数理解析研究所講究録
第743巻 1991年 86-92

補間多項式の収束についての　注意

富山大教育　泉野佐一 (Saichi Izumino)

1. 有界区間 $[a,b]$ の中の k 個の点を，$a \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqq b$ とし，データ $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\cdots,k}$ を補間する関数，つまり $f(x_i)=y_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ を満たす $f(x)$ を求める問題を考える。このような関数としては，Lagrange の補間多項式

$$l(x) := \sum_{i=1}^{k} y_i \frac{\omega_i(x)}{\omega'(x_i)}$$

がよく知られている。ここで，$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$, $\omega_i(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_k)$ である。

補間関数を区分的多項式の中に求めることも考えられるが，これが補間 spline と呼ばれるものである。データ $\{(x_i, y_i)\}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ に対して，$(-\infty,\infty)$ で定義された補間関数 s が次の (1), (2) を満たすとき，m 次 $(m \geqq 1)$ の補間 spline と呼ばれる([2])。

(1) 各区間 (x_i, x_{i+1}) $(i=0,1,\cdots,k)$ で m 次以下の多項式，($x_0=-\infty$, $x_{k+1}=\infty$ とする。)

(2) $s \in C^{m-1}(-\infty,\infty)$.

いま，$1 \leqq n < k$ とし，補間関数 $f \in C^n[a,b]$ を動かして，

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x)\}^2 dx$$

を最小にする問題を考える。これは，ある意味で最も滑らかな補間関数を見つけることを意味する([2])。実はこのような最小2乗積分を与えるものはただ一つ存在し，それは $2n-1$ 次の自然補間 spline と呼ばれるもの（これを s_* と記す）である。次は s_* の定義である([2],[3])。

(1) s_* は $2n-1$ 次の補間 spline である。

(2) s_* は $(-\infty, x_1] \cup [x_k, \infty)$ では $n-1$ 次以下の多項式となる。

π_m で m 次以下の多項式全体の集合を表すこととし，

$$\Pi_m := \{p \in \pi_m;\ p(x_i) = y_i\ \ (i=1,2,\cdots,k)\}$$

とおく $(m \geqq k)$。このとき，Π_m から自然補間 spline s_* への近似に関して，Schoenberg [4] は次の定理を証明した。

定理 S (1) $\displaystyle\int_a^b \{p^{(n)}(x)\}^2 dx$, $p \in \Pi_m$

を最小にする多項式 $p = p_m$ がただ一つ存在する。

(2) (1)より得られる多項式の列 $\{p_m\}_{m=k}^{\infty}$ は $2n-1$ 次の自然補間 spline s_* に一様収束する。

上の定理で示された多項式 p_m 及びその極限としての自然補間 spline s_* について作用素論的な見方を2,3試みようとしたのである. 以下のように貧弱な結果しか得ていない。

2. p_m の一意性. $q\in\Pi_m$ $(m\geq k)$ を1つ固定すると, 任意の $p\in\Pi_m$ は, $u\in\pi_{m-k}$ を適当に選んで

$$p=q-\omega u$$

と表される。ここで, ω は先に定義したものである. このとき, $L^2(a,b)$ のノルムを $\|\cdot\|$ として,

$$\int_a^b\{p^{(n)}(x)\}^2dx=\|q^{(n)}-(\omega u)^{(n)}\|^2$$

とかける。いま

$$A_m u=(\omega u)^{(n)},\qquad u\in\pi_{m-k}$$

によって作用素 A_m を定義すると, $A_m\in\mathcal{L}(\pi_{m-k},\pi_{m-n})$, つまり, π_{m-k} から π_{m-n} の中への有限次元の線形作用素となる。定理Sの(1)は,

$$\|q^{(n)}-A_m u\|=minimum,\quad u\in\pi_{m-k}$$

を満たす多項式 u を求めることと同値となる。有限次元作用素 A_m はその一般逆作用素 A_m^+ をもつ([1])ことから、これを用いて求める u は

$$u = A_m^+ g^{(n)} + v, \qquad v \in \ker A_m$$

と表される。ところが、実は

$$\ker A_m = \{0\}$$

となることが示される。実際、$A_m v = (\omega v)^{(n)} = 0$ とすると、$\omega v \in \pi_{n-1}$、もし $v \neq 0$ とすれば ωv は k 次以上の多項式となり矛盾が生ずる。したがって $v = 0$。このことから、$u = A_m^+ g^{(n)}$ とわかる。この u を用いると、

$$p^{(n)} = g^{(n)} - A_m A_m^+ g^{(n)} = (g - \omega A_m^+ g^{(n)})^{(n)}$$

が2乗積分を最小にするものとわかる。上の等式の n 回不定積分をとれば

$$p = g - \omega A_m^+ g^{(n)} + s, \qquad \exists s \in \pi_{n-1}$$

となる。ところが $p, g \in \Pi_m$ ということ、及び $\omega(x_i) = 0$ を考え合わせれば、$s = 0$ とわかる。よって

$$p = g - \omega A_m^+ g^{(n)}.$$

この p が先の定理S(1)の p_m ということになる。なお念のため p の一意性も示したい。別の $r \in \Pi_m$ から出発して、

$$\bar{p} = r - \omega A_m^+ r^{(n)}$$

を得たとして、$p = \bar{p}$ をいえばよい。

$$p-\bar{p}=(q-r)-\omega A^{+}(q-r)^{(n)}$$

となるが，$v\in\pi_{m-k}$ を適当にとり $q-r=\omega v$ とかける。先に示したように $\ker A_m=\{0\}$ だから，$A_m^{+}A_m v=v$ である．これから

$$A_m^{+}(q-r)^{(n)}=A_m^{+}(\omega v)^{(n)}=A_m^{+}A_m v=v$$
$$=\frac{q-r}{\omega}$$

したがって $p-\bar{p}=0$ とわかる。

3．$\{p_m\}$ の収束．記述の便宜上，$D^n u=u^{(n)}$，$L_\omega u=\omega u$ とし，作用素 T_m $(m\geqq k)$ を

$$T_m u:=u-\omega A_m^{+}u^{(n)}=(1-L_\omega A_m^{+}D^n)u$$

と定義する．$(u\in\pi_m)$。$T_m\in\mathcal{L}(\pi_m,\pi_m)$。($u\in C^n[a,b]$ として T_m の定義域を拡くすることもできる。) $F_m:=A_m A_m^{+}$ は直交射影で増加列．そこで $F_m\to F$（強収束）とすると．

$$D^n T_m=(1-F_m)D^n\to F^{\perp}D^n$$

$q\in\pi_{m_0}$ を1つ固定したとき．$p_m^{(n)}=D^n T_m q\to F^{\perp}D^n q$.

これは，$\{p_m^{(n)}\}$ が $L^2(a,b)$ で収束することを示している。

実は

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}p_m^{(n)}=s_*^{(n)}\quad(\text{in }L^2(a,b))$$

である。(s_* は先に述べた自然補間 spline.)

(＊) を示すには，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，m を十分大きくとると，$q \in \Pi_m$ で $\| q^{(n)} - s^{(n)} \| < \varepsilon \ (<1)$ となるものが見つかること，また，s_* の特性として，$C^n[a, b]$ の中の任意の補間関数 f に対して

$$(**) \qquad \| f^{(n)} - s_*^{(n)} \|^2 = \| f^{(n)} \|^2 - \| s_*^{(n)} \|^2$$

が成り立つことを用いる（[3], p.115）。すなわち，(＊＊) で $f = p_m$ とおき，$\| p_m^{(n)} \|$ の最小性を用いて，

$$\begin{aligned}
\| p_m^{(n)} - s_*^{(n)} \|^2 &= \| p_m^{(n)} \|^2 - \| s_*^{(n)} \|^2 \\
&\leqq \| q^{(n)} \|^2 - \| s_*^{(n)} \|^2 \\
&= (\| q^{(n)} \| + \| s_*^{(n)} \|)(\| q^{(n)} \| - \| s_*^{(n)} \|) \\
&\leqq (2 \| s_*^{(n)} \| + 1) \| q^{(n)} - s_*^{(n)} \| \\
&< \varepsilon K_1 \qquad (K_1 = 2 \| s_*^{(n)} \| + 1)。
\end{aligned}$$

これから $p_m^{(n)} \to s_*^{(n)}$ がわかる。更に $\{p_m\}$ が s_* に一様収束することは，一般に，$f \in C^n[a, b]$ が

$$(***) \qquad f(x) = l(x) + \frac{\omega(x)}{n!} \int_a^b M(t; x_1, x_2, \cdots, x_n, x) f^{(n)}(t)\, dt$$

と表されることを利用して示される。ここで $l(x)$ は先に述べた Lagrange の多項式，$M(t; x_0, x_1, \cdots, x_\nu) = \sum_{i=0}^{\nu} \frac{\nu (x_i - t)_+^{\nu-1}}{\omega'(x_i)}$ （$x_0, x_1, \cdots, x_\nu$ を結節点とする B-spline と呼ばれるもの）である。(＊＊＊) を p_m と s_* に適用し，Schwarz の不等式から

$$\left|P_m(x) - s_*(x)\right| = \left|\frac{\omega(x)}{n!}\int_a^b M(t; x_1, x_2, \cdots, x_n, x)\left(P_m^{(n)}(t) - s_*^{(n)}(t)\right)dt\right|$$

$$\leqq K_2 \left\| P_m^{(n)} - s_*^{(n)} \right\|.$$

$$\left(K_2 = \frac{1}{n!}\max_{a\leqq x\leqq b}\left\{|\omega(x)|\cdot\left[\int_a^b \{M(t; x_1, x_2, \cdots x_n, x)\}^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.\right)$$

となる。

References

[1] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, Generalized Inverses: Theory and Applications, New York, 1981.

[2] 桜井 明, スプライン関数入門, 東京電気大学出版, 1981.

[3] I. J. Schoenberg, On interpolation by spline functions and its minimal properties, On Approximation Theory 5, ISNM (1964), 109-128.

[4] ______________ , Interpolating splines as limits of polinomials, Linear Alg. and its Appl. 52 (1983), 617-628.