数理解析研究所講究録
第743巻 1991年 130-140

関数空間における線型等長写像について

山形大理　岡安　隆照　(Takateru Okayasu)
山形大理　高垣真理子　(Mariko Takagaki)

§1　X, Y を compact Hausdorff space, C(X), C(Y) をそれぞれ X, Y 上の実数値, あるいは複素数値, 連続関数の全体が sup norm の下で作る Banach 環とする (以下とも). よく知られているように, C(X) と C(Y) が環同型であることと, X と Y が同相であることは同値である (Gel'fand-Kolmogorov).

C(X) と C(Y) が等長線型同型であることもまた, X と Y が同相であることと同値である (Banach-Stone).

<u>定理1</u>　T が C(X) から C(Y) の上への線型等長写像ならば, Y から X への同相写像と絶対値 1 の Y 上の連続関数 w が存在して

$$(Tf)(y) = w(y) f(h(y)), \quad f \in C(X),\ y \in Y$$

が成り立つ.

このように上への線型等長写像の構造は明瞭である.
中への線型等長写像についてはつぎの定理が知られているのみである:

<u>定理2 (Holsztyński [6])</u> T が $C(X)$ から $C(Y)$ への線型等長写像ならば, 条件

(*) $f \in C(X)$, $\|f\| = |f(x)| = 1$ ならば $|(Tf)(y)| = 1$

を満たす Y の要素の全体 Y_0 は Y の閉部分集合で, 任意の $y \in Y_0$ に対して (*) を満たす X の要素 $x = h(y)$ は一意に定まり, こうして得られた写像 h は X の上への連続写像である. 更に Y 上の連続関数 w が存在して

$$(Tf)(y) = w(y)f(h(y)), \quad f \in C(X), \quad y \in Y_0,$$
$$|w(y)| = \|w\| = 1, \quad y \in Y_0$$

が成り立つ.

T が順序の構造を保存するときには, $w = T1$ は Y_0 上で定数 1 になる:

<u>定理3</u> T が $C(X)$ から $C(Y)$ への順序線型等長写像ならば,

$$(Tf)(y) = f(h(y)), \quad f \in C(X), \quad y \in Y_0$$

が成り立つ (Gęba - Semadeni [4]). そしてもしも像 $N = T(C(X))$ が Y 上の関数空間ならば Y_0 は N の Šilov 境界である (Bauer [2]).

§2 一般に$C(X)$の部分空間Mが関数空間であるとはMが定数関数を含み(unital), Xの点を分離する(分離的である)ときにいう. また$C(X)$の複素数値関数の閉部分代数Aが関数環であるとはそれが同時に関数空間であるときにいう.

関数環や関数空間の線型等長写像については個別にいろいろな研究がある([3], [8], [9], [11]). また関数空間の枠をこえて, 種々のBanach空間やBanach環の線型等長写像については多様な結果が得られている(C^*環については周知のとおり[7]).

私達は上掲の定理2を関数空間に一般化し, 併せてY_0の性格を明確にしたい. そして関数空間の等長線型写像について既に知られている結果に統一的な視座を与えることを目指したい.

§3 $\Gamma \subset X$が関数空間Mの境界であるとは, 任意の$f \in M$に対して$x \in \Gamma$が存在して

$$\|f\| = |f(x)|$$

が成り立つときにいう. 任意の関数空間Mは最小の閉境界, つまりŠilov境界Γ_M, をもつ.

$\varphi \in M^*$が

$$\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$$

を満たすときφはMのstateであるという．Mのstateの全体を$\mathcal{S}_M$と書く．$\mathcal{S}_M$はM^*のw^*-compact convex setである．$\Phi(x)$を$x\in X$におけるMの関数のevaluationとすると$\mathcal{S}_M$は$\Phi(X)=\{\Phi(x):x\in X\}$の$w^*$-closed convex hullと一致するから，$\Phi(X)$は$\mathcal{S}_M$の端点の全体ext $\mathcal{S}_M$を含む．そして

$$\partial_M=\Phi^{-1}(\mathrm{ext}\,\mathcal{S}_M)$$

はMの境界となる．これがMのChoquet境界である．Choquet境界はその表現測度が一意であるXの点の全体である．また，

$$\overline{\partial_M}=\Gamma_M$$

が成り立つ([10])．

C(X)の分離的な部分空間Mがunitalでないとき$\mathcal{S}_M$を

$$\{\varphi\in M^*:\|\hat{\varphi}\|=1\}$$

で代えることにする．ただし

$$\hat{\varphi}(f+\alpha)=\varphi(f)+\alpha\ ,\quad \varphi\in M,\ f+\alpha\in\hat{M}\equiv M+\mathbb{C}$$

とする．

この$\mathcal{S}_M$もまたM^*のw^*-compact convex setで$\Phi(X)$のw^*-closed convex hull $\overline{\mathrm{co}}\,\Phi(X)$に等しい．したがって再び，$\Phi(X)\supset\mathrm{ext}\,\mathcal{S}_M$である．そして$\Phi^{-1}(\mathrm{ext}\,\mathcal{S}_M)$はMの境界である．

Mがunitalかそうでないかを問わずに$\Phi^{-1}(\mathrm{ext}\,\mathcal{S}_M)$を$\partial_M$と書くことにする．

次にMをC(X)の一般の部分空間とする．

$$x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2), \quad {}^\forall f \in M$$

によって同値関係～を定義し，この同値関係によるXの商空間を$\tilde{X}$，商写像を$(\ )^{\sim}$とする．$\tilde{X}$はcompact Hausdorff spaceである．

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x), \quad f \in M, \quad x \in X$$

とする．写像$f \longrightarrow \tilde{f}$はMから$C(\tilde{X})$への線型等長写像で，もしもMがunitalならばunital（定数関数1を定数関数1に写す）である．またその像$\tilde{M}$は分離的である．また

$$\tilde{\phi}(\tilde{x})(\tilde{f}) = \phi(x)(f) = f(x),$$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{f}) = \varphi(f)$$

とおく．そして

$$\Delta_M = \bigcup_{\tilde{x} \in \Delta_{\tilde{M}}} \tilde{x} = \bigcup_{\tilde{\varphi} \in \mathrm{ext}\, S_{\tilde{M}}} \phi^{-1}(\tilde{\varphi})$$

とおく．これはMの境界である．

§4　$C(X)^*$の閉単位球$(C(X)^*)_1$の端点はつぎの定理によって特徴づけられる：

<u>定理4（Arens-Kelley [1]）</u>

$$\mathrm{ext}\,(C(X)^*)_1 = \mathbb{T}\,\phi(X) = \{\lambda\,\phi(x) : \lambda \in \mathbb{T},\ x \in X\}$$

$(\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\})$．ただし$C(X)$が実数値関数から成るときには$\mathbb{T}$を$\{-1, 1\}$で置き換えるものとする．

この定理をC(X)の部分空間に拡張しよう．

<u>定理5</u>　C(X)の部分空間MがunitalならばM^*の閉単位球を$(M^*)_1$として

$$\mathbb{T}\Phi(\Delta_M) \subset \mathrm{ext}\,(M^*)_1 \subset \mathbb{T}\Phi(\overline{\Delta_M}).$$

ただし右側のinclusionはMがunitalでなくても成り立つ．

また，C(X)が実数値関数から成るときには$\mathbb{T}$を$\{-1,1\}$で置き換えるものとする．

右側のinclusionの証明の概略を述べよう．

Mは分離的であるとし，$X=\overline{\Delta_M}$であるとしてよい．$\varphi \in \mathrm{ext}\,(M^*)_1$とすると$\|\varphi\|=1$で$\exists \psi \in C(X)^*$：

$$\psi|_M = \varphi \quad \text{かつ} \quad \|\psi\| = \|\varphi\| = 1.$$

ψをX上のregular Borel measure μと同一視する．supp μがsingletonであれば議論は不要であるから，2個以上の点を含んでいるとしよう．

もしも$x_1, x_2 \in \mathrm{supp}\,\mu$，$x_1 \neq x_2$ならば

$$\exists \text{ disjoint open sets } V_1 \ni x_1,\ V_2 \ni x_2.$$

そこで

$$\mu_1 = \mu|_{V_1}, \quad \mu_2 = \mu|_{V_1^c}$$

とおく．すると

$$\mu_1, \mu_2 \neq 0, \ \mu = \mu_1 + \mu_2, \ \|\mu\| = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|.$$

$\mu|M = \|\mu_1\|\left(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}\Big|M\right) + \|\mu_2\|\left(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|}\Big|M\right)$, $\varphi \in ext(M^*)_1$ であるから

$$\varphi = \mu|M = \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}\Big|M = \frac{\mu_2}{\|\mu_2\|}\Big|M$$

よって $^\forall f \in M$ に対して

$$\int f\,d\mu = \frac{1}{\|\mu_1\|}\int f\,d\mu_1 = \frac{1}{\|\mu_1\|}\int_{V_1} f\,d\mu_1 = \frac{1}{\|\mu_2\|}\int_{V_1} f\,d\mu_2 = 0.$$

これは不都合である.

§5 次の定理が私達の目的の定理である:

<u>定理6</u> T が X 上の関数空間 M から $C(Y)$ への線型等長写像ならば, N を M の T による像とするとき, N の閉境界 Γ から M の Šilov 境界 Γ_M の上への連続写像 h, Y 上の連続関数 w で

$$|w(y)| = \|w\| = 1, \quad y \in \Gamma$$

を満たすものが存在して

$$(Tf)(y) = w(y)\,f(h(y)), \quad f \in M,\ y \in \Gamma$$

が成り立つ.

証明の概略を述べる. ただし $C(X)$, $C(Y)$ は複素数値関数から成るとする.

$x \in \partial M$ とすると, $\phi(x) \in ext(M^*)_1$. したがって定理5から

$$(T^{-1})^*\phi(x) \in ext(N^*)_1 \subset \mathbb{T}\,\phi(\overline{\partial N}).$$

ゆえに $^\exists v\in\mathbb{T},\ y\in\overline{\Delta_N}$:

$$(T^{-1})^*\phi(x)=v\,\phi(y),\ \text{i.e.}\ (T^{-1}g)(x)=v\,g(y),\ {}^\forall g\in N.$$

いま

$$\mathcal{P}=\{(x,y)\in X\times Y : {}^\exists v\in\mathbb{T}\ \text{s.t.}\ (T^{-1})(x)=v\,g(y),\ {}^\forall g\in N\}$$

とおく．これは compact．そして

$$\Gamma_M=\overline{\partial M}\subset\{x\in X : {}^\exists y\in Y\ \text{s.t.}\ (x,y)\in\mathcal{P}\}$$

が成り立つ．また

$$\Delta=\{y\in Y : {}^\exists x\in X\ \text{s.t.}\ (x,y)\in\mathcal{P}\},$$

$$\Gamma=\{y\in Y : {}^\exists x\in\Gamma_M\ \text{s.t.}\ (x,y)\in\mathcal{P}\}$$

とおく．${}^\forall y\in\Delta$ に対して $(x,y)\in\mathcal{P}$ を満たす x が一意に定まり，しかも写像 $y\mapsto x$ が連続であることがわかる．一方 Γ は N の閉境界である．実際 Γ が閉集合であることは明らかである．また ${}^\forall g\in N$ に対して ${}^\exists x\in\Gamma_M$:

$$|(T^{-1}g)(x)|=\|T^{-1}g\|=\|g\|.$$

この x に対して ${}^\exists y\in\Gamma,\ v\in\mathbb{T}$:

$$\|g\|=|(T^{-1}g)(x)|=|v\,g(y)|=|g(y)|.$$

よって Γ は N の境界である．

$y\in\Delta$ を x に写す写像を Γ 上で考えて h と記す．これは Γ_M の上への連続写像になる．v は $y\in\Gamma$ に依存するから改めて $v(y)$ と書くと

$$f(h(y))=v(y)(Tf)(y),\quad f\in M,\ y\in\Gamma.$$

よって

$$1 = v(y)(T1)(y), \quad y \in \Gamma.$$

したがって $w = T1$ とおけば定理の条件が成り立つことがわかる.

<u>定理7</u> 前定理でもしも X が Stonean space ならば Γ を N の極小の閉境界にすることができる.

なぜならば h^{-1} は upper semicontinuous であるから次の定理によって continuous selection σ をもつことがわかる.

<u>定理8 (Hasumi [5])</u> X を extremally disconnected Hausdorff space, Y を regular Hausdorff space, Y の空でない compact subset の全体を $\mathcal{F}_c(Y)$, ψ を X から $\mathcal{F}_c(Y)$ への upper semicontinuous map とする. このとき ψ は continuous selection をもつ.

したがって定理6から $\sigma(\Gamma_M)$ は N の極小の閉境界であることがわかる.

なお, ψ が upper semicontinuous であるとは, 任意の open set $U \subset Y$ に対して $\{x \in X : \psi(x) \subset U\}$ が X の open set になるこ

とである.

References

[1] R. F. Arens and J. L. Kelley, Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 265-274.

[2] H. Bauer, Šilovshe Rand und Dirichletsche Problem, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 11 (1961), 89-136.

[3] M. El-Gebeily and J. Wolfe, Isometries of the disc algebra, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), 697-702.

[4] K. Gęba and Z. Semadeni, Spaces of continuous functions (V), Studia Math. 19 (1960), 303-320.

[5] M. Hasumi, A continuous selection theorem for extremally disconnected spaces, Math. Ann. 179 (1968), 83-89.

[6] W. Halsztyński, Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous function, Studia Math. 26 (1966), 133-136.

[7] R. V. Kadison, Isometries of operator algebras, Ann. Math. 54 (1951), 325-338.

[8] A. J. Lazer, Affine products of simplexes, Math. Scand. 22 (1968), 165–175.

[9] J. N. McDonald, Isometries of function algebras, Ill. Journ. Math. 17 (1973), 579–583.

[10] R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem, Van Nostrand Math. Studies 7, 1966.

[11] T. S. S. R. K. Rao, Isometries of $A_C(K)$, Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), 544–546.