数理解析研究所講究録
第743巻 1991年 109-119

Korovkin-Wulbert 作用素

山形大・工　髙橋眞映(Sin-Ei Takahasi)

1。序論。 Korovkin [4]の定理は函数近似の定理であるが、一方これは恒等作用素の正線形作用素による強近似定理と観る事が出来る。この観点から恒等作用素以外の作用素の Korovkin 型正線形作用素近似定理を最初に得たのは W. B. Arveson [2]ではなかったかと思う。更に Wulbert [8]の定理も同様に恒等作用素の線形作用素による強近似定理と観る事が出来る。この様な観点からすれば F. Altomare [1]の仕事も Korovkin-Wulbert 型の作用素近似論と観る事が出来る。Arvson が 可換 C^*-代数から他の C^*-代数への＊一準同型写像を考察したのに対し、Altomare は種々の線形空間上の作用素を考察している。著者[6]は C[0,1]上の作用素が Korovkin-Wulbert 型の定理を満たす作用素を KW-作用素と呼び、[6, 7]の中でこれらの作用素を考察している。ここでは KW-作用素の立場から、Altomore [1]の仕事を紹介すると共に、単位円周上の連続函数環及び、ディスク環上の KW-作用素を考察したい。最後に函数空間から他の函数空間の上への等長線形作用素は KW-作用素である事を述べたい。これは同研究会での成果の一つである函数空間上の等長線形作用素の分解定理（岡安－高垣）から導かれるものである。

2。KW－作用素の定義と知られている結果。 X, Y をノルム空間、B(X, Y) を X から Y への有界線形作用素全体の作るノルム空間, S を X の部分集合とする。今、各 $x \in X$ に対して、

$$
\begin{aligned}
KW(X,Y,S;x) = \{T \in B(X,Y) : \{T_\lambda\} \subset B(X,Y) \text{ s.t. } & \lim \|T_\lambda\| = \|T\| \text{ and} \\
& \lim \|T_\lambda s - Ts\| = 0 \ (\forall s \in S) \\
& \Rightarrow \lim \|T_\lambda x - Tx\| = 0\}
\end{aligned}
$$

と置く。これは S でのある性質が $x \in X$ まで遺伝して行く様な作用素の全体と

考えられる。次に

$$KW(X,Y,S) = \bigcap_{x \in X} KW(X,Y,S;x)$$

と置く。勿論これは S でのある性質が 全ての $x \in X$ まで遺伝して行く様な作用素の全体と考えられる。我々は $KW(X,Y,S)$ に属する作用素を S に対する X から Y への KW-作用素と呼ぼう。特に $X = Y$ のときは、単に $KW(X,S)$ と書き、それに属する作用素を S に対する X 上の KW-作用素と呼ぼう。全く同様にして、

$$KW_1(X,Y,S;x) = \{T \in B(X,\ Y) : \{T_\lambda\} \subset B(X,\ Y) \text{ s.t. } T_\lambda(X) \subset T(X)\ (\forall\lambda),\ \lim \|T_\lambda\| = \|T\| \text{ and } \lim \|T_\lambda s - Ts\| = 0\ (\forall s \in S) \Rightarrow \lim \|T_\lambda x - Tx\| = 0\}$$

によって定義される KW_1-作用素も考える事にする。勿論定義により、

$$KW(X,Y,S) \subset KW_1(X,Y,S)$$

となっている。Wulbert [8]は次の様な定理を証明している。

定理W（Wulbert[8]）。Ωをコンパクト Hausdorff 空間、$C(\Omega)$ を sup-ノルムを持つΩ 上の連続函数環、X を $C(\Omega)$ の線形部分空間、 S をその Choquet 境界がΩに等しい様な X の線形部分空間とする。このとき恒等写像 $I : x \to x$ $(x \in X)$ は $KW(X,C(\Omega),S)$ に属する。

系W（Wulbert [8]）。$[0,1]$ を単位閉区間、 R を実数全体、 T^1 を単位円周とする。I を恒等写像とする。このとき次が成り立つ。

(1) $I \in KW(C[0,1],\ \{1,x,x^2\})$.

(2) $I \in KW(L^1[0,1],\{1,x,x^2\})$

(3) $I \in KW(C_{2\pi}(R),\ \{1,\ \cos x,\ \sin x\})$.

(4) $I \in KW(X,C(\mathbf{T}^1),\{1,z,z^-\})$.　ここで X は $\{1,z,z^-\}$ を含む $C(\mathbf{T}^1)$ の線形部分空間を表す。

(5) $I \in KW(X,C(D^-),\{1,z,z^-,z^2,(z^-)^2\})$.　ここで X は $\{1,z,z^-,z^2,(z^-)^2\}$ を含む $C(D^-)$ の線形部分空間を表す。

著者[6, 7]は次の様な結果を示している。

定理T。(1) (i) T を $C[0,1]$ 上の準同型写像、S を $C[0,1]$ 上の等長積作用素とするとき、TS 及び ST は $KW(C[0,1], \{1, x, x^2\})$ に属する。

(2) u を $|u(t)| = constant$ $(t \in [0,1])$ なる $C[0,1]$ の函数とすると、$u \otimes \delta_t$ $(t \in [0,1])$, $u \otimes (\delta_0 - \delta_t)$ $(t \in [1/2,1])$, $u \otimes (\delta_1 - \delta_t)$ $(t \in [0,1/2])$ は $KW(C[0,1], \{1, x, x^2\})$ に属する。ここで δ_t は t 上の Dirac 測度を表す。

(3) a, b を正の定数、T, S を $C[0,1]$ 上の準同型写像とするとき、次が成り立つ。

(i) $a(1 \otimes \delta_0) + b(1 \otimes \delta_1) \in KW(C[0,1], \{1, x, x^2\})$.

(ii) $a(1 \otimes \delta_0) + bT$, $a(1 \otimes \delta_1) + bT \in KW(C[0,1], \{1, x, x^2, x^3\})$.

(iii) $aT + bS \in KW(C[0,1], \{1, x, x^2, x^3, x^4\})$.

注意。$1 \otimes \delta_t$ は $C[0,1]$ 上の一次元準同型写像である。また(iii)はn個まで拡張する事が出来る([7]参照)また((1)-(i) において、T 及び S で生成される半群は TS の形しかない。

Altomare のアイディアを借りれば上の KW-作用素はもっと一般的に考える事が出来る。今 E を X の共役空間 X^* の部分集合、F を Y の共役空間 Y^* の部分集合、τ を Y 上の位相とする。$T \in B(X, Y)$ が (E, F)-許容であるとは $T^*(F) \subset E$ を満たす事である。ここに T^* は T の共役作用素を表す。この概念から、各 $x \in X$ に対して、

$$KW(X, Y, S; E, F, \tau; x) = \{T \in B(X, Y) : \{T_\lambda\} \subset B(X, Y) \text{ s.t. } \lim \|T_\lambda\| = \|T\|, \text{ each } T_\lambda \text{ is } (E, F)\text{-admissible and } T_\lambda s \to Ts \ (\forall s \in S) \text{ for } \tau \Rightarrow T_\lambda x \to Tx \text{ for } \tau\}$$

と置く。従って定義により、$KW(X, Y, S; x) = KW(X, Y, S; X, Y; \|\ \|; x)$ である。次に前と同じく、

$$KW(X,Y,S;E,F,\tau) = \bigcap_{x\in X} KW(X,Y,S;E,F,\tau;x)$$

と置こう。この一般的定義のもとで、Korovkin, Wulbert, Altomare 等の仕事をを述べる事が出来る。その前に次の様な記号の簡略化をする。

$$KW(X,S) = KW(X,X,S),$$
$$KW(X,S;E,F,\tau) = KW(X,X,S;E,F,\tau),$$
$$KW(X,S;E,\tau) = KW(X,X,S;E,E,\tau),$$
$$KW(X,S;E) = KW(X,X,S;E,E,\|\ \|_X),$$
$$KW(X,Y,S,\tau) = KW(X,Y,S:X,Y,\tau),$$
$$KW(X,S,\tau) = KW(X,X,S;X,X,\tau).$$

定理K(Korovkin [4]). I を C[0,1] 上の恒等写像とする。

(i) $I \in KW(C[0,1],\ \{1,x,x^2\};M^+[0,1]))$.

(ii) $I \in KW(C_{2\pi}(R),\ \{1,\ \cos x,\ \sin x\};(C_{2\pi}(R))^{*+})$.

ここで、$M^+[0,1]$ は [0,1] 上の正の（有界正則 Borel）測度全体を表す。また $(C_{2\pi}(R))^{*+}$ は $C_{2\pi}(R)$ 上の正の汎函数全体を表す。

定理W’(Wulbert [8]). Ωをコンパクト Hausdorff 空間、C(Ω) を sup-ノルムを持つΩ上の連続函数環、X を C(Ω) の線形部分空間、 S をその Choquet 境界がΩに等しい様な X の線形部分空間とする。このとき恒等写像 $I : x \to x$ $(x \in X)$ は KW(X,C(Ω),S;weak topology)) に属する。

注意。 $E_1 \subset E \Rightarrow KW(X,S;E,\tau) \subset KW(X,S;E_1,\tau)$.

定理A(Altomare [1]).

(1) Ω を複素平面上のコンパクト凸集合でその位相境界が端点の全体に一致しているものとする。A(Ω) を z の多項式でΩ上一様近似される様なΩ上の複素函数全体の作る Banach 代数、Γを A(Ω) に関するΩの Silov 境界とする。このとき (Γ,Γ)-許容作用素は KW(A(Ω),{1, z}) に属する。

(2) A, B を連続な symmetric involution を持つ可換 Banach 代数で A は有界近似単位元を持つものとする。S を A の部分集合で、$S^\wedge = \{x^\wedge : x \in S\}$ は

Φ_A（A のキャリア空間）の点を強分離するものとする。ここで $x^\wedge$ は x の Gelfand 変換を表す。次に $SS^* = \{xx^* : x \in S\}$ と置く。更に $\|\ \|_\infty$ は B のスペクトルセミノルムを表すものとする。このとき、A から B への＊ー準同型写像は $KW(A, B, S \cup SS^*; A^{*+}, B^{*+}, \|\ \|_\infty)$ に属する。

(3) A, B を C^*-代数、$P^-(A)$, $P^-(B)$をそれぞれ A, B のピュアステート空間、S を A の部分集合で「$f \in P^-(A)$, $g \in A^{*+}$ and $f \mid S = g \mid S \Rightarrow f = g$」を満たすものとする。このとき、A から B への $(P^-(A), P^-(B))$-許容作用素は $KW(A, B, S; A^{*+}, B^{*+})$ に属する。

注意。著者[5]は上で特に A = B で A は単位元 1 を持ち、$1 \in S$ のとき、$I \in KW(A, S; A^{*+})$ である事を示している。

3。函数空間上のKWー作用素。 a, b を正の定数とする。$A(D^-)$ をディスク環、$C(T^1)$ を単位円周 T^1上の連続函数環とする。

定理1。B_1, B_2 を任意の有限 Blaschke 積、T_{B1}, T_{B2} をそれぞれ B_1, B_2 によって定義される $A(D^-)$ からそれ自身への準同型写像とすれば、$aT_{B1} + bT_{B2} \in KW(A(D^-), \{1, z\ z^2\})$ である。

注意。T を $A(D^-)$ からそれ自身へのゼロでない準同型写像とすると、$\varphi = T(z)$ （z を $z \in A(D^-)$と見ている）と置いて、$\varphi \in A(D^-)$ でかつ $(Tf)(z) = f(\varphi(z))$ $(z \in D^-,\ f \in A(D^-))$ を満たす。また、$\varphi(T^1) \subset T^1$ なら φ は有限 Blaschke 積でなければならない。

定理2。T, S を $C(T^1)$ からそれ自身への準同型写像とすれば、$aT + bS \in KW(C(T^1), \{1, z\ z^2\})$ である。

定理3。Ω、Φをコンパクト Hausdorff 空間、X をΩ上の函数空間、Y をΦ上の連続函数環 C(Φ) の 1 を含む線形部分空間、S を X の部分集合で $\Omega = \{\omega \in \Omega : f \in X^*, \|f\| \leqq 1,\ s(\omega) = f(s)\ (\forall s \in S) \Rightarrow x(\omega) = f(x)\ (\forall x \in X)\}$ を満たすものとする。このとき、X から Y への任意の等長線形作用素は $KW_1(X, Y, S)$に属する。特に全射であれば、$KW(X, Y, S)$ に属する。

注意。上の定理３は定理Ｗの一般化となっている。

４。定理の証明。 我々がＫＷ－作用素を捜す上で手がかりとなるものは次の補題である。その前に記号を導入しよう。

$$U(X,S;x) = \{f \in X^* : g \in X^*,\ \|g\| \leqq \|f\|,\ g|S = f|S \Rightarrow g(x) = f(x)\},$$

$$U(X,S) = \bigcap_{x\in X} U(X,S;x)$$

ここで X はノルム空間、S はその部分集合、x は X の要素、X^* は X の共役空間を表す。

補題１。X, Y をノルム空間とし、$x \in X$, $S \subset X$ とする。更に E を $\|g\| = 1$ ($\forall g \in E$) となる様な Y^* の弱*－閉部分集合とする。このとき、$T \in B(X,Y)$ が $\|T\| = \|T^*g\|$, $T^*g \in U(X,S;x)$ ($\forall g \in E$) を満たせば、$T \in KW(X,Y,S;\tau_E,x)$ である。ここで τ_E は $\|y\|_E = \sup\{|g(y)| : g \in E\}$ ($y \in Y$) なるセミノルムで定義される位相である。

この補題の証明は直接証明する事も出来るが、上の Altomare の結果を導く基本的定理を紹介すると共にそれから、上の補題が導かれる事を示す。

定理Ａ’（Altomare [1]）。X を位相線形空間、X^* をその位相共役空間で弱*－位相を持つものとする。A を同程度連続な X^* の部分集合、B を X^* の弱*－閉部分集合、S を X の部分集合とする。次に $W_u(X,S,A,B)$ を以下の様な性質を満たすすべての $x \in X$ 全体からなる X の線形部分空間とする：

もし Y を位相線形空間、C を同程度連続な Y^* の弱*－閉部分集合、D を C を含む Y^* の弱*－閉部分集合、$\{T_\lambda\}$ を X から Y への (B,D)-許容作用素の同程度連続なネット、T を X から Y への (A,C)-許容作用素で $\tau_C\text{-}\lim T_\lambda s = Ts$ ($\forall s \in S$) を満たすものとすれば、$\tau_C\text{-}\lim T_\lambda x = Tx$ である。

このとき、

$$W_u(X,S,A,B) = \{x \in X : f \in A,\ g \in B,\ f(s) = g(s)\ (\forall s \in S) \Rightarrow f(x) = g(x)\}$$

である。

補題1の証明。$\{T_\lambda\}$ を $\lim \|T_\lambda\| = \|T\|$, $\tau_E\text{-}\lim T_\lambda s = Ts$ $(\forall s \in S)$ となる様な $B(X,Y)$ のネットとする。このとき一般性を失う事無く $\|T_\lambda\| = \|T\| = 1$ $(\forall\lambda)$ と仮定する事が出来る。さて

$A = \{f \in U(X,S;x) : \|f\| = 1\}$,

$B = \{f \in X^* : \|f\| \leqq 1\}$,

$C = E$,

$D = \{g \in Y^* : \|g\| \leqq 1\}$

と置こう。従って $\{T_\lambda\}$ は X から Y への (B,D)-許容作用素のネットとなる。また、もし $f \in A$, $g \in B$ かつ $f(s) = g(s)$ $(\forall s \in S)$ なら $\|g\| \leqq 1 = \|f\|$ であるから $f(x) = g(x)$ である。従って定理A' から $T \in W_u(X,S,A,B)$、それ故、もし $\|T\| = \|T^*g\|$, $T^*g \in U(X,S;x)$ $(\forall g \in E)$ であるなら、T は (A,C)-許容、従って $\tau_E\text{-}\lim T_\lambda x = Tx$ である。この事は $T \in KW(X,Y,S;\tau_E,x)$ である事を示している。 □

注意。 $U(X,S;x) \subset KW(X,C,S;x) \subset U^1(X,S;x) := \{f \in X^* : g \in X^*, \|g\| = \|f\|, g|S = f|S \Rightarrow g(x) = f(x)\}$ である。ここでCは複素数体を表す。

定理1の証明。今 $\Phi_{A(D^-)} \cong D^-$, [$A(D^-)$ に関する D^- の Silov 境界] $\cong T^1$ と見なす事にする。次に $S = \{1, z, z^2\}$, $E = T^1$ と置く。従って τ_E は $A(D^-)$ 上の (sup)ノルム位相となる。B_1, B_2 を有限 Blaschke 積、T_{B1}, T_{B2} をそれぞれ B_1, B_2 によって定義される $A(D^-)$ からそれ自身への準同型写像、a, b を正の定数とし、 $T = aT_{B1} + T_{B2}$ と置く。このとき、(i) $\|T\| = \|T^*z_0\|$ $(\forall z_0 \in T^1)$, (ii) $T^*z_0 \in U(A(D^-),S)$ $(\forall z_0 \in T^1)$ を示せば、補題1から、$T \in KW(A(D^-),S)$ が導き出され定理の証明が終わる。そこで $z_0 \in T^1$ を固定し、先ず (i) を示す。$T^*z_0 = aB_1(z_0) + bB_2(z_0)$ に注意して、 $\|T^*z_0\| = a + b$ である。従って

$$\|T\| = \|aT_1 + bT_2\| \leqq a\|T_1\| + b\|T_2\| \leqq a + b = \|T^*z_0\| \leqq \|T^*\| = \|T\|$$

から (i) が導かれる。次に (ii) を示す。その為次の条件を満す $\nu \in (A(D^-))^*$ を考える：$T^*z_0 | S = \nu | S$, $\|\nu\| \leqq \|T^*z_0\|$。このとき、$\nu = T^*z_0$ を示せば良い。そこで $A(D^-) \subset C(T^1)$ と見なして、Hahn-Banach の拡張定理から $\|\mu\| = \|\nu\|$, $\mu | A(D^-) = \nu$ なる $\mu \in (C(T^1))^*$ を取る。ここで $C(T^1)$ は T^1 上の連続函数環を表す。今 $z_1 = B_1(z_0)$, $z_2 = B_2(z_0)$ と置く。従って z_1, $z_2 \in T^1$ であり、$a\delta_{z_1} + b\delta_{z_2}$ は T^*z_0 の $C(T^1)$ へのノルム保存拡張となっている。従って、$\mu | S = (a\delta_{z_1} + b\delta_{z_2}) | S$ である。そこで、$z_1 = \exp(i\theta_1)$, $z_2 = \exp(i\theta_2)$ と置けば、

$$\mu(z^k) = a\exp(ik\theta_1) + b\exp(ik\theta_2) \quad (k = 0, 1, 2)$$

を得る。従って $\|\mu\| \leqq \|T^*z_0\| = a + b = \mu(1) \leqq \|\mu\|$、それ故 μ は正測度と見なせる。さて各 $f(z) \in C(T^1)$ に対して $f(e^{i\theta}) \in C_{2\pi}(R)$ $(z = e^{i\theta})$ を対応させる写像を τ とすると、勿論これは同形写像であり、その双対写像を τ^* とすると、$\mu^{\sim} := (\tau^*)^{-1}(\mu)$ は $C_{2\pi}(R)$ 上の正汎函数となる。また $\mu^{\sim}(\exp(in\theta)) = \mu(z^n)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ であるから、上式と合わせて

$$\mu^{\sim}(\cos k\theta) = a\cos k\theta_1 + b\cos k\theta_2$$
$$\mu^{\sim}(\sin k\theta) = a\sin k\theta_1 + b\sin k\theta_2$$
$$(k = 0, 1, 2)$$

を得る。そこで $T(\theta) = \sin^2\dfrac{(\theta - \theta_1)}{2} \quad \sin^2\dfrac{(\theta - \theta_2)}{2}$ $(\theta \in R)$ と置くと、T は $\{1, \cos\theta, \sin\theta, \cos2\theta, \sin2\theta\}$ で生成された $C_{2\pi}(R)$ の線形部分空間の要素であるから、上式から $\mu^{\sim}(T) = 0$ が導き出される。これから $\mu^{\sim}$ の台は $\{\theta_1, \theta_2\}$ (mod. 2π) となり、$\mu^{\sim} = c\delta_{\theta_1} + d\delta_{\theta_2}$ と書く事が出来る。しかしこれは上式から直ちに $a = c$, $b = d$ でなければならない。よって $\mu = a\delta_{z_1} + b\delta_{z_2}$, それ故両辺 $A(D^-)$ で制限して $\nu = T^*z_0$ を得る。 □

定理２の証明。これは上の定理の証明を参考にすれば良い。 □

さて定理３の証明にあたり岡安、高垣、両氏により同研究集会で発表された函

数空間上の等長作用素の分解定理を補題として述べる。これは W. Holsztynski [3]による函数環上の等長作用素の分解定理の函数空間への拡張と考えられる。

補題２（岡安－高垣）。Ω、Φをコンパクト Hausdorff 空間、X をΩ上の函数空間、T を X からΦ上の連続函数環 $C(\Phi)$ への等長線形作用素、Γを X に関するΩの Silov 境界とする。このとき、$T(X)$ に関するΦの閉境界 $d_{T(X)}(\Phi)$ と $d_{T(X)}(\Phi)$ からΓの上への連続写像 τ と $|u(\varphi)| = 1$ $(\varphi \in d_{T(X)}(\Phi))$ を満たす $u \in C(\Phi)$ が存在して、$(Tx)(\varphi) = u(\varphi)x(\tau(\varphi))$ $(\varphi \in d_{T(X)}(\Phi),\ x \in X)$ が成り立つ。

定理３の証明。補題２の記号を保存する。但し T は X から Y （$C(\Phi)$の 1 を含む線形部分空間）への等長作用素とする。今 $E = \{\delta_\varphi | Y : \varphi \in d_{T(X)}(\Phi)\}$ と置く。ここで $\delta_\varphi | Y$ は φ 上の Dirac 測度の Y への制限を表す。従ってそのノルムは常に 1 である。またΦのコンパクト性から E は Y^* の弱*－閉部分集合である事が分かる。更に τ_E は $T(X)$ に制限すると(sup)ノルム位相に一致している。また

$$T^*(\delta_\varphi | Y) = u(\varphi)\delta_{\tau(\varphi)} | X \quad (\forall \varphi \in d_{T(X)}(\Phi))$$

に注意すれば、両辺ノルムをとって $\|T^*(g)\| = 1$, 従って $\|T^*(g)\| = \|T\|$ $(\forall g \in E)$ を得る。次に S を X の部分集合で $\Omega = \{\omega \in \Omega : f \in X^*, \|f\| \leq 1,\ s(\omega) = f(s)\ (\forall s \in S) \Rightarrow x(\omega) = f(x)\ (\forall x \in X)\}$ を満たすものとする。このとき $T^*(g) \in U(X, S)$ $(\forall g \in E)$ である。実際任意の $\varphi \in d_{T(X)}(\Phi)$ に対して $g = \delta_\varphi | Y$ と置き、$(T^*g)(s) = \mu(s)$ $(\forall s \in S)$, $\|\mu\| \leq \|T^*g\|$ $(= 1)$ なる $\mu \in X^*$ を考える。従って $\omega = \tau(\varphi)$, $f = u(\varphi)^{-1}\mu$ と置くと、上式から

$$s(\omega) = u(\varphi)^{-1}(Ts)(\varphi) = u(\varphi)^{-1}\mu(s) = f(s) \quad (\forall s \in S)$$

となる。更に $\|f\| = |u(\varphi)|^{-1}\|\mu\| \leq 1$ であるから、S の持つ仮定より $x(\omega) = f(x)$ $(\forall x \in X)$ を得る。しかしこの事は再び上式から $T^*(g) = \mu$ を主張しているので $T^*(g) \in U(X, S)$ $(\forall g \in E)$ が示された。従って補題１から $T \in KW(X, Y, S; \tau_E)$ である。そこで $B(X, Y)$ の中のネット $\{T_\lambda\}$ で $T_\lambda(X) \subset T(X)$ $(\forall \lambda)$, $\lim \|T_\lambda\| = \|T\|$ かつ $\lim \|T_\lambda s - Ts\| = 0$ $(\forall s \in S)$ を満たすものを

考えると、$T \in KW(X,Y,S;\tau_E)$ から $\lim \| T_\lambda x - Tx \|_E = 0$ $(\forall x \in X)$ は成り立つ。しかし各 $T_\lambda x - Tx$ は仮定より $T(X)$ に属しているから $\lim \| T_\lambda x - Tx \| = 0$ $(\forall x \in X)$ でなければならない。つまり $T \in KW_1(X,Y,S)$ である。特に T が全射であれば、条件「$T_\lambda(X) \subset T(X)$ $(\forall \lambda)$」は不要になるから $T \in KW_1(X,Y,S)$ である。 □

後書：今 $\{z_1,...,z_n\}$ を複素平面上の異なる n 個の点とし、X を複素平面上の連続函数の $\{z_1,...,z_n\}$ への制限の全体、$S = \{1, z, z^2\} \subset X$ とすると、もし $n = 3$ なら $KW(X,S) = B(X)$ である。ところで n が 4 以上場合補題 1 で捜せる KW-作用素は次の様なものに限られる：

$T \in B(X)$: T の行列表現を (t_{ij}) とすると、$t_i = (t_{i1},...,t_{in})$ を X^* の要素とみて、$t_i \in U(X,S)$ $(i = 1,...,n)$ となっている。

例えば各 t_i に付いてその要素の一つだけが絶対値 1 の複素数で他は零である様な作用素 T 等がその例である。従って我々は KW-作用素を捜す手がかりが補題 1 の他にある事と知らねばならない。それは今後の課題となろう。

参考文献

[1] F. Altomore, On the universal convergence sets, Annali di Matematica, **138**(1984), 223-243.

[2] W. B. Arveson, An approximation theorem for function algebras, unpublished manuscript, 1970.

[3] W. Holsztynski, Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous function, Studia Math. **124**(1966), 133-136.

[4] P. P. Korovkin, Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Pub., Delhi, India, 1960.

[5] S.-E. Takahasi, Korovkin's theorems for C*-algebras, J. Approximation Theory, **27**(1979), 197-202.

[6] S.-E. Takahasi, Korovkin type theorem on C[0,1], Proc. IMACS Internat. Sympo. Approximation, Optimization and Computing,

Dalian(1989) Edited by A. G. Law and C.-L. Wang.

[7] 高橋眞映, ４次函数に対する、C[0,1] 上の Korovkin-Wulbert 作用素、実解析セミナー（１９８９）。

[8] D. E. Wulbert, Conbergence of operators and Korovkin's theorem, J. Approximation Theory, **1**(1968), 381-390.