

代用電荷法に基づく 数値等角写像の誤差の性質

愛媛大学工学部 天野 要 (Kaname Amano)

1. はじめに

与えられた問題領域から標準領域への数値等角写像の方法としては、等角写像の問題を第1種 Fredholm 型の積分方程式に帰着させる方法が著名である¹⁻⁶⁾。これに対して、最近、Laplace 方程式の簡単かつ高精度な近似解法として知られている代用電荷法⁷⁾に基づく方法が提案されている⁸⁻¹²⁾。ここでは、この代用電荷法に基づく数値等角写像の誤差の性質を整理し、数値等角写像に適用された代用電荷法の拘束点と電荷点の配置の問題を検討する。その目的と理由は次のとおりである。

(1) 近似写像関数の誤差の性質を整理すること。代用電荷法に基づく数値等角写像では、正則関数の最大値の原理により、境界上の中間点における計算値を用いた簡潔な誤差の評価が可能である。しかし、その性質と根拠はまだ十分に整理された形で提示されていない。

(2) 特に、近似写像関数の絶対値と偏角の誤差の関係を明らかにすること。近似写像関数を決定するのは境界上の拘束点で絶対値に課された拘束条件であって、偏角には何等の条件も課されていない。

数値等角写像の方法の多くが、前者を高精度に近似することができれば後者もまた高精度に近似されるであろうという推測の上に成立しているといえる。しかし、両者の関係は理論と数値実験の両面から研究されるべきことがらである。

(3) さらに、数値等角写像に適用された代用電荷法の拘束点と電荷点の適切な配置法を検討すること。代用電荷法の拘束点と電荷点の配置の問題は、領域の形と境界条件の双方に依存し、任意性の高い困難な問題である。しかし、数値等角写像に現れる Laplace 方程式の Dirichlet 問題は領域の形と正規化点の位置によって一意的に定まる。配置の問題もこれらに依存している筈である。

本稿では、最も基本的な与えられた Jordan 領域から単位円内部への等角写像を扱う。

2. 写像定理

z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C で囲まれた Jordan 領域 D から w 平面上の単位円内部 $|w| < 1$ への等角写像を考える (図 1)。その写像関数 $w = f(z)$ は、 D 内に原点をとれば、正規化条件 $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ の下に一意的に定まり、

$$w = f(z) = z e^{g(z) + ih(z)}, \quad z \in D \quad (1)$$

で与えられる。ここに、 $g(z)$ と $h(z)$ は D で共役な調和関数で、 C が単位円に移るための境界条件と $f'(0) > 0$ の正規化条件から、それぞれ、

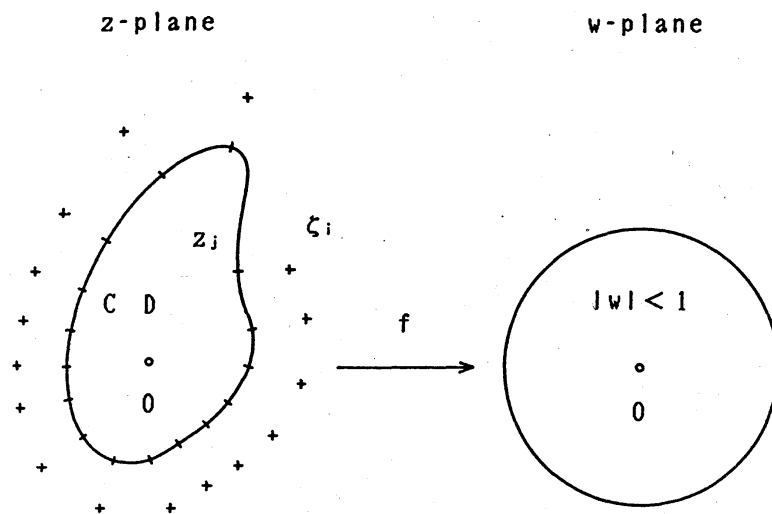


図1 等角写像と代用電荷法

$$g(z) = -\log|z|, \quad z \in C, \quad (2)$$

$$h(0) = 0 \quad (3)$$

を満たさなければならない。さらに、 C は Jordan 曲線であるから、Carathéodory の定理により、 $f(z)$ は境界をも含む閉領域 $\bar{D} = D + C$ を $|w| \leq 1$ に 1 対 1, 連続に写像する。

3. 代用電荷法

共役な調和関数 $g(z)$ と $h(z)$ を領域 \bar{D} の外部に配置された N 個の電荷点 ζ_i を極とする複素対数ポテンシャルの実部と虚部の 1 次結合で近似して、問題の等角写像の簡潔な近似写像関数

$$W = F(z) = z e^{G(z) + iH(z)}, \quad z \in \bar{D} \quad (4)$$

$$G(z) = - \sum_{i=1}^N Q_i \log |z - \zeta_i|, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= - \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i) + \theta_0 \\ &= - \sum_{i=1}^N Q_i \arg(1 - z/\zeta_i) \end{aligned} \quad (6)$$

を得ることができる。ここに、

$$\theta_0 = \sum_{i=1}^N Q_i \arg(-\zeta_i) \quad (7)$$

は正規化条件(3)から定まる回転の定数である。W, F, G, H 等の大文字は近似値を表す。未定係数である電荷 Q_i は境界 C 上に選ばれた N 個の拘束点 z_j で境界条件(2)を満たすように定められる。すなわち、 Q_i は拘束条件と呼ばれる連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N Q_i \log |z_j - \zeta_i| &= \log |z_j|, \quad z_j \in C, \\ j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

の解である。

4. 誤差

近似写像関数 $F(z)$ に関する諸量の誤差とそれらの間の関係を以下のように整理することができる。

定義

$$E_F(z) \equiv F(z) - f(z), \quad E_F \equiv \max_C |E_F(z)| \quad (9)$$

$$E_M(z) \equiv |F(z)| - |f(z)|, \quad E_M \equiv \max_C |E_M(z)| \quad (10)$$

$$E_A(z) \equiv |f(z)| \{ \arg F(z) - \arg f(z) \}, \quad E_A \equiv \max_C |E_A(z)| \quad (11)$$

$$E_G(z) \equiv G(z) - g(z), \quad E_G \equiv \max_C |E_G(z)| \quad (12)$$

$$E_H(z) \equiv H(z) - h(z), \quad E_H \equiv \max_C |E_H(z)| \quad (13)$$

条件

$$\underline{E_G} \leq 1 \text{ または } \underline{E_M} \leq 1 \quad (14)$$

$$\underline{E_G} \cong \underline{E_H} \text{ または } \underline{E_M} \cong \underline{E_A} \quad (15)$$

関係

$$|E_F(z)| \leq E_F \quad (16)$$

$$|E_G(z)| \leq E_G \cong \max_j |E_G(z_{j+1/2})| \quad (17)$$

$$|E_H(z)| \leq E_H \quad (18)$$

$$|E_M(z)| \leq E_M \cong \max_j |E_M(z_{j+1/2})| \quad (19)$$

$$|E_A(z)| \leq E_A \quad (20)$$

$$\underline{E_M}(z) \cong \underline{E_G}(z), \quad z \in C, \quad \therefore \underline{E_M} \cong \underline{E_G} \quad (21)$$

$$E_A(z) = E_H(z), \quad z \in C, \quad \therefore E_A = E_H \quad (22)$$

$$E_F \leq \underline{E_M} + \underline{E_A} \cong 2\underline{E_M} \quad (23)$$

ここに、 $E_F(z)$ 、 $E_M(z)$ 、 $E_A(z)$ は近似写像関数 $F(z)$ の誤差、その絶対値と偏角方向成分であり、 $E_G(z)$ と $E_H(z)$ は共役調和関数 $G(z)$ と $H(z)$ の誤差である。 E_F 、 E_M 、 E_A 、 E_G 、 E_H はこれらの絶対値の境界上における最大値である。下線は、後述のように、条件と導かれる関係の対応を示している。

定義式から、 \bar{D} 内の任意の点で

$$|E_F(z)| \leq |E_M(z)| + |E_A(z)| \quad (24)$$

$$E_M(z) = |f(z)| \{ e^{\underline{E_G}(z)} - 1 \} \quad (25)$$

$$E_A(z) = |f(z)| E_H(z) \quad (26)$$

という関係の成立していることがわかる。したがって、境界上では $|f(z)| = 1$ であるから、(21)と(22)の関係が得られる。ここで、(21)式には、指数関数の Taylor 展開の 1 次の項までとるという形で、(14)の条件が用いられていることに注意する。

この条件(14)と(15)は数値実験的な検証を必要とする関係である。(25)式から、(14)の条件 $E_G \ll 1$ と $E_M \ll 1$ は同値であることがわかる。拘束点と電荷点の配置が適切であれば、Laplace 方程式の Dirichlet 問題に適用された代用電荷法の精度は非常に高いことが知られている。この条件の下では、(21)式と(22)式から、(15)の条件 $E_G \approx E_H$ と $E_M \approx E_A$ も同値であることがわかる。これも、数値実験的な経験則ではあるが、 $E_G(z)$ と $E_H(z)$ がそれぞれ拘束点と正規化点で零となって Cauchy-Riemann の方程式を満足し、一方が恒等的に零であれば他方も恒等的に零である、という点では納得のゆく関係である。

関係(16)~(18)はそれぞれ正則関数と調和関数の最大値の原理の直接的な結果である。条件(14)の下に、(25)式に(17)式と(21)式を順に適用すれば、

$$|E_M(z)| \leq |e^{E_G(z)} - 1| \approx |E_G(z)| \leq E_G \approx E_M$$

となって、(19)式が得られる。同様に、(26)式に(18)式と(22)式を適用すれば、

$$|E_A(z)| \leq |E_H(z)| \leq E_H = E_A$$

となつて、(20)式が得られる。(17)式の $E_G \approx \max_j |E_G(z_{j+1/2})|$ と (19)式の $E_M \approx \max_j |E_M(z_{j+1/2})|$ は拘束条件 $E_G(z_j) = E_M(z_j) = 0$ による。ここに、 $z_{j+1/2}$ は境界上の拘束点 z_j と z_{j+1} の間の中間点である。(24)式から(15)式の条件の下に(23)式が得られる。

以上のように、代用電荷法に基づく数値等角写像では、

$$|E_F(z)| \leq E_F \leq E_M + E_G \approx 2E_M = 2 \max_j ||F(z_{j+1/2})| - 1| \quad (27)$$

という境界上の中間点の計算値を用いた簡潔な誤差の評価式を得ることができる。しかし、ここであらためて以下のような疑問を指摘することができる。

(a) 近似写像関数 $F(z)$ は共役な調和関数 $G(z)$ と $H(z)$ によって定まり、 $G(z)$ と $H(z)$ は未定係数である電荷 Q_i によって定まる。この Q_i を決定するのは境界上の拘束点 z_j で $G(z)$ に課された拘束条件であり、 $H(z)$ には何らの条件も課されていない。境界上の $E_G(z) \approx E_M(z)$ と $E_H(z) = E_G(z)$ の間にはどのような関係があつて、(15)式の条件にどう関係しているであろうか。

(b) 等角写像の問題は、したがって、ここに現れる Laplace 方程式の Dirichlet 問題も、領域の形と正規化点の位置によって一意的に定まる。これらは、計算精度にどう影響し、拘束点と電荷点の適正配置にどう関係しているであろうか。

5. 数値実験

拘束点と電荷点の配置には次のような方法を採用する。すなわち、まず与えられた領域の境界上に適当な拘束点 z_j を左回りに配置し、

次いで各拘束点 z_i に対応する電荷点を

$$\zeta_i = z_i + \frac{1}{2} r_a |z_{i+1} - z_{i-1}| e^{i\{\arg(z_{i+1} - z_{i-1}) - \pi/2\}} \quad (28)$$

で配置する。パラメータ $r_a > 0$ はすべての i に対して一定である。その結果、電荷点に対応する拘束点を通る法線の方角にあって、拘束点が密な部分で電荷点も密かつ境界近くに分布するような配置が得られる。

計算結果の提示に用いられる記号は次のとおりである。

N : 電荷数 = 拘束点数 (括弧内は計算に対称性を利用した場合の拘束条件の連立1次方程式の元の数)。

r_a : 電荷配置のパラメータ。

E_F, E_M, E_A : それぞれ, (9)~(11)の定義式に基づく誤差の指標。拘束点と中間点における計算値が用いられる。

いずれの例も愛媛大学情報処理センターの FACOM-M360AP による倍精度計算である。

例 1 偏心円

領域 $(x - x_c)^2 + y^2 \leq 1, \quad x_c = 0.75$

写像関数 $w = f(z) = z / \{1 + x_c(z - x_c)\}$

拘束点 (a) $z_j = (\cos\theta + x_c, \sin\theta)$

(b) $z_j = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$r = x_c \cos\theta + (1 - x_c^2 \sin^2\theta)^{1/2}$$

$$\theta = 2\pi(j-1)/N$$

$$1 \leq j \leq N, \quad N = 64 \quad (33)$$

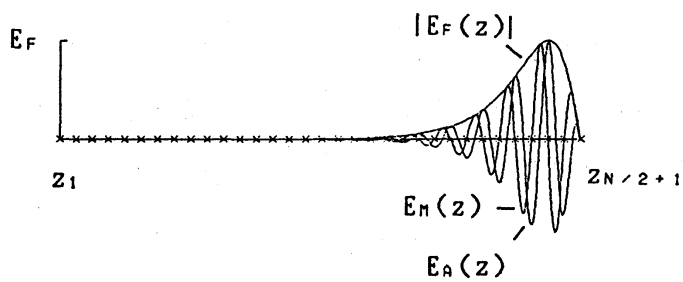
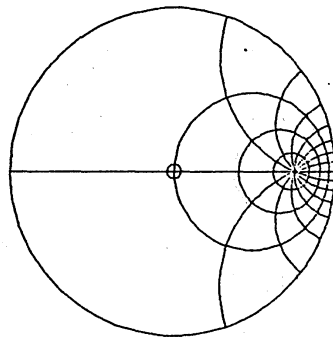
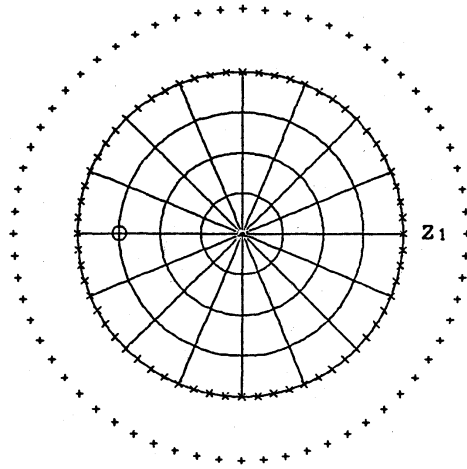


図2 数値等角写像 (偏心円 (a))

これは単純な凸型領域の例である。拘束点は境界を(a)長さ, または(b)偏角で等分割して配置する。

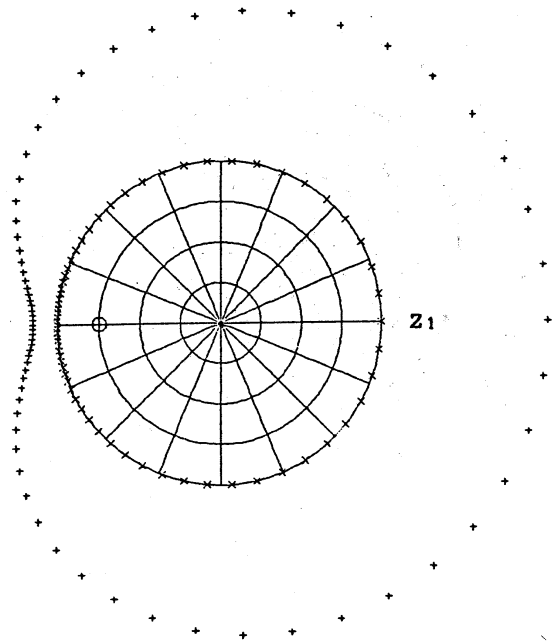


図3 数値等角写像 (偏心円 (b))

表1 誤差評価 (偏心円)

| r_a | 2.0 | 4.0 | 6.0 | 8.0 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| (a) E_M | 2.1E-05 | 2.5E-06 | 6.2E-06 | 7.5E-06 |
| E_A | 2.7E-05 | 2.6E-06 | 6.1E-06 | 7.5E-06 |
| E_F | 2.7E-05 | 2.6E-06 | 6.2E-06 | 7.5E-06 |
| (b) E_M | 4.4E-07 | 1.0E-10 | 1.2E-13 | 8.7E-12 |
| E_A | 3.1E-07 | 3.7E-11 | 1.3E-13 | 8.6E-12 |
| E_F | 4.4E-07 | 1.0E-10 | 1.3E-13 | 8.7E-12 |

図2 ((a) $r_a = 4.0$) と図3 ((b) $r_a = 6.0$) は拘束点, 電荷点の配

置と等角写像の様子，および境界上の誤差分布を示している。誤差分布の横軸は偏角 $0 \sim \pi$ の範囲で境界上を正の向きに歩んだ長さである。表 1 は電荷配置のパラメータと誤差の評価値である。

初等的な写像関数との比較によって，いずれの場合にもパラメータ r_0 の広い範囲にわたって高い精度が得られていることがわかる。同時に，条件式 (14) と (15) の成立を確認することができる。

拘束点を境界上に等間隔に配置した場合 (図 2) には，誤差は正規化点に近い部分で大きな値をとる。このとき， $E_M(z)$ と $E_A(z)$ は振動的である。前者 (の絶対値，以下同様) は，拘束条件の課された拘束点で小さく，中間点で大きい。対照的に，後者は拘束点で大きく，中間点で小さい。全体の誤差 $|E_F(z)|$ は両者の包絡線になっている。拘束点 $z_{N/2+1}$ の近傍における誤差の減少は問題の対称性のためである。

境界を偏角で等分割して，正規化点に近い部分で密になるように拘束点を配置 (図 3) すれば，計算精度は大幅に向上する。このとき， r_0 の最適値は大きい方へシフトする。

例 2 正方形

領域 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$

拘束点 (a) $z_j = (1, (j-1)/(N/8))$

(b) $z_j = (1, \tan \theta)$

$$\theta = 2\pi(j-1)/N$$

(c) $z_j = (1, 4/\pi \tan^{-1} l)$

$$l = (j-1)/(N/8)$$

$$1 \leq j \leq N/8 + 1, \quad N = 64 \quad (17)$$

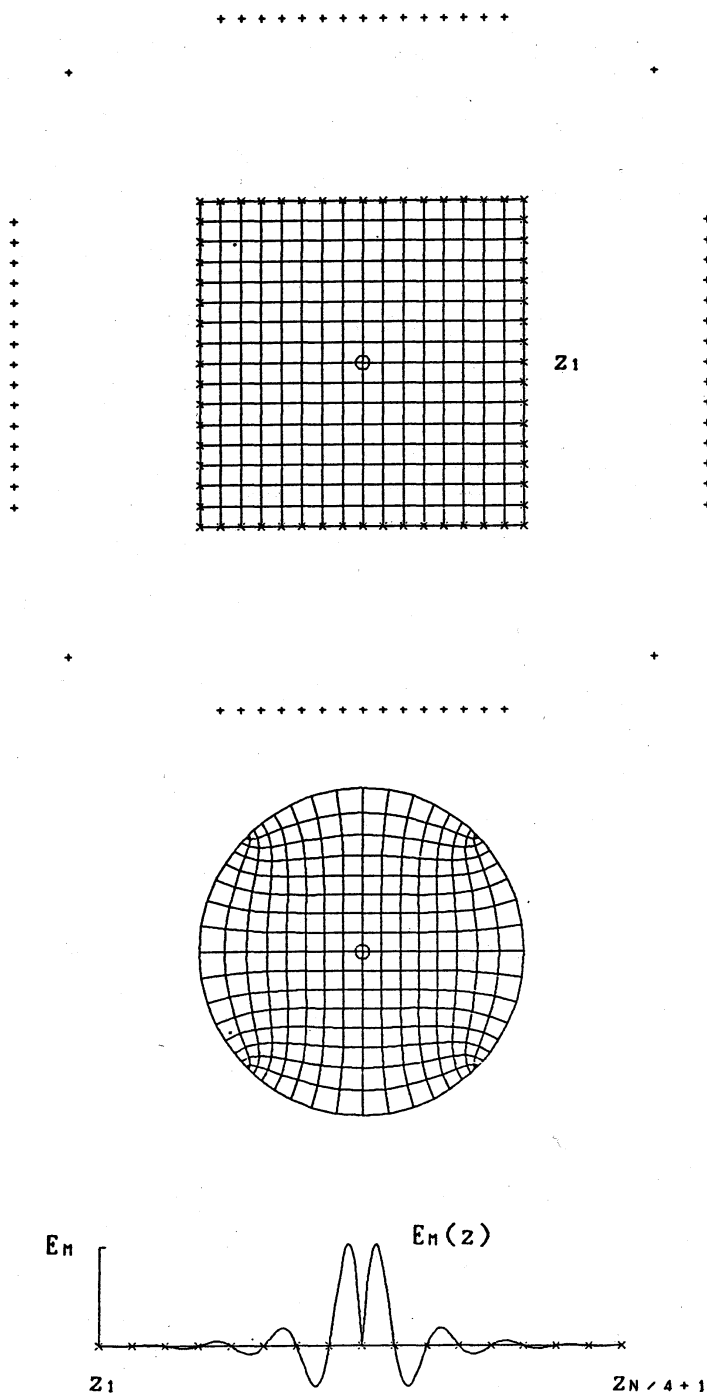


图4 数值等角写像（正方形）

表2 誤差評価 (正方形)

| r_a | 3.0 | 6.0 | 9.0 | 12.0 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| (a) E_M | 1.6E-05 | 2.1E-07 | 2.4E-09 | 1.5E-10 |
| (b) E_M | 1.2E-05 | 4.8E-08 | 1.9E-09 | 4.7E-10 |
| (c) E_M | 1.9E-05 | 6.9E-07 | 3.2E-10 | |

これは角点を持つ領域の例である。拘束点は境界を(a)長さ、(b)偏角で等分割して、または(c)その逆関数を用いて配置する。辺中央と角点付近の密度比はそれぞれ (a) 1:1, (b) 2:1, (c) 1:2 となる。

この例は逆 Schwarz-Christoffel 変換である。写像関数は初等的ではないので、これとの比較は行わない。しかし、表2はいずれの場合にもパラメータ r_a の広い範囲にわたって高い精度が得られることを示している。

拘束点を等間隔に配置した場合 (図4, (a) $r_a = 9.0$) には、誤差は角点付近で大きな値をとる。しかし、拘束点をこの付近で多少密に配置すると、誤差は逆に正規化点に近く配置の粗になった辺中央付近で大きくなる。誤差の最小値は (a) $E_M = 3.6E-11$ ($r_a = 11.0$), (c) $E_M = 5.6E-11$ ($r_a = 10.0$) (空欄は拘束条件の連立1次方程式の悪条件を示す) となって、両者に大きな差は見られない。境界を偏角で等分割して、拘束点の配置が角点付近で粗になっても、誤

差の最小値は(b) $E_M = 4.4E-10$ ($r_a = 11.5$) である.

6. まとめ

数値実験は偏心円(単純な凸型領域), 楕円(偏平な凸型領域), Cassiniの楕形(凹型領域), 正方形(凸型の角を持つ領域), L型矩形(凹型の角をもつ領域)という典型的な5種の領域に対して行われている¹²⁾. その結果を前述の疑問点に沿って整理する.

(a) 初等的な写像関数の知られている偏心円と Cassiniの楕形の計算結果はいずれも(14)式と(15)式の条件をよく満たしている. したがって, (16)~(23)の関係もすべて成立している. このとき, 電荷点が境界に極端に近すぎたり遠すぎたりしなければ, 境界上の $E_M(z) \approx E_G(z)$ と $E_A(z) = E_H(z)$ の成分はいずれも振動的である. 前者は, 拘束条件の課された拘束点で小さく, 中間点で大きい. しかし, 対照的に, 後者は拘束点で大きく中間点で小さい. 全体の誤差 $|E_F(z)|$ は両者の包絡線になっている. したがって, $E_M(z) \approx E_G(z)$ と $E_A(z) = E_H(z)$ の絶対値が最大値をとって, (15)式の $E_G \approx E_H$ または $E_M \approx E_A$ が成立するのは隣接する中間点と拘束点においてである. また, (27)式より簡潔な誤差の評価式

$$|E_F(z)| \leq E_F \approx E_M \approx \max_j | |F(z_{j+1/2})| - 1 | \quad (29)$$

を得ることができる.

以上の性質は, 計算結果から(14)式の条件の成立が確認できれば, 真の写像関数が知られていない場合にも成立していると考えることができる.

(b) 拘束点を等間隔に配置した場合には，誤差は正規化点に近い部分，凹型部分，曲率の大きい部分，角点付近で大きな値をとる。したがって，このような部分に拘束点と電荷点を密に配置すれば，最大誤差を抑えて，計算精度を上げることができる。

星形領域の場合には，偏角等分割による方法が比較的良い拘束点の配置を与える。なぜなら，偏角等分割は正規化点付近で密な配置を与え，凹型部分は一般に正規化点に近く，また，凸型の境界の曲率の大きい部分と角点は，一般に正規化点から遠く，大幅な精度の低下を生じないからである。これは，非星形領域にも一般化して，単位円周上に等間隔に配置された点の集合を与えられた領域の境界上に逆写像するという形で，数値等角写像に適用された代用電荷法の拘束点を等角写像によって機械的に配置することができる可能性を示唆するものである。この可能性は代用電荷法に基づく数値等角写像の方法が双方向的¹¹⁾である故に重要である。拘束点と電荷点の配置問題に対する等角写像の適用可能性は引続き研究されるべき重要課題である。

参考文献

- 1) Symm, G. T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, Numer. Math., Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- 2) Symm, G. T.: Numerical Mapping of Exterior Domains, Numer. Math., Vol. 10, pp. 437-445 (1967).
- 3) Symm, G. T.: Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains, Numer. Math., Vol. 13, pp. 448-457 (1969).

- 4) Hayes, J. K., Kahaner, D. K. and Kellner, R. G.: An Improved Method for Numerical Conformal Mapping, *Math. Comput.*, Vol. 26, No. 118, pp. 327-334 (1972).
- 5) Hough, D. M. and Papamichael, N.: The Use of Splines and Singular Functions in an Integral Equation Method for Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 37, pp. 133-147 (1981).
- 6) Hough, D. M. and Papamichael, N.: An Integral Equation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 41, pp. 287-307 (1983).
- 7) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 194 p., 森北出版, 東京 (1983).
- 8) 天野 要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, *情報処理学会論文誌*, Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
- 9) 天野 要: 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, *情報処理学会論文誌*, Vol. 29, No. 1, pp. 62-72 (1988).
- 10) 天野 要: 代用電荷法に基づく2重連結領域等角写像の数値計算法, *情報処理学会論文誌*, Vol. 29, No. 10, pp. 914-924 (1988).
- 11) 天野 要: 代用電荷法に基づく双方向的な数値等角写像の方法, *情報処理*, Vol. 31, No. 5, pp. 623-632 (1990).
- 12) 天野 要: 代用電荷法に基づく数値等角写像の誤差の性質, *情報処理学会論文誌*, Vol. 32, No. 1 (1991, 掲載予定).