数理解析研究所講究録
第745巻 1991年 11-20

気体星の発展にたいするオイラー・ポアソン方程式について

大阪産業大　　牧野　哲（Tetu Makino）

われわれはここ数年来，次のオイラー・ポアソン方程式の解の構造を調べてきた．

(1-0) $$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}+\rho \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=0,$$

(1-i) $$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=0,\quad i=1,2,3,$$

(1-4) $$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial S}{\partial x_j}=0,$$

(2) $$p=\rho^{\gamma}e^{S},$$

(3) $$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2}=4\pi\rho.$$

ここにγは$1<\gamma\leqq 2$をみたす定数である．方程式(1)(2)(3)は気体星の内部構造の流体力学的発展を記述する．未知函数ρは密度，$v={}^t(v_1, v_2, v_3)$は速度，pは圧力，Sは単位質量当りのエントロピー，Φは重力ポテンシャルである．(1)は

非粘性圧縮性流体の運動を規定するオイラー方程式で，状態方程式(2)で圧力を消去し，外力 $\rho\,\mathrm{grad}\,\Phi$ は，星の密度じしんからポアソン方程式(3)で与えられる．密度分布はコンパクト台のものを考えたいので，(3)はニュートンポテンシャル

$$(3)' \qquad \Phi(t,x) = -\int_{R^3} \frac{\rho(t,y)}{\|x-y\|}\,dy$$

でおきかえる．方程式の物理的意味の詳細はたとえば［5］を参照されたい．

方程式系(1)(2)(3)にかんして，初期値問題にたいする解の存在と一意性，大域解の存在，定常解の安定性などが論じられるべき問題であろう．われわれは，これらの問題について［7］（T.M. 1986）で最初に論じて以降，いくつかの結果を得てきたので，ここでこれまでの結果を総括しておきたい．

まず，初期条件

$$(4) \qquad \rho|_{t=0} = \rho^0(x) \geqq 0, \quad v|_{t=0} = v^0(x), \quad S|_{t=0} = S^0(x)$$

を与えたときのコーシー問題を論じ，次の結果を得た．

定理1．([9], T. M. and S. Ukai, 1987)．$\rho^0(x)$, $v^0(x)$, $S^0(x)$ は $C^1(\mathbb{R}^3)$ に属し，$\rho^0(x) \geqq 0$ はコンパクト台とする．

$$(5) \qquad U^0 = {}^t\left((\rho^0)^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}S^0},\ v^0,\ S^0\right)$$

とおく．もし I) $1<\gamma\leqq 5/3$ で $U^0 \in H^3(\mathbb{R}^3)$ あるいは II) $1<\gamma\leqq 2$，$U^0 \in H^4(\mathbb{R}^3)$ で $\rho^0 \in H^3(\mathbb{R}^3)$ ならば，(1)(2)(3)(4) には解 $(\rho, v, S) \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ がある．ここに T は小さな正の数．

この局所解の存在定理における困難は，オイラー方程式(1)を，ρ の台がコンパクトのものにたいしていかに解くか，ということろである．従来の扱いでは，$\inf\rho>0$ の範囲で解くのが普通で，(例えば[3], [6]) $\inf\rho=0$ の場合に方程式を対称双曲型にもちこむには工夫が要る．[7], [9] でわれわれが提案したのは，新たな変数

$$(6) \qquad w = p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}S}$$

を導入するということである．(1-0)で変数を ρ から w に変え，(1-1), -2), -3)で両辺を形式的に ρ で割ると，(1) は対称双曲系

(7) $$A_0(U)U_t + \sum_{j=1}^{3} A_j(U)U_{x_j} = {}^t(0, -\mathrm{grad}\,\Phi, 0)$$

になり，Friedrichs-Lax-加藤の理論([2])が使えて，逐次近似がまわる．こうして，適当な函数空間において，ρから(3)′でΦをつくり，このΦのもとで(1)(2)(4)を解いて$\hat{\rho}$を得る写像が縮小写像となり，定理1を得る．

このようにして，コーシー問題にたいする解の局所的存在定理を得たが，われわれはこの結果に満足できなかった．というのは，次の理由による．いま簡単のためS=定数とし，$6/5<\gamma\leqq 2$とすると

(8) $$\rho=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma A^2}\right)^{\frac{1}{2-\gamma}}\theta(A\|x\|)^{\frac{1}{\gamma-1}},\quad v=0,\quad S=0$$

という定常解がある．ここに$\theta(r)$は

(9) $$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\theta}{dr}+\theta^{\frac{1}{\gamma-1}}=0,\quad \theta|_{r=0}=1,\quad \frac{d\theta}{dr}\Big|_{r=0}=0$$

の解で，いわゆるレーン・エムデン函数（[1]，オIV章参照）で，Aは任意の正の定数である．この解はC^1-級の解であるが，$w\sim \mathrm{Const}\,(R-r)^{1/2}$（$r\to R$：$\rho$の零点）であるから，$w\in H^3$を要求する定理1の条件を満たさず，定理1では，この定常解は対象外となってしまう．そこで，次のよ

うな用語を用いて，この間の事情を表現しよう．

定義．(ρ, v, S) が (1)(2)(3) の $0 \leq t < T$ での古典解であるとは，$(\rho, v, S) \in C^1([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ で方程式をみたし，$\rho \geqq 0$ で，$\rho(t,\cdot)$ がコンパクト台であることとする．

(ρ, v, S) が「おとなしい解」であるとは，それが古典解であって，しかも $\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \in C^1([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ で (7) をみたし，任意の $T' < T$ にたいして v が $[0, T'] \times \mathbb{R}^3$ で有界のときをいう．

すると，定理1で構成したのは「おとなしい」解のみで，一方，球対称定常解 (8) は，古典解だが，「おとなし」くないということになる．

次にわれわれが調べたのは，定理1で構成した「おとなしい」解が $t = +\infty$ まで大域的に延長しうるかどうかという問題であった．まず (1-1), -2), -3) で重力の項をおとした $(1)_0$ を考え，次の結果を得た．これは [11] に触発されたものである．

定理2．([8], T. M., S. Ukai and S. Kawashima, 1986) $(\rho(t), v(t), S(t))$ は $(1)_0(2)$ の $0 \leq t < T$ での「おとなしい」

解とする．$(\rho(0), v(0))$の台がコンパクトで，$\rho(0)\not\equiv 0$なら，Tは有限，すなわち解は大域的でない．

これは，$(\rho(t), v(t))$の台が広がらないことに注意し，

(10) $$H(t)=\frac{1}{2}\int_{R^3}\rho(t,x)\|x\|^2dx$$

の挙動を調べるとわかる．われわれは，この，自明でない（おとなしい）大域解はない，という結論がもとの(1)(2)(3)でも正しいだろうと予想しているが，いまのところ，証明できていない．しかし，解を球対称，すなわち，$\rho=\rho(\|x\|,t)$，$v=\frac{x}{\|x\|}\times v(t,\|x\|)$，$S=S(t,\|x\|)$の形のものに限れば，証明ができている．すなわち，

定理3．（[10], T. M. and B. Perthame, 1990）$(\rho(t), v(t), S(t))$は$0\le t<T$上の球対称のおとなしい(1)(2)(3)の解とする．$(\rho(0), v(0))$の台がコンパクトで，$\rho(0)\not\equiv 0$なら，Tは有限である．

証明は容易だが，背理法によるため，有限時間後におとなしくなくなったときに実際何がおこるのかはわからない．ま

ずwの滑かさが台の境界で破れてつったちがおこるのだろうと予想されるが，いまのところ確実なことは何もわかっていない.

最後に，われわれは定理2の証明を反省して，おとなしくない古典解についての情報をひとつ得た. それは，

定理4. ([10] T. M. and B. Perthame, 1990) ($\rho(t)$, $v(t)$, $S(t)$) は $0 \leqq t < +\infty$ 上の(1)(2)(3)の古典解とする. もし $E>0$ で $\gamma \geqq 4/3$ なら，$\liminf_{t\to+\infty} R(t)/t \geqq \sqrt{E/M}$,

ただし $R(t)=\sup\{\|x\| \mid \rho(t,x)\neq 0\}$ であり，

$$M=\int \rho(t,x)dx$$

$$E=\int\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{1}{\gamma-1}p\right)dx-\frac{1}{2}\iint\frac{\rho(t,x)\rho(t,y)}{\|x-y\|}dxdy$$

で，これらは古典解に沿ってtについて定数である.

証明は，(10)で定義した $H(t)$ について

$$H''(t)=\int(\rho v^2+3p)dx-\frac{1}{2}\iint\frac{\rho(t,x)\rho(t,y)}{\|x-y\|}dxdy$$

となることから直ちに得られる.

この定理から次のようなことがわかる. 球対称定常解(8)

については，総エネルギは $E=\frac{4-3\gamma}{\gamma-1}\int p\,dx$ となる．したがって，$\gamma=4/3$ のとき，ρ^0, $S^0=0$ を定常解と同じとすると，v^0 が何であってもどんなに小さくとも，この初期値にたいする古典解は，大域的である限り，$\liminf R(t)/t>0$ を満たす．この意味で，$\gamma=4/3$ の定常解(8)は不安定であることがわかる．

以上のところが，オイラー・ポアソン方程式にたいして今まで得られた結果である．われわれはいくつかの知見を得たとはいえ，その歩みはまことに遅々たるものである．とりわけ，球対称定常解(8)を含む初期値のクラスで存在定理を確立することは焦眉の課題である．これには，弱解の方法，自由境界値問題としての取り扱い等が要求されるかもしれない．まずは球対称の場合を考えるのもよいかもしれない．(かえって難しいかもしれない．)また，球状の固体星の外気の場合に突破口がみつかるかもしれない．

いずれにしても，オイラー・ポアソン方程式は，われわれの挑戦に値するおもしろい方程式である．より多くの優秀な研究者がこの方程式の研究に参入され，上記の重要な課題に一日も早く結着をつけられることを期待するものである．

(1) S. Chandrasekhar, An Introduction to the study of Stellar Structure, Univ. of Chicago press, 1938.

(2) T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric heperbolic systems, Arch. Rational Mech. Anal., 58(1975), 181-205.

(3) S.Klainerman and A. Majda, Compressible and incompressible fluids, Comm. Pure Appl. Math., 35(1982), 629-651.

(4) P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws and the theory of shock waves, SIAM Lecture No.11, 1973

(5) P. Ledoux and T. Walraven, Variable stars, Handbuch der Physik LI, 1958, Springer, Berlin, 353-604.

(6) A.. Majda, Compressible Fluid Flow and System of Conservation Laws in Several Variables, Springer, 1984.

(7) T. Makino, On a local existence theorem for the evolution equation of gaseous stars, Pattern and Waves, North Holland/Kinokuniya, 1986, 459-479.

(8) T. Makino, S. Ukai nad S. Kawashima, Sur la solution à support compact de l'équation d'Euler compressible, Japan J. of Appl. Math., 3(1986), 249-257.

(9) T. Makino and S. Ukai, Sur l'existence des solutions locales de l'équation d'Euler-Poisson pour l'évolution d'étoiles gaseuses, J. of Math. of Kyoto Univ., 27(1987), 387-399.

(10) T. Makino et B. Perthame, Sur les solutions à symmetrie spherique de l'équation d'Euler-Poisson pour l'évolution d'étoiles gaseuses, Japan J. of Appl. Math., 7(1990), 165-170.

(11) T. Sideris, Formation of sin gularities in three dimensional compressible fluids, Comm.Math. Phys., 101 (1985), 475-485.