数理解析研究所講究録
第743巻 1991年 120-129

Variegationについて

いずみ荘研　加藤佳宣（ Yoshinobu Kato ）
大阪教育大　綿谷安男（ Yasuo Watatani ）

（執筆者・加藤）上記講演者両名は、以上の標題で十二月二十一日に数理研において研究発表をさせて頂いた。その講演は近々投稿予定である

Y. Kato and Y. Watatani, A similarity between operator theory and universal algebra, preprint

の内容に沿うものであり、前半加藤、後半綿谷として行なった。前半部の内容は約三年前の数学会での加藤の講演と同様であり、その折りの静けさに懲りて今回は雑談風解説の形を採ってみたが概ね好評を頂けた。後半部の内容はその後の主に綿谷(氏)の大奮闘による研究の進展である。氏の講演は本来の専門とみられている作用素環論での個性的なスタイルを崩すことなく巧みに話を締めて下さった。今回は飛び入りに近い参加だったので、実の処相当心配だったが、こうした訳で何とか主催者の方や参加者の方々にそれ程ご迷惑は

お掛けせずに済んだのではないだろうかと、ほっとしている次第である。(但し日程変更については大変だったようである。)

ここまで読んでこられた方の中には幾つかのご不審をお持ちになられた方も多いかも知れない。多分それは、畑違いの綿谷(氏)と加藤との飛び入りの共同研究発表の事情、ということに集約されると思われる。誤解を生まない為に少しそのあたりのことを説明させて頂きたい。

加藤は約十年前に不本意ながら研究室から独立して在野(アマチュア)の研究者を名乗ることとなり、自宅を「いずみ荘研」と誇称して作用素論を続けてきた。やはり研究機関としては連絡先に公的機関を考えてしまうようで、その為非常勤講師を転々とする加藤が幾度も旧い勤務先の方々にご迷惑をお掛けしてきたからである。いずみ荘研は全く所員一名きりで、以来その研究活動を何とか続けてくることが出来たのだが、今から約三年前に、一区切りつける意味で昔の研究テーマを振り返り十年前の話を見直して数学会の講演を行なってみた。講演後の反響は残念にも乏しかったが、綿谷(氏)が昔懐しい話ということでただ一人、具体的に証明の中味にまで踏み込んだ批評をぶつけ、結局それが発展して共同研究の形になって行ったという訳である。こうして約三年がかりでどうやらvariegationの話に一応の形が整ってきたが、しかし再度研究発

表をするつもりはなかった。 これらの内容を踏まえた話はorthomodular束論に関して数学会で講演させて頂いたものの、作用素論関係の研究集会の案内通知はこれも約三年前から、水準の低さに呆れられてか、全く来なくなっていたからである。 在野(アマチュア)の立場で無理に押しかける気もなく、綿谷(氏)も作用素論は畑違いで、ともかくも論文作りに努めていた処、どうした訳か今回は主催者からの案内をいずみ荘研究に頂いた。

大変有難いお申し出であったのだが、今回の研究集会のテーマに余り沿わないのではないかという懸念と、毎年末のアルバイトなどの日程調整の不安がどうしても積極的に動けなかった理由である。 それが講演者の顔ぶれも決まり、開催の直前になって、再び今度は数理研からの公式なご案内通知を頂くことになった。 そこで急遽綿谷(氏)と連絡を取り合い分担を決めて共同講演をさせて頂くことに決めた。 これが飛び入りの事情であり、この為に日程の変更をお願いすることになってしまった諸先生方には深くお詫び申し上げたい。幸いに両名共うまく日程の都合がついて、無事共同発表をさせて頂くことが出来、この原稿も書かせて頂けることになった次第である。 改めて、主催者の方、研究集会参加の方々並びに数理研の皆様方に心からの感謝を捧げたい。

すっかり前置きが長くなってしまったので急いで本論へ入っていく。 さて、variegation(色彩—私訳「彩」)というのは、普遍代数(universal algebra)での重要な概念であるvariety(私訳「博」)の作用素論での或る種の対応物を目論んで、私的に導入したものである。 彩の観点から、

[1] M. Fujii, M. Kajiwara, Y. Kato and F. Kubo, Decompositions of operators in Hilbert spaces, Math. Japon., 21 (1976), 117–120.

[2] F. Kubo, On algebraically definite operators, Math. Japon., 21 (1976), 23–35.

などで考究されてきた作用素の分解定理がかなり見通しよく扱える。 更に、上と独立に展開されてきた

[3] A. Brown, C.-K. Fong and D. W. Hadwin, Parts of operators on Hilbert space, Illinois J. Math., 22 (1978), 306–314.

[4] D. W. Hadwin, Continuous functions of operators: A functional calculus, Indiana Univ. Math. J., 27 (1978), 113–125.

の文脈に関連して、彩と(Hadwinの)非可換スペクトルとの間に密接な関係のあることも判る。 こうしたことから、彩はかなり自然な概念ではないかと思われる。

以下では作用素とは或るHilbert空間上の有界線形作用素のこととする。 任意の作用素が一意的にunitary part Uとcompletely-non-unitary part Cの直和U ⊕ Cに分解される(但し、UかCは空で

あってもよい)というのはよく知られた事実である。このような作用素の分解定理がunitary以外にどのような作用素族について成立するかを問うことは興味深い。その一つの十分条件は、algebraically definiteな作用素族であればよいというものである([1],[2])。unitaryは二つの非可換多項式 $p_1(z,z^*)=z^*z-1$, $p_2(z,z^*)=zz^*-1$ (zとz^*の二変数多項式)に対して $p_1(U,U^*)=0$ かつ $p_2(U,U^*)=0$ を満たすものとして規定される。一般に、一つの作用素族 $\mathscr{S}$ が、或る非可換多項式の族 $\{p_\lambda(z,z^*)\}$ によって

$$\mathscr{S} \ni U \iff p_\lambda(U,U^*)=0 \ (\forall\lambda)$$

として規定されるとき、$\mathscr{S}$ をalgebraically definiteであるという。この定義は普遍代数におけるequational classの概念を直ちに連想させる。それは一つの代数系の中で、或る等式関係族によって規定された族のことである。例えば、その代数系が環だとすれば、環の中で可換環の族は $ab=ba$ という等式関係を満たすものとして規定できるからe.q.である。他方e.q.の概念はvarietyの概念と密接に関連している。varietyとは一つの代数系の中で、(1)(任意個の)直和 (2)準同型写像での像 (3)部分代数 に対して閉じている族のことをいう。代数系が環である場合、可換環全体はvarietyとなるが、体の全体はそうではない。体の直和は体にはならないからである。

明らかにe.q.であればvarietyとなる。この逆も成立する

こと、すなわちe.g.とvarietyが実質的に同値な概念であることを主張するのが有名なG. Birkhoffの定理である。こう考えてくるとき、alg. def.という条件をvarietyの条件(1), (2), (3)に対応した作用素での条件に置き換えてみればよりすっきりした分解定理の十分条件が得られるのではないかと思いつく。

こうして出来上がったのが、このvariegation(彩)の定義であった。

定義. 作用素族$\mathcal{S}$が彩であるとは (1)′ $\{S_\lambda\}\subset\mathcal{S}$, $\sup\|S_\lambda\|<\infty$ $\Rightarrow \oplus S_\lambda\in\mathcal{S}$ (2)′ $S\in\mathcal{S}$, Sと1で生成したC^*環$C^*(S)\xrightarrow{\pi}B(K)$

($B(K)$はHilbert空間K上の作用素全体、πは単位的*準同形写像を表す)

$\Rightarrow \pi(S)\in\mathcal{S}$ ((3)′にあたる条件はこの場合、(2)′から自動的に出る。)

明らかにalg. def.な作用素族は彩となっている。$e^T-1=0$を満たす作用素族は彩であるがalg. def.ではないことが判るので、彩はalg. def.よりも真に広い概念となる。それにしても、$U^*U-1=UU^*-1=0$という単純なunitaryの条件をわざわざ全unitary(作用するHilbert空間も任意)の成す、必然的に集合とはならないクラスとして考えようとするのには抵抗を覚えるかも知れない。実際には、それが集合でないことからくる技術的な問題はこの場合まず本質的なものにはならないし、むしろ、全unitaryを考えるということは操作上の自由感を増してくれる。

更に言えば、もともと作用素の分解においてそのunitary partの作用する空間を固定させずに考える方が自然であるとも思う。

そて、以下$\mathcal{S}$を彩とする。 このとき、作用素の$\mathcal{S}$-part, $\neg\mathcal{S}$-part ($\neg$はcompletely-non-)がunitaryの場合に倣って定義される。そして次の定理が成立する。

定理1. 任意の作用素Tは一意的に$\mathcal{S}$-partと$\neg\mathcal{S}$-partの直和に分解される。 すなわちTのreducing subspace $\mathfrak{M}$が一意的に存在して、$T|_{\mathfrak{M}} \in \mathcal{S}$, $T|_{\mathfrak{M}^\perp} \in \neg\mathcal{S}$

この定理は直観的にかなり判り易い証明を持つ。 但し細部の技術的部分はそれ程自明ではないので以下証明の素描のみにとどめる。

略証. $T \notin \mathcal{S}, \neg\mathcal{S}$ の場合が本質的である。 このとき

$$\Lambda = \{\mathcal{K}\,;\ \text{nonzero reducing subspace } \mathcal{K} \text{ of } T \text{ with } T|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{S}\},$$

$\mathfrak{M} = \bigvee_{\mathcal{K}\in\Lambda} \mathcal{K}$, $S = T|_{\mathfrak{M}}$ と置く。 まず$S \in \mathcal{S}$を示す。彩の条件(1)'より$W = \bigoplus_{\mathcal{K}\in\Lambda} \mathcal{K} \in \mathcal{S}$である。 $C^*(W) \xrightarrow{\pi} B(\mathfrak{M})$という単位的*準同形写像$\pi$を、$\pi(p(W,W^*))x = p(T|_{\mathcal{K}}, T^*|_{\mathcal{K}})x \quad \forall x \in \mathcal{K}$で定義すれば(実は、これがwell-definedであることは技術的にはそれ程自明ではない)、$S = \pi(W)$であり、条件(2)'により$S \in \mathcal{S}$が言える。 こうして$\mathfrak{M}$が$T|_{\mathfrak{M}} \in \mathcal{S}$となる最大のreducing subspaceであることが判ったのでこれを利用してもう少し論証を進めて行けば残りはそれ程困難ではない。

この定理の系として、$\neg(\neg\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ が得られる。

このことは$\neg\mathcal{S}$に対しても分解定理が成立するということ

であるが、これを従来明記した文献は見当たらないように思える。 さて、simple unilateral shift を全unitaryの成す彩で考えてみれば判るように、一般に $\neg\mathcal{S}$ は彩になるとは限らない。 そこで、彩というものが一体定理1の成り立つ条件としてどの程度強い条件であるのかが、改めて問題となってくる。 これについては次のことが判った。(証明は略す。)

定理2. $\mathcal{S}$ が彩である必十条件は、$\mathcal{S}$ が (a) 定理1を満たし、(b) unitary同値性の下で閉じており、(c) $\mathcal{S} \cap B(\mathcal{H})$ が任意のHilbert空間 $\mathcal{H}$ に対してノルム閉、であることである。

ところで上での条件(a), (b) を満たすような族 $\mathcal{S}$ は [3]でpart-classと呼ばれているものに等しいことが示せる。 この方向から彩と[4]でのHadwinのdecomposable functionとの間に密接な関連が予想されてくる。

定義. 全作用素の族 $\bigcup B(\mathcal{H})$ の上の関数 ϕ がdecomposable functionであるとは (i) $\phi(B(\mathcal{H})) \subset B(\mathcal{H})$ $(^\forall\mathcal{H})$ (ii) $\mathcal{M}$ が T のreducing subspaceならば、$\phi(T)$ のreducing subspaceともなり、かつ $\phi(T|_{\mathcal{M}}) = \phi(T)|_{\mathcal{M}}$ (iii) $T \in B(\mathcal{K})$, $\mathcal{K} \xrightarrow{U} \mathcal{H}$: unitaryならば、$\phi(U^*TU) = U^*\phi(T)U$

[4]の原定義では ϕ の作用する領域はもっと制限された集合であるがそれをこのように拡張することは難しくない。 ϕ の値は可算次元までの $\mathcal{H}$ により決まってしまうからである。

この概念が重要なのは、それが作用素の非可換スペクトル上のL^∞関数のようなものに相当しているからである。もしこのΦが更に各$B(\mathcal{H})$に対して$\Phi|B(\mathcal{H})$：ノルム連続、を満たすとき、n.c. decomp. funct. という。これは非可換スペクトル上の連続関数にあたっている。

彩$\mathcal{S}$とdecomp. funct. Φとの関連は実は直観的には次のように簡潔なものになる。「$\mathcal{S} = \ker\Phi$」但し具体的には次の命題は現在予想のままに置かれている。

予想．$\mathcal{S}$が彩である必十条件は、或るn.c. decomp. funct. Φが存在して$\mathcal{S}$が$\Phi(T)=0$を満たすTの全体と一致することである。(Birkhoffの定理の対応物)

しかし次の部分的結果は得られている。

定理3．$\mathcal{S}$が彩である必十条件は、任意の正数$\varepsilon > 0$に対して或るn.c. decomp. funct Φ_εが存在して$\mathcal{S}\cap\{T ; \|T\| \leq \varepsilon\}$が$\Phi_\varepsilon(T) = 0$を満たすTの全体と一致することである。

この予想の困難さは、[4]での未解決問題Remark Bに本質的に関係したものである。

以上が大体、加藤綿谷両名の講演の内容である。作用素の分解定理のすっきりした取り扱いを目論んで普遍代数でのvarietyに並行した話を作る為に導入した彩であるが、これが

非可換スペクトルといったものと関連しているというふうになってくると夢は在野(アマチュア)なりに膨らんでくる。 逆にその非可換スペクトルの概念を普遍代数の中へ投げ返せないものだろうかと思うのである。 普遍代数の代表的実例の一つであるorthomodular束論に関してそこに彩の話の対応物を展開する試みについては不満足な出来ながら、昨秋の数学会で発表させて頂いた。 彩の定義は圏の文法と馴染みが良さそうにも感じられるので、この方向からの発展もあるかも知れない。 なお、圏でvarietyを考えた文献が昔出ているが、この方向も新しい発展が可能ならば面白いと思う。 他にも様々な方向からvarietyを考究した文献は多数あり、現在も研究は進められていてAMS分類でも08Bxxという一項目を形成している。 ところが加藤綿谷共に日本では現在その分野の研究者に心当たりがなく、いささか難渋しているのが本当である。 自習も心もとないし、何より在野(アマチュア)にとって乏しい研究時間を削られるのは辛い。 夢を感じる分野だけに、もどかしさが募っている。

いろいろと勝手なことを、在野(アマチュア)の特権のようにして書きつけさせて頂いたが、お読み流し頂ければと思う。 また本稿は綿谷(氏)が超多忙な為、加藤が引き受けたもので純数学的部分を除き氏には全く文責はないことも申し添えて置きたい。