

自由境界問題のラグランジュ有限要素近似

電気通信大学 田端正久 ( Masahisa Tabata )  
電気通信大学 ( 院 ) 小林俊雄 ( Toshio Kobayashi )

0. はじめに

自由境界を有する流れ問題では、流れに伴って変化する解析領域を追跡しなければならない。その手法には、これまで、ラグランジュ座標系を使う方法とオイラー座標系を使う方法とが用いられてきた。我々は、非圧縮粘性流体の自由境界問題をラグランジュ座標系に基づいたスキームで解析を行なう。

ラグランジュ有限要素近似<sup>[1], [2]</sup>は、各時間ステップでの流体粒子の運動を求め、すべての要素を粒子と共に移動させる。自由境界は粒子の動きに従って自然に近似される。

自由境界では、表面張力も考慮する。従って、曲率の計算が必要である。

数値例として、テスト問題を設定し近似解の収束性を数値的に示す。液滴の振動問題・液滴の落下問題を考え、現象の時間的変化を観察する。

1. 自由境界問題

時刻  $t$  に流体の占める空間領域を  $\Omega(t)$  とする。  $\Omega(t)$  は  $R^2$  で有界で、自由境界を表わす未知関数  $\eta$ 、

$$\eta: R^2 \times (0, T) \rightarrow R$$

によって

$$\Omega(t) = \{x \in R^2; \eta(x, t) > 0\} \tag{1}$$

と定義される。ここに  $T$  は時刻を表わす正定数である。  $Q(T)$  を

$$Q(T) = \{(x, t); x \in \Omega(t), 0 < t < T\} \tag{2}$$

と定義する。  $Q(T)$  上でナビエ・ストークス方程式

$$\frac{Du}{Dt} - \nu \Delta u + \text{grad } p = f, \tag{3a}$$

$$\text{div } u = 0 \tag{3b}$$

が成立する。ここに、  $u: Q(T) \rightarrow R^2$  ,  $p: Q(T) \rightarrow R$  はそれぞれ流速、圧力を表わす未知関数、  $\nu$  は動粘性係数、  $f$  は外力、  $D/Dt$  は物質微分

$$D/Dt = \partial / \partial t + u \cdot \text{grad} \tag{4}$$

を示している。

境界では、適当な境界条件が与えられている。例えば、流速境界条件

$$u = g, x \in \Gamma_1(t), t \in (0, T), \tag{5}$$

表面張力を考慮した境界条件<sup>[4]</sup>

$$\sigma_{ij} n_j + \gamma \frac{1}{R} n_i = -p' n_i, x \in \Gamma_2(t), t \in (0, T), \tag{6}$$

が課せられており、未知関数  $\eta$  は

$$\frac{D\eta}{Dt} = 0, x \in \partial \Omega, t \in (0, T), \tag{7}$$

を満たしている。ここに、 $g$  は与えられた関数、 $\sigma_{ij}$  は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \nu(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (8)$$

$\gamma$  は表面張力係数、 $R$  は符号付き曲率半径（自由境界に接する接触円の半径で、その中心が流体側にあるとき  $R > 0$  とする）、 $p'$  は流体外の圧力、 $n$  は外向き単位法線ベクトルを示し、

$$\Gamma_2(t) = \partial\Omega(t) \setminus \overline{\Gamma_1(t)} \quad (9)$$

である。

流速に対する初期条件と、初期領域形状  $\Omega(0)$  は与えられている。

## 2. ラグランジュ有限要素近似

### 2.1 ミニ有限要素

空間方向の離散化には混合型有限要素法を用いる。我々は、流速にバブル関数付き三角形1次要素、圧力に三角形1次要素の組合せであるミニ有限要素を用いる。バブル関数付き三角形1次要素は頂点と重心に節点を持つ要素で、基底関数  $\phi$  は三角形の頂点で

$$\phi_i = \lambda_i - 9\lambda_i\lambda_j\lambda_k, \quad (10a)$$

三角形の重心で

$$\phi_{ijk} = 27\lambda_i\lambda_j\lambda_k \quad (10b)$$

である。ここで、 $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$  は面積座標である。この要素は、次の性質を持つ。

① この組合せは、Inf-Sup(LBB)条件を満足しているものの中で、最も自由度の少ない組合せの一つである。

② ミニ有限要素は、内部節点を持つので、静的縮約 (static condensation) を行なうことにより、解くべき連立方程式の大きさを縮小できる。

③ ミニ有限要素は、要素境界で基底関数が線形なので、要素移動を行なうラグランジュ有限要素近似に適している。

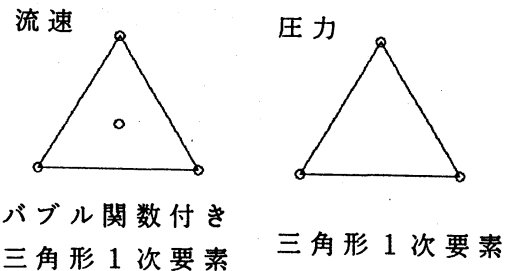


図1 ミニ有限要素

### 2.2 ラグランジュ有限要素近似

時間刻みを  $\tau$  とする。時刻  $n\tau$  での領域  $\Omega^n$  の要素分割に表れる節点位置  $x^n$ 、そこでの流速  $u^n$ 、圧力  $p^n$  が与えられているとき、 $\tau$  時刻後の領域  $\Omega^{n+1}$  の要素分割に表れる節点位置  $x^{n+1}$ 、そこでの流速  $u^{n+1}$ 、圧力  $p^{n+1}$  を求める。

そのために、中間流速  $u^{n+1/2}$  を導入する。これは、 $x^n$  にあった粒子の  $\tau$  時刻後の位置  $x^{n+1/2}$  での流速である。 $u^{n+1/2}$ 、 $p^{n+1}$  を離散化式、

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} - \nu \Delta u^{n+1/2} + \text{grad } p^{n+1} = f^n, \quad x \in \Omega^n, \quad (11a)$$

$$\text{div } u^{n+1/2} = 0, \quad x \in \Omega^n, \quad (11b)$$

$$u^{n+1/2} = g, \quad x \in \Gamma_1^n, \quad (12a)$$

$$\{-p^{n+1} \delta_{ij} + \nu(u_{i,j}^{n+1/2} + u_{j,i}^{n+1/2})\} n_j = -p n_i - \gamma \frac{1}{R^n} n_i, \quad x \in \Gamma_2^n \quad (12b)$$

で求める。  $x^{n+1/2}$  は

$$x^{n+1/2} = x^n + \tau \frac{u^{n+1/2} + u^n}{2} \quad (13)$$

で決定する。ここで、  $R^n$  は領域  $\Omega^n$  での符号付き曲率半径である。

この式により、各要素の4節点  $\{x_{v(i)}^n, i=1,2,3, x_b^n\}$  を4点  $\{x_{v(i)}^{n+1/2}, i=1,2,3, x_b^{n+1/2}\}$  に移すアインパラメトリック変換、

$$F = x_{v(1)}^{n+1/2} \phi_{v(1)} + x_{v(2)}^{n+1/2} \phi_{v(2)} + x_{v(3)}^{n+1/2} \phi_{v(3)} + x_b^{n+1/2} \phi_b, \quad (14)$$

が定まる。ここに、下付き添え字  $v(i), i=1,2,3$  は要素の頂点を、  $b$  は要素の重心を意味している。図2に示すように、一般に三角形の重心である  $x^n$  は、  $x^{n+1}$  での三角形の重心には移らない。

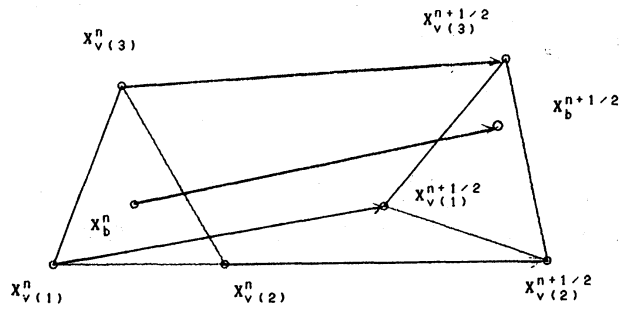


図2 節点にある粒子の移動

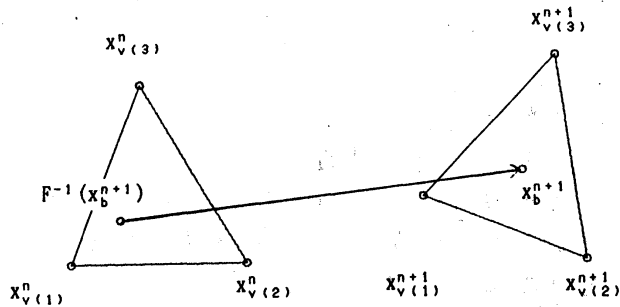


図3 重心に移動してくる粒子

そこで、  $x^{n+1}$  が頂点節点のとき

$$x_{v(i)}^{n+1} = x_{v(i)}^{n+1/2}, \quad i=1,2,3, \quad (15a)$$

バブル節点のとき

$$x_b^{n+1} = \sum_{i=1}^3 x_{v(i)}^{n+1} / 3 \quad (15b)$$

とする。

新しい節点の位置  $x^{n+1}$  での流速  $u^{n+1}$  は、

$$u^{n+1}(x^{n+1}) = u^{n+1/2}(F^{-1}(x^{n+1})) \quad (16)$$

で求める。(16)式によって求められた流速  $u^{n+1}$  は、  $\Omega^{n+1}$  での要素の頂点節点で  $u^{n+1/2}$  と等しく、バブル節点では重心  $x^{n+1}$  に移動してくる粒子の流速である。

(11)式はストークス方程式の差分化と一致するので、その一意可解性は Inf-Sup条件により保障されている。

(11) ~ (13)式によって自由境界を追跡することは、(7)式の自然な近似になっているので、未知関数  $\eta$  は数値計算において陽には現れない。

### 2. 3 曲率半径の計算

表面張力を考慮する際、自由境界上で、(12b)式の曲率半径 $R^n$ と外向き単位法線ベクトル $n$ を計算しなければならない。図4のように領域 $\Omega^n$ での自由境界上の連続する三節点を $P_{i-1}$ 、 $P_i$ 、 $P_{i+1}$ とする。節点 $P_i$ での曲率半径 $R^n(P_i)$ の計算は、これらの節点を通り、しかも、 $P_i$ を軸が通るような放物線を考え、その放物線の $P_i$ の位置での曲率半径を $R^n(P_i)$ とし、外向き単位法線ベクトルの方向は、放物線の軸方向とする。

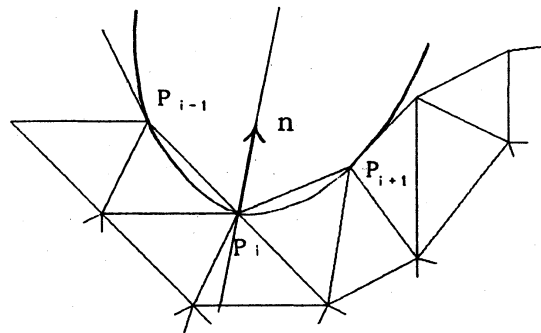


図4  $\Omega^n$ での自由境界付近の要素分割図

### 3. 数値結果

#### 3. 1 テスト問題

厳密解として流速・圧力を与え、設定したテスト問題を計算し、要素分割を細かくした時の厳密解と有限要素解との誤差を比較することにより、近似解の収束性を数値的に検証する。

厳密解は、 $u \in (H^2)^2$ 、 $p \in H^1$ 、 $\text{div } u = 0$ を満たし、時刻は $0 < t < 1$ とする。与える厳密解は以下の通りである。

①  $0 \leq x_1 < b$

$$u_1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} t^2, \quad (17a)$$

$$u_2 = 0, \quad (17b)$$

$$p = 1 - x_1 t. \quad (17c)$$

②  $b \leq x_1 < a$

$$u_1 = \frac{1}{6} (1-3x_2)^2 \left( \frac{x_1-b}{a-b} \right)^3 \left\{ 6 \left( \frac{x_1-b}{a-b} \right)^2 - 15 \left( \frac{x_1-b}{a-b} \right) + 10 \right\} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} t^2, \quad (18a)$$

$$u_2 = -5(x_2-x_2^3)^2 \left( \frac{x_1-b}{a-b} \right)^2 \left( \frac{x_1-b}{a-b} - 1 \right)^2 \frac{1}{a-b}, \quad (18b)$$

$$p = 1 - \frac{x_1-b}{a-b} - x_1 t. \quad (18c)$$

③  $a \leq x_1$

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}t^2, \quad (19a)$$

$$u_2 = 0, \quad (19b)$$

$$p = -x_1 t. \quad (19c)$$

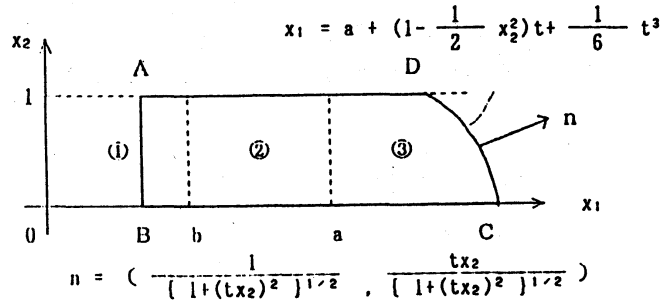


図5 テスト問題の解析領域

境界条件は、次のように与える。

AB上

$$u_1 = c(t), \quad u_2 = 0, \quad \int_{\Omega_B} p = \text{mes}(\Lambda B)(1 - x_1 t). \quad (20)$$

ここで、 $c(t)$ はAB上で一定値を持つ未知関数である。

BC上

$$\tau_1 = 0, \quad u_2 = 0. \quad (21)$$

CD上

$$\tau_1 + r \frac{1}{R} n_1 = \frac{-\nu t x_2^2 + x_1 t}{\{1 + (x_2 t)^2\}^{1/2}} + r \frac{t}{\{1 + (x_2 t)^2\}^2}, \quad (22a)$$

$$\tau_2 + r \frac{1}{R} n_2 = \frac{-\nu x_2 + x_1 x_2 t^2}{\{1 + (x_2 t)^2\}^{1/2}} + r \frac{t^2 x_2}{\{1 + (x_2 t)^2\}^2}. \quad (22b)$$

DA上

$$\tau_1 = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x_1 < b, \\ -\nu \left(\frac{x_1 - b}{a - b}\right)^3 \left\{ 6 \left(\frac{x_1 - b}{a - b}\right)^2 - 15 \left(\frac{x_1 - b}{a - b}\right) + 10 \right\} & , b \leq x_1 < a, \\ -\nu & , a \leq x_1, \end{cases} \quad (23a)$$

$$u_2 = 0. \quad (23b)$$

ここで、

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j, \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

である。

初期領域形状  $\Omega(0)$ を図6のように与え、流速に対する初期条件として厳密解より定まる流速を与える。

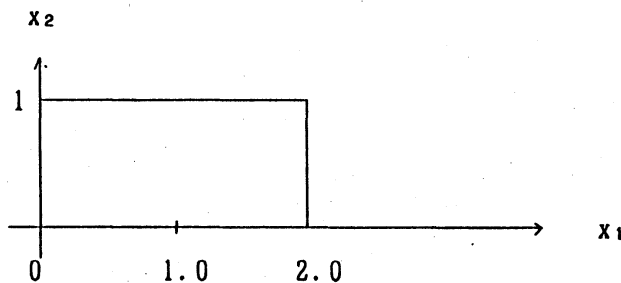
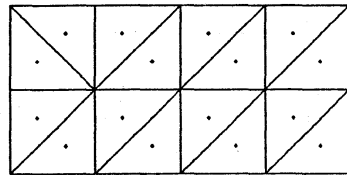
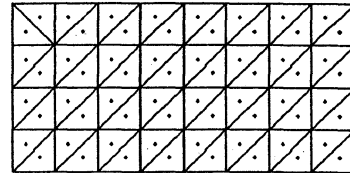


図6 初期領域形状 (a=2.0, b=1.0)

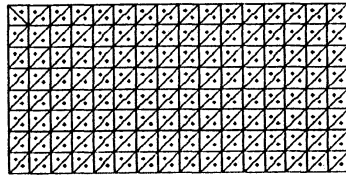
図7に初期要素分割を示す。計算は、図7のそれぞれの要素分割について行い、 $\nu=0.1$ 、表面張力を考慮しない場合として $\gamma=0.0$ 、表面張力を考慮した場合として $\gamma=1.0$ とする。



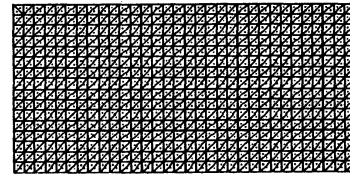
$$\text{mesh1}, h = \frac{1}{2}$$



$$\text{mesh1}, h = \frac{1}{4}$$



$$\text{mesh1}, h = \frac{1}{8}$$



$$\text{mesh1}, h = \frac{1}{16}$$

図7 初期要素分割図 (h: 要素サイズ)

厳密解と有限要素解との誤差は相対 $L^2$ ノルム,

$$\text{流速: } \frac{\max_{0 \leq t \leq 1} \|u_h(t) - u(t)\|_{0,2,\Omega_h(t)}}{\max_{0 \leq t \leq 1} \|u(t)\|_{0,2,\Omega_h(t)}} \quad (25a)$$

$$\text{圧力: } \frac{\max_{0 \leq t \leq 1} \|p_h(t) - p(t)\|_{0,2,\Omega_h(t)}}{\max_{0 \leq t \leq 1} \|p(t)\|_{0,2,\Omega_h(t)}} \quad (25b)$$

で計算する。

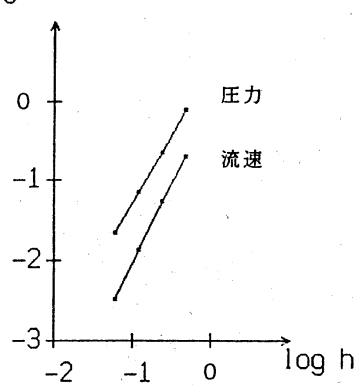
表1は表面張力を考慮しないテスト問題の計算結果で、図8は横軸に要素サイズ、縦軸に誤差の相対 $L^2$ ノルムとする両対数グラフ、図9は $t=1.0$ での要素分割図である。図8でのグラフの傾きは、流速が2.0、圧力が1.7である。この計算結果から近似解の収束性が確認できる。

表2は表面張力を考慮したテスト問題の計算結果で、図10は横軸に要素サイズ、縦軸に誤差の相対 $L^2$ ノルムとする両対数グラフ、図11は $t=1.0$ での要素分割図である。図10でのグラフの傾きは、流速が1.3、圧力が1.6であり、表面張力を考慮しない場合に対し、傾きが悪くなっている。これは、表面張力の計算(曲率半径の計算)の精度改善の可能性を示している。しかし、誤差が収束傾向にあることは確認できる。

表 1 表面張力を考慮しないテスト問題の計算結果

要素分割	mesh1	mesh2	mesh3	mesh4	
h	0.5	0.25	0.125	0.0625	
時間刻み	0.5	0.125	0.03125	0.0078125	
誤差	流速	0.2051E+00	0.5490E-01	0.1325E-01	0.3252E-02
	圧力	0.7713E+00	0.2269E+00	0.7123E-01	0.2196E-01

log ERROR



流速 傾き = 2.0  
 圧力 傾き = 1.7

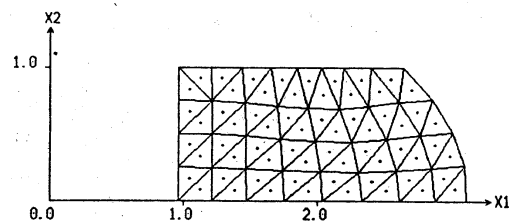


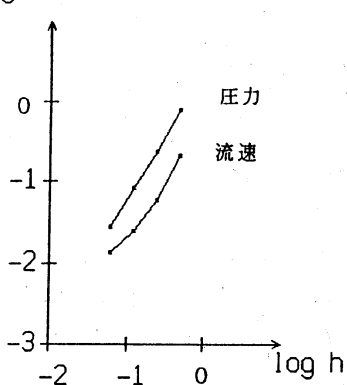
図 8 表面張力を考慮しないテスト問題の誤差

図 9 要素分割図 (mesh2, t=1.0)

表 2 表面張力を考慮したテスト問題の計算結果

要素分割	mesh1	mesh2	mesh3	mesh4	
h	0.5	0.25	0.125	0.0625	
時間刻み	0.5	0.125	0.03125	0.0078125	
誤差	流速	0.2122E+00	0.5877E-01	0.2473E-01	0.1355E-01
	圧力	0.7773E+00	0.2396E+00	0.8431E-01	0.2796E-01

log ERROR



流速 傾き = 1.3  
 圧力 傾き = 1.6

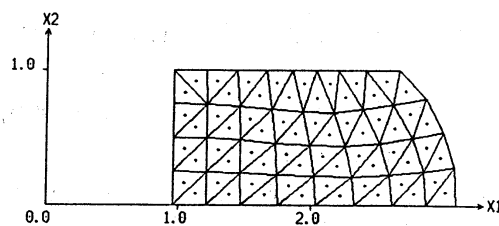
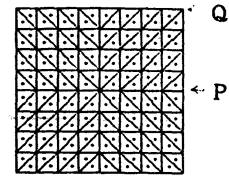


図 10 表面張力を考慮したテスト問題の誤差

図 11 要素分割図 (mesh2, t=1.0)

3. 2 液滴の振動問題

静止した正方形領域を考え、表面張力の影響で領域がどのように変化するかをレイノルズ数と表面張力係数を変えて観察する。問題は無次元化しており、初期領域の正方形の一辺の長さは1.0である。境界では、表面張力を考慮した境界条件を与え、流速に対する初期条件 $u=0$ 、流体外の圧力は0とする。初期要素分割図を図12に示す。初期領域の正方形の辺の中点をP、角をQとし、これらの点で流速の変化を観察する。



総節点数 = 499, 総要素数 = 128

図12 初期領域形状と要素分割図

レイノルズ数  $Re=1, 10, 100$ , 表面張力係数  $\gamma=0.1, 1.0, 10.0$  としそれぞれについて時刻 $T=4.0$ まで計算する。

図13に $Re=10, \gamma=1.0$ の領域形状の時間的変化を示す。現象としては、正方形領域が初め大きく変形するが、定常状態の円に収束する。

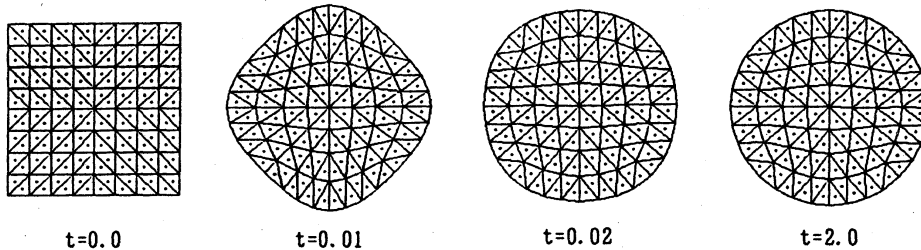


図13 形状の時間的変化と要素分割図 ( $Re=10, \gamma=1.0$ )

図14はレイノルズ数と表面張力係数を変化させたときの点Pにおける最大流速である。レイノルズ数を固定したとき、表面張力係数が大きいほど最大流速も大きく、表面張力係数を固定したとき、レイノルズ数が大きいほど最大流速も大きい。

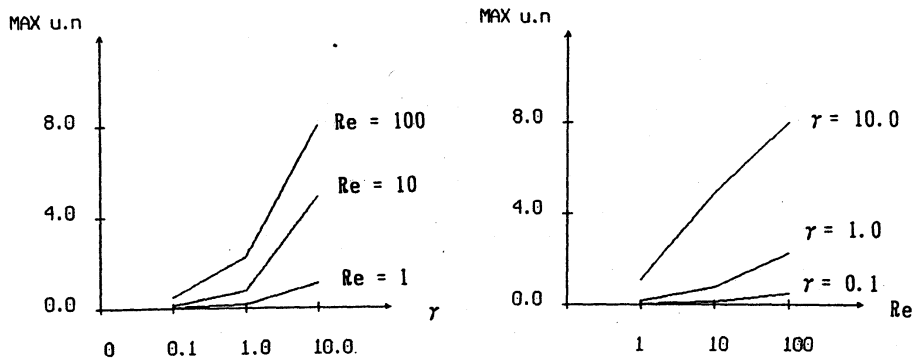


図14  $Re$ と $\gamma$ を変えたときの点Pにおける最大流速

図15はレイノルズ数と表面張力係数を変化させたときの点P, Qにおける流速の時間的変化である。レイノルズ数を固定したとき、表面張力係数が大きいほど振動する周期が短く、表面張力係数を固定したとき、レイノルズ数が大きいほど振動する減衰が小さいことがわかる。



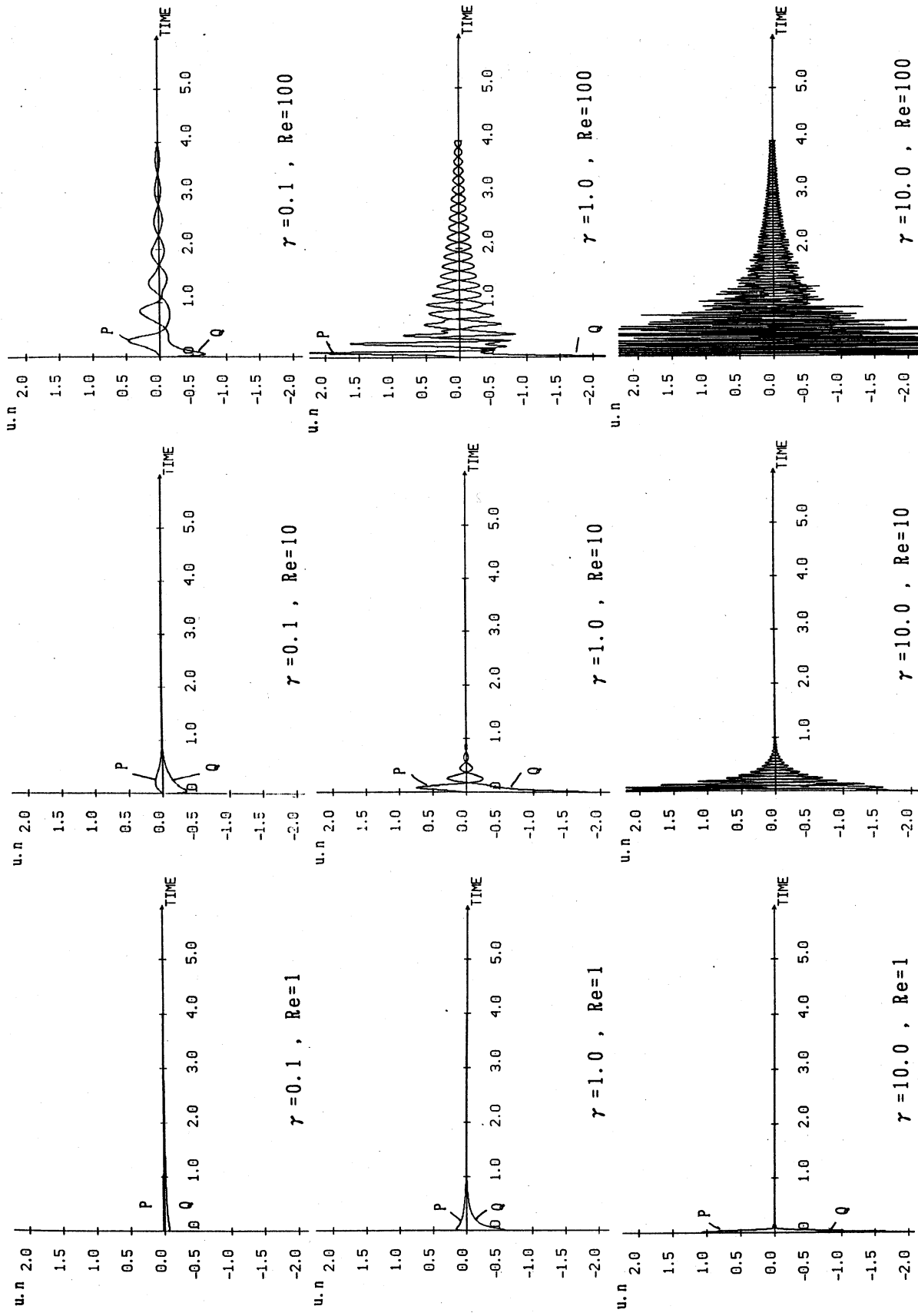


図 15 Reと $\gamma$ を変えたときの点P, Qにおける流速の時間的变化

3. 3 液滴の落下問題

液滴が静止した水面に落下する現象を解析する。液滴の直径を0.23cm, プールの深さ0.4cm, 幅3.0cm (図16)とし, 動粘性係数 $0.01\text{cm}^2/\text{s}$ , 表面張力係数 $75\text{dyn/cm}$ , 初期の液滴の速度 $-32\text{cm/s}$ , 外力(重力) $-1000\text{cm/s}^2$ とする。

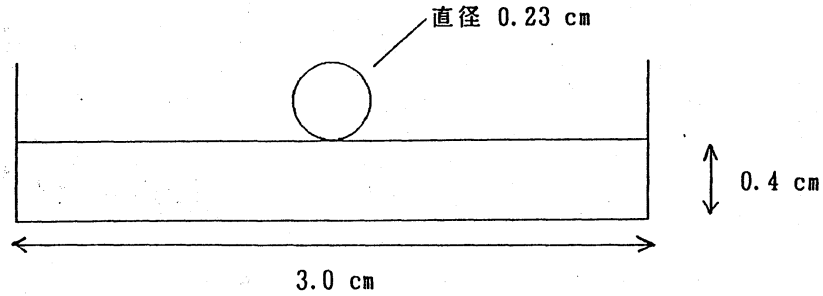


図16 液滴の落下問題の初期領域形状<sup>[3]</sup>

ここでは, 代表長さを液滴の直径 ( $L=0.23\text{cm}$ ), 代表流速を初期の液滴の流速 ( $U=32\text{cm/s}$ )で無次元化し, 2次元解析を行なう。初期要素分割図を図17に示す。

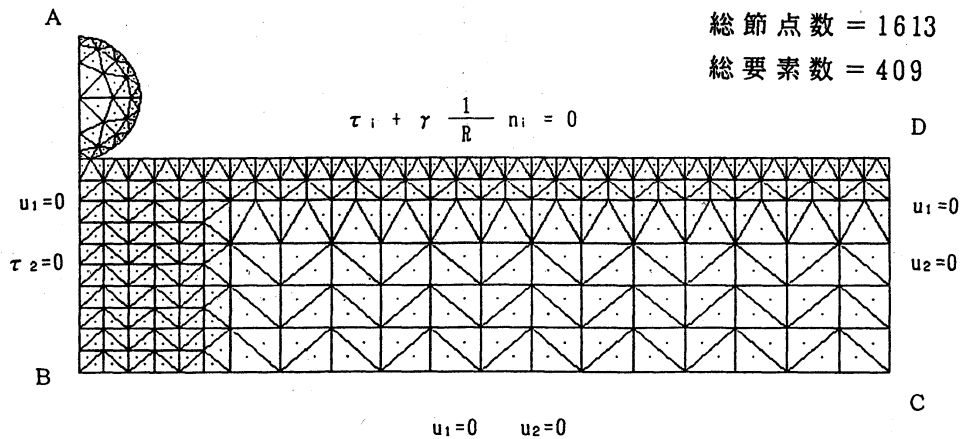


図17 初期要素分割図と境界条件

境界では, ABは対称の条件, BC,CDは粘着境界条件, ADは自由境界で表面張力を考慮した境界条件を与え, 流体外の圧力は0とする。

計算結果を図18に示す。

計算に用いた定数は,  $\tau_{min}=6.25 \times 10^{-5}$ ,  $\tau=5.0 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha=4.0$ ,  $\beta=20.0$ である。

この問題では, 形状の変化が大きく, 要素の移動により局所的に要素の歪みやつぶれが生じるので, 時間刻みの調節, 要素再分割, 節点移動を導入する(図19)。

① 時間刻みの調節

第nステップの計算をするときの時間刻みを $\tau^n$ とする。 $\tau^n$ は

$$\tau_{min} \leq \tau^n \leq \tau$$

を満たすように決定する。ここで、 $\tau_{min}$ は時間刻みの下限、 $\tau$ は時間刻みの上限である。 $\tau^n$ の計算のアルゴリズムを図20に示す。ここに、要素のつぶれ度合  $d$  を

$$d(e) = \frac{h^2}{2s} \quad (26)$$

で定義する。 $h$ は要素 $e$ の最長辺長、 $s$ は要素 $e$ の面積である。 $d(e)$ が大きいほど要素はつぶれているとする。

## ②要素再分割と節点移動

ある程度以上要素がつぶれたとき、総節点数と総要素数を変えずに、節点の移動や要素の切直しを行なう。そのアルゴリズムを図21に示す。図21の終了の判定は、要素のつぶれ度合が回避されたとき、もしくは、節点移動を行なったときの節点の移動距離がある一定数より小さくなったときとする。その内容は以下の通りである。

### 1) 節点移動 (1) [5]

要素面積のバランスをとるように節点を移動する。ある節点 $x_j$ を移動するとき、新しい節点の位置は

$$x_j = \frac{\sum_k W_k G_k^j}{\sum_k W_k} \quad (27)$$

で決定する。ここで、 $G_k^j$ は $x_j$ に隣接する要素重心の座標、 $W_k$ は $x_j$ に隣接する要素面積である。

### 2) 節点移動 (2) [5]

節点距離のバランスをとるように節点を移動する。ある節点 $x_j$ を移動するとき、新しい節点の位置は

$$x_j = \frac{\sum_k d_k^{-1} x_k^j}{\sum_k d_k^{-1}} \quad (28)$$

で決定する。ここで、 $x_k^j$ は $x_j$ に接続する節点の座標、 $d_k$ は $x_j$ と $x_k^j$ との節点距離である。

ただし、1), 2)において、 $x_j$ を移動したとき $x_j$ に隣接する要素 $e_k$ が1つでも

$$d(e_k) > \max d(e_i) \quad (29)$$

を満たすときは節点移動を行なわない。

### 3) 二つの三角形での切直し

つぶれた三角形要素と最長辺同士隣接する要素があれば、その二つの三角形要素間で切直しを行なう。

ただし、切直しを行なうことにより

$$d(e_1') \geq d(e_1) \text{ または } d(e_2') \geq d(e_1) \quad (30)$$

となるときは切直しを行なわない。

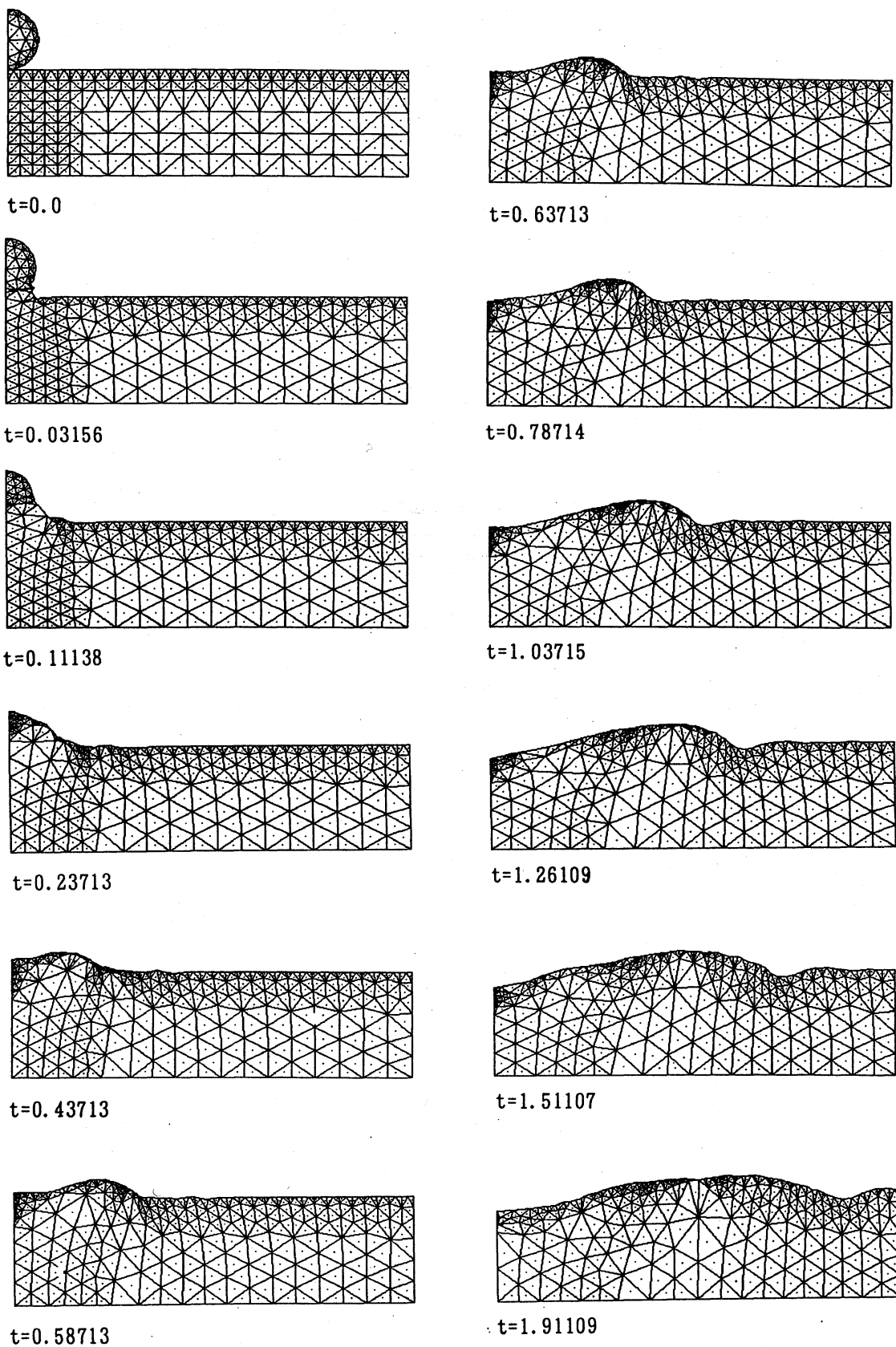


図 1 8 形状の時間的変化と要素分割図

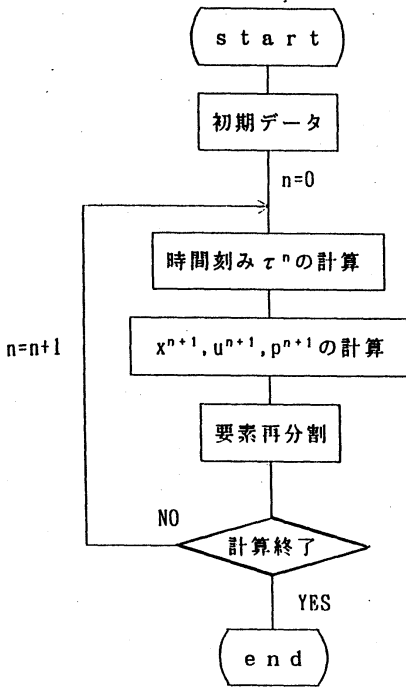


図 19 計算のアルゴリズム

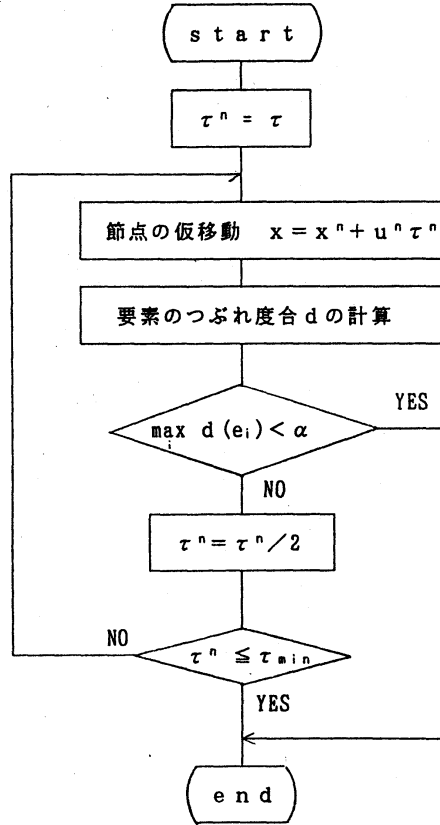


図 20 時間刻み  $\tau^n$  の計算のアルゴリズム

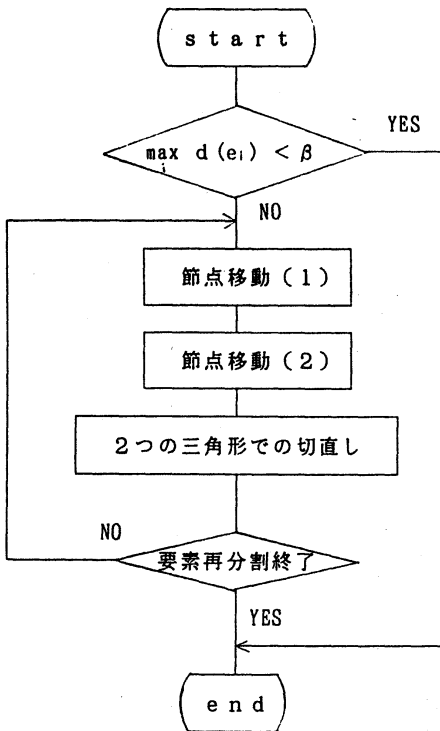


図 21 要素再分割のアルゴリズム

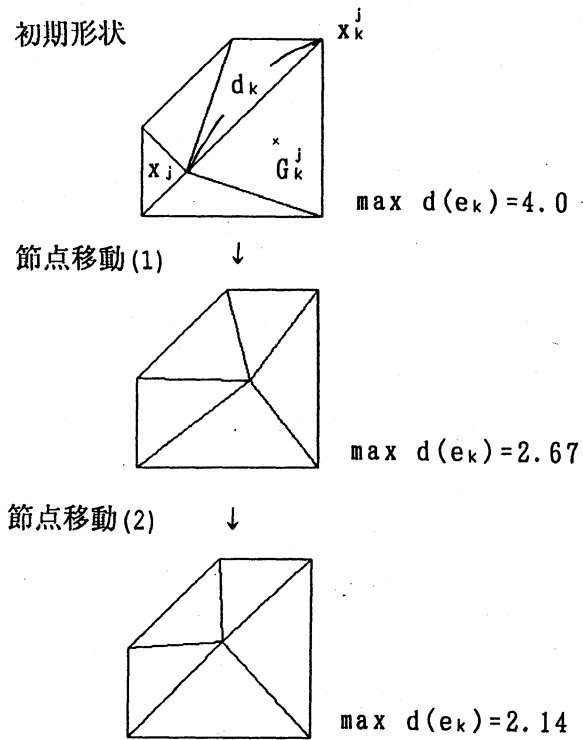


図 22 節点移動

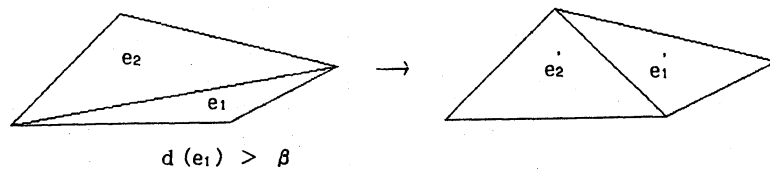


図 2.3 二つの三角形での切直し

#### 4. おわりに

表面張力を考慮した自由境界問題をラグランジュ有限要素近似を用いて解いた。

1) テスト問題で、近似解の収束性を数値的に示した。表面張力を考慮した場合には、表面張力を考慮しないものにくらべ収束性が悪かったが、それぞれ近似解は収束傾向にある。

2) 液滴の振動問題で、流体の粘性や表面張力係数の変化による現象の違いを観察した。

3) 液滴の落下問題のような領域形状の変形が大きい問題では、時間刻みの調節や要素再分割などの手法を取り入れる必要があった。

今後の課題は、

- 1) 表面張力の計算（曲率半径の計算）精度改善の可能性の検討。
  - 2) 液滴の落下問題の軸対称問題としての解析。
  - 3) 領域の変形がさらに大きく、領域が分離・結合する場合の取扱い。
- である。

#### 参考文献

- [1] 田端正久, 宮崎龍人, 森下映: "ミニ有限要素と自由境界問題", 数理解析研究所講究録724, 「自由境界問題の数値解析とその周辺」, 25-41(1990).
- [2] M. Tabata, A. Morishita: "A Fractional Step Finite Element Scheme for Free Boundary Problems", Theoretical and Applied Mechanics, vol. 39, 251-257(1990).
- [3] 高橋大輔, 武田有介: "自由表面を伴う流体の運動の数値計算", ながれ 7, 154-168(1988).
- [4] G.K. Batchelor (橋本英典, 松本八十男 他共訳): "入門 流体力学", 東京電機大学出版局, 1972.
- [5] 大坪英臣, 久保田晃弘, 北村充, 川村恭己: "有限要素法の事後誤差評価結果に基づく要素再分割法", 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集 第14巻, 579-584(1990).