x>-1$ 上の関数が $x=0$ で連続ならば $f(x)$ に限る。

[証明: (**) を満たす $x=0$ で連続な関数を $g(x)$ とし、
$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$　とおくと　$h(x)h(2x)=1$, $h(0)=1$。従って
$h(x)=h\left(\frac{x}{2^n}\right)$　$(n=1,2,\cdots)$　より $h(x)=h(0)=1$]

<u>命題4</u>　$$\log f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}+1}\cdot\frac{1}{n+1}x^{n+1} \qquad (|x|<1)$$

[証明:　$f(x)f(2x)=x+1$ の両辺を微分して
$$f'(x)f(2x)+f(x)\{2f'(2x)\}=1.$$
$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$　とおくと　$g(x)+2g(2x)=\frac{1}{x+1}$、これより両辺の級数展開の係数を比較して求まる.]

<u>参考文献</u>

[1] G. Almkvist and B. Berndt, Gauss, Landen, Ramanujan, the Arithmetic-

Geometric Mean, Ellipse, π, and the Ladies Diary, Amer. Math. Monthly (1988), 585-608.

[2] J.M. Borwein and P.B. Borwein, The way of all means, Amer. Math. Montly (1987), 519-522.

[3] D.A. Cox, The arithmetic-geometric mean of Gauss, L'Enseign. Math., 30 (1984), 275-330.

[4] C.F. Gauss, Nachlass. Arithmetisch geometrisches Mittel, Werke, Bd.3, Königlichen Gesell. Wiss., Göttingen, 1876, pp.361-403.

[5] J.-L. Lagrange, Sur une novelle méthode de calcul intégral pour les differentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré, Mem. l'Acad. Roy. Sci. Turin 2 (1784-85); Oeuvres t.2, Gauthier-Villars, Paris, 1868, pp251-312.

[6] C. Naru, 算術幾何平均について, 関数解析学研究集会予稿集(S63.11.28~11.30)

[7] D.J. Newman, A simplified version of the fast algorithms of Brent and Salamin, Math. Comp., 44 (1985), 207-210.