

発展方程式の数値解法

—— 台形法の改良と Zlamal 法 (2段, 3段) の比較 ——

神奈川大 理 村田 健郎

はじめに 台形法は1段法ながら2次の精度をもち、しかもA安定という優れた方法であるが、 $\lambda \tau \gg 1$ のとき振動的な誤差が重疊することがある。それを嫌って後退オイラー法寄りの1段 θ 法が、あるいはそれと2段のGear法の併用が奨められている。ところがそれらは精度的には台形法と比べ著しく劣る。

Zlamal⁽²⁾は、その不満を解消するために、1段 θ とGear法を拡張した2段のA安定な方法、あるいは3段のA(α)安定な解法を併用することを奨めた。しかしZlamalがテストしたのは、ごく素直な問題に対してであり、応用上の観点からの見通しを与えてはいない。また台形法に対し実務家が行っている‘平均化による初期値とり直し’の便法など台形法自体を使いこなす手法には何も言及していない。—— こういう点に関して学会は冷淡である。——

ここでとり上げた問題は、

- (1) ソースが場所依存性に段差がありまた時間的に不連続にきりかゆる。
 - (2) 場の内部に拡散係数の段差があり、また温度依存性がある。
- という、温度に関する、応用上問題を起し易い問題である。その問題群に対し

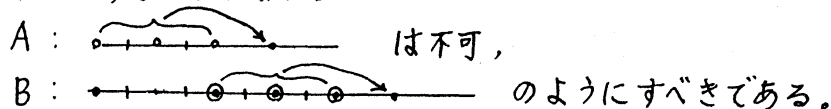
- (a) (平均化の手当をした) 台形法だけで押す
- (b) 上記を初期設定に使った2段あるいは3段のZlamal法

を試みてそれらの問題点と優劣を調べた。Zlamalを特にとり上げたのは、それがDu-Pont等⁽³⁾の時間依存の偏微分方程式の分野からの提案と、Stiffな常微分方程式の多段解法の提案との両方の接点をなしているからである。

とりあえずの結論:

- (1^o) 台形法(a)の方がZlamal 2段併用の(b)より勝る。
- (2^o) Zlamal 3段併用の(b)は台形法(a)の半分の時間で同一精度が得られる。(Gear 3段併用の(b)は台形法(a)並みである。)
- (3^o) 非線形問題に対し、準ニュートン法のJ₀更新を節約して、 τ が切換るときだけLU分解(すなわち線形問題並みのLU分解回数)ですます手法が、かなりの範囲で適用可能である。(帯半中100, 元数12700にて約1/4に短縮) しかしそれよりもICCG化版の方がCPUタイム、精度共に断然有利である。(帯半中100, 元数12700にて約0.076に短縮)

(4^o) Zlamalは、ソースが切換る時点をもその初期値のひとつにえらばないようにはせねばならない。すなわち



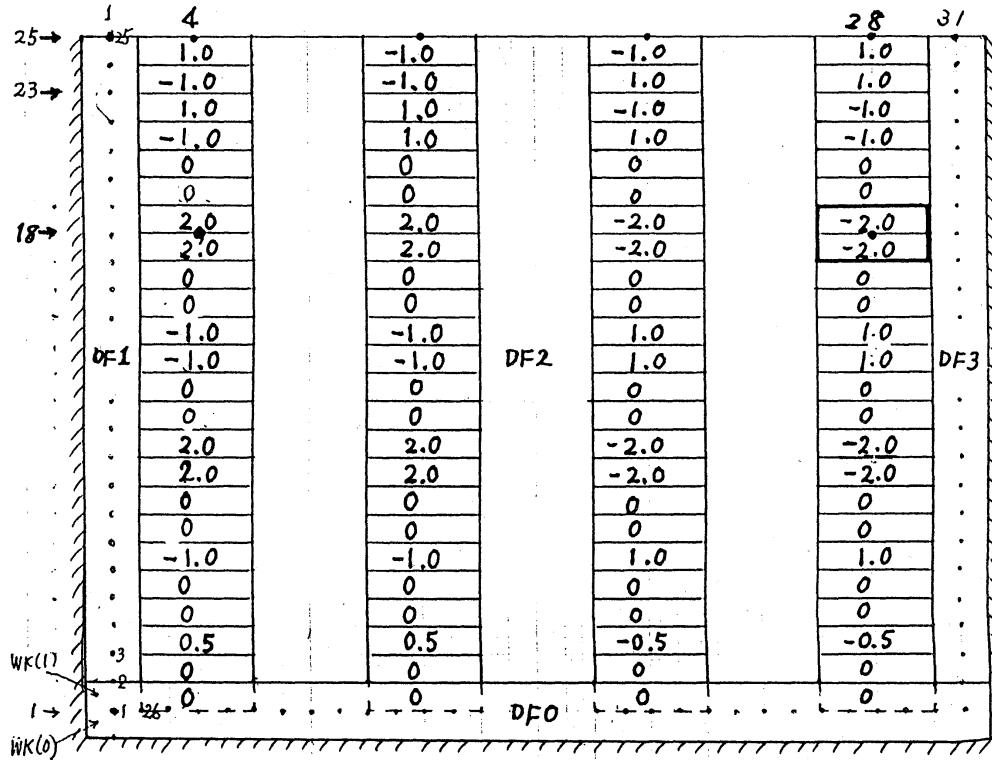
実施例： いろいろ試みた中で代表的なものだけあげる。

図1. 拡散係数 DF0, DF1, DF2, DF3 とソース FF()の与え方

$$(DF0, DF1, DF2, DF3) = (0.5, 0.2, 0.2, 0.2)$$

$$= (0.25, 0.1, 0.1, 0.1)$$

ソース FF()の例： (下図は, M1=25, M2=31, N = 775 に対するもの)



拡散係数は温度 u の関数で $DF * \text{MAX}(1 + DF * u, 1 \times 10^{-3})$ とする。

非線形台形法の算法： 今回は C , f は u に依存させないから、

$$(C + \frac{\tau}{2} A^{(k)}) u^{(k)} = (C - \frac{\tau}{2} A^{(k-1)}) u^{(k-1)} + \tau f$$

を, (算法Aでは) b_0 と書く。

$$(C + \frac{\tau}{2} A^{(k-1)}) u^{(*)} = (C - \frac{\tau}{2} A^{(k-1)}) u^{(k-1)} + \tau f$$

を解いた $u^{(*)}$ を次の準ニュートン反復の初期値に使い

$$u_0 = u^{(*)}$$

do $i = \text{niter}$ { 準ニュートン反復 }

$$(C + \frac{\tau}{2} A^{(k-1)}) \Delta u = b_0 - (C + \frac{\tau}{2} A(u_{i-1})) u_{i-1}$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta u$$

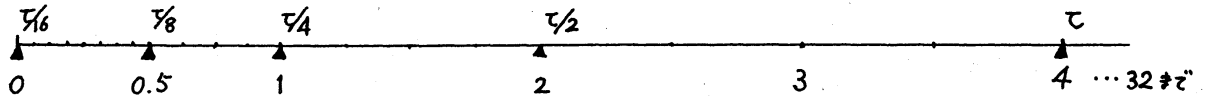
収束判定

$$u^{(k)} = u_i$$

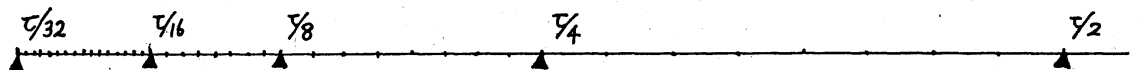
とした。(準ニュートン反復のためのヤコビアン J_0 を $(C + \frac{\tau}{2} A^{(k-1)})$ とした。ただし ICCG化したとき(算法AI)には $A^{(*)} = A(u^{(*)})$ を J_0 として使った。)

台形法 A (標準) と B (LU分解節約版), AI (ICCG 版)

何れも、



を基準に、パラメータ KF により時間中をコントロール。KF⁽⁼¹⁾ のとき上記の通り、KF = 2 のとき各区間中は上記の半分となる： ▲時点で時間キザミ中が倍加。



台形法 A は全分点で LU 分解を，台形法 B は ▲ 点でだけ LU 分解を行う。

非線形性が大，縁部の拡散係数 DF0~DF3 が小のとき，熱源のパターンに依っては '過冷によるオーバーフロー' を起すことがある。(*)

台形法 A のガウス消去法をそっくり MICCG(1,2) にかえたのが AI である。ただし準ニュートン反復用のヤコビアンに $A^{(k-1)}$ でなく $A^{(k)}$ を使う。MICCG 用の EPS は 1.0×10^{-6} ，準ニュートン反復の EPS は 1.0×10^{-4} で試行した。

表 1 の欄内上段は CPU タイム (秒)，下段は最低温度，右 () 内は 'ノ算法定率' 比。

表 1：各種算法 (A, B, AI) による CPU タイムの比較例 (HITAC M640 による)

DF = DO =	0.5 0.1	0.2 0.1	0.2 0.1	0.2 0.1	0.5 0.2	0.2 0.2	0.2 0.2	0.2 0.2	0.5 0.4	0.2 0.4	0.2 0.4	0.2 0.4	DF = DO =	0.25 0.4	0.1 0.4	0.1 0.4	0.1 0.4	
KF Prog	M1 = 25 N = 775	M1 = 50 N = 3150	M1 = 50 N = 3150	M1 = 50 N = 3150	M1 = 50 N = 3150	M1 = 50 N = 3150	M1 = 50 N = 3150	M1 = 50 N = 3150	M1 = 50 N = 3150	M1 = 50 N = 3150	M1 = 50 N = 3150	M1 = 100 N = 12700	M1 = 50 N = 3150	M1 = 100 N = 12700	M1 = 50 N = 3150	M1 = 100 N = 12700	M1 = 50 N = 3150	M1 = 100 N = 12700
2	65" 最低温度 -0.86446	816" -0.86654	834" -0.91099	852" -1.04169	864" -1.95425	11924" (198分44") -1.96445	27" -0.86444	229" (.28) -0.86653	258" (.31) -0.91099	269" (.32) -1.04165	299" (.35) -1.95347	2933" (.24) -1.96402	23" -0.86446	103" (.13) -0.86654	119" (.14) -0.91099	141" (.17) -1.04168	163" (.18) -1.95427	975" (.076) -1.96448
4	129" -0.86444	1626" -0.86652	1638" -0.91096	1657" -1.04162	1689" -1.95374	23658" (394分18") -1.96363	46" -0.86444	369" (.23) -0.86651	401" (.24) -0.91096	440" (.27) -1.04161	494" (.29) -1.95329	4382" (.19) -1.96351	37" -0.86444	165" (.10) -0.86652	170" (.10) -0.91096	193" (.12) -1.04162	231" (.14) -1.95378	1314" (.056) -1.96398

条件数 → .42D4 → .47D4 .42.D4 → .54D4 .59D4 → .93D4 .23D5 → .37D5

非線形問題についての注意：

1) 精度は一般に $\cong \alpha h^2 + \beta \tau^2$ とされるが、

表 1 左下：DF = 0.5, 0.2, ..., DO = 0.1 での M1 = 25 と 50 の場合，最低温度の相異は 0.0021 であるが，DF = 0.25, 0.1, ..., DO = 0.4 の場合，同じ M1 (25 と 50) での相異は 0.034 におよんだ (上表)。

(*) 今回例示の熱源パターンで，DF = 0.25, 0.1, 0.1, 0.1, DO = 0.44 とすると起る。

M1 = 25 N = 775	M1 = 50 N = 3150
最低温度 -1.91920	最低温度 -1.95378

2°) 準ニュートン反復の収束判定基準について: 今回は簡単のため

$$\|u^{(i-1)} - u^{(i)}\|_2 < \text{EPSN} \quad (\text{上表では } 10^{-4}) \text{ なら収束}$$

としたが、これで得られた各格子点での u 値がどの程度の精度で求まるかは甚だ問題である。非線形性の程度 (今の例では DO 値), 拡散係数の分布 (DF 値), そしてソースパターン ($FF()$ 値) により、しかもどの場所に興味があるかによる。また算法 (A, B, AI) にも依存する。表1の最低温度の欄を注意深く見ると若干のことは読みとれるが、もうすこし詳しく見てみよう:

表2 $DF = 0.25, 0.1, \dots; DO = 0.4; MJ = 2, MK = 2 (3150 \text{ 元}), KF = 2$
 の場合につき Pr. A, B, AI の出力を $\text{EPSN} = 10^{-4}$ にて比較する。

		MJ, M1, MK, M2, N		2 50		2 63		3150						
		TAU, DO, KF, EPSN		1.0 0.40		2 0.10D-03								
t	XDA(*)	Pr. A (864°)				Pr. B (299°)				Pr. AI (163°)				
		TTN=112	U(4,*)	U(28,*)	ERR NI	TTN=160	U(4,*)	U(28,*)	ERR NI	TTL, TTN, TTL/TTN	579. 128. 4.5	U(4,*)	U(28,*)	ERR NI NIC
40	4.000	0.61883	-0.76002	0.000006	2	0.61883	-0.76001	0.000010	3	0.61883	-0.76002	0.000007	2	8
42	5.000	0.69206	-0.86501	0.000025	2	0.69206	-0.86496	0.000066	2	0.69206	-0.86501	0.000021	2	10
44	6.000	0.75323	-0.95967	0.000025	2	0.75323	-0.95965	0.000015	3	0.75323	-0.95967	0.000021	2	10
46	7.000	0.80418	-1.04532	0.000025	2	0.80418	-1.04527	0.000037	3	0.80418	-1.04532	0.000021	2	10
48	8.000	0.84653	-1.12305	0.000024	2	0.84653	-1.12293	0.000069	3	0.84653	-1.12306	0.000021	2	10
50	10.000	0.91083	-1.25854	0.000090	2	0.91083	-1.25847	0.000019	3	0.91083	-1.25856	0.000072	2	14
52	12.000	0.95470	-1.37218	0.000086	2	0.95470	-1.37199	0.000078	3	0.95470	-1.37220	0.000072	2	14
54	14.000	0.98438	-1.46864	0.000083	2	0.98438	-1.46847	0.000034	4	0.98438	-1.46866	0.000072	2	14
56	16.000	1.00425	-1.55150	0.000080	2	1.00425	-1.55119	0.000070	4	1.00425	-1.55153	0.000070	2	13
58	20.000	1.02596	-1.68710	0.000027	3	1.02596	-1.68665	0.000082	3	1.02596	-1.68712	0.000019	3	22
60	24.000	1.03433	-1.79379	0.000027	3	1.03433	-1.79327	0.000058	4	1.03433	-1.79382	0.000020	3	21
62	28.000	1.03665	-1.88092	0.000027	3	1.03665	-1.88063	0.000043	5	1.03665	-1.88094	0.000021	3	19
64	32.000	1.03635	-1.95425	0.000028	3	1.03635	-1.95347	0.000095	5	1.03635	-1.95427	0.000023	3	19

$U(28,*)$ 欄は、下から18行目、右から28列目の u 値である。 $U(4,*)$ は同じ行の4列目。TTN は全 N (ewton) 反復回数, TTL は N 反復での全ICCG反復回数。

$U(28,*)$ 欄の、 t (XDA*) = 10 以後の時刻での Pr. B の成績が特にわるい。

$\text{EPSN} = 10^{-5}$ としたときの ($t = 20$ 以後の) 出力を下表に示す。

表3

		TTN=160 (913°)		TTN=208 (347°)		(230°) 891. 176. 5.1								
58	20.000	1.02596	-1.68712	0.000003	4	1.02596	-1.68709	0.000002	5	1.02596	-1.68712	0.000002	4	33
60	24.000	1.03433	-1.79382	0.000003	4	1.03433	-1.79379	0.000003	6	1.03433	-1.79382	0.000002	4	33
62	28.000	1.03665	-1.88094	0.000003	4	1.03665	-1.88093	0.000004	7	1.03665	-1.88094	0.000002	4	33
64	32.000	1.03635	-1.95427	0.000003	4	1.03635	-1.95427	0.000005	8	1.03635	-1.95427	0.000003	4	33

(これなら $U(28,*)$ 点でも 10^{-4} が確保できる。)

今の場合、Pr. B においては、 $U(28,*)$ 欄では、 $t \geq 10$ でも 10^{-4} 以下の誤差に抑えるためには、EPSN はもうひと桁精しく 10^{-5} にせよということである。

非線形性を弱く、たとえば $DO = 0.2$ にすれば、その必要はない:

表4 $\text{EPSN} = 10^{-4}, DO = 0.2$ の場合

		TTN=96 (851°)		TTN=120 (257°)		(139°) 449. 111. 4.0								
58	20.000	1.09376	-1.36619	0.000011	2	1.09376	-1.36617	0.000028	2	1.09376	-1.36619	0.000015	2	15
60	24.000	1.10674	-1.40530	0.000007	2	1.10675	-1.40528	0.000053	2	1.10674	-1.40530	0.000019	2	13
62	28.000	1.11205	-1.43009	0.000005	2	1.11205	-1.43007	0.000072	2	1.11205	-1.43009	0.000012	2	13
64	32.000	1.11374	-1.44621	0.000003	2	1.11375	-1.44619	0.000086	2	1.11374	-1.44621	0.000098	1	7

図2 代表的横線上の u 値(温度)の時間的变化(横軸は $t=0\sim 32$)
 ($DF = 0.5, 0., 0.2, 0.2$; $D0 = 0.2$ の場合)

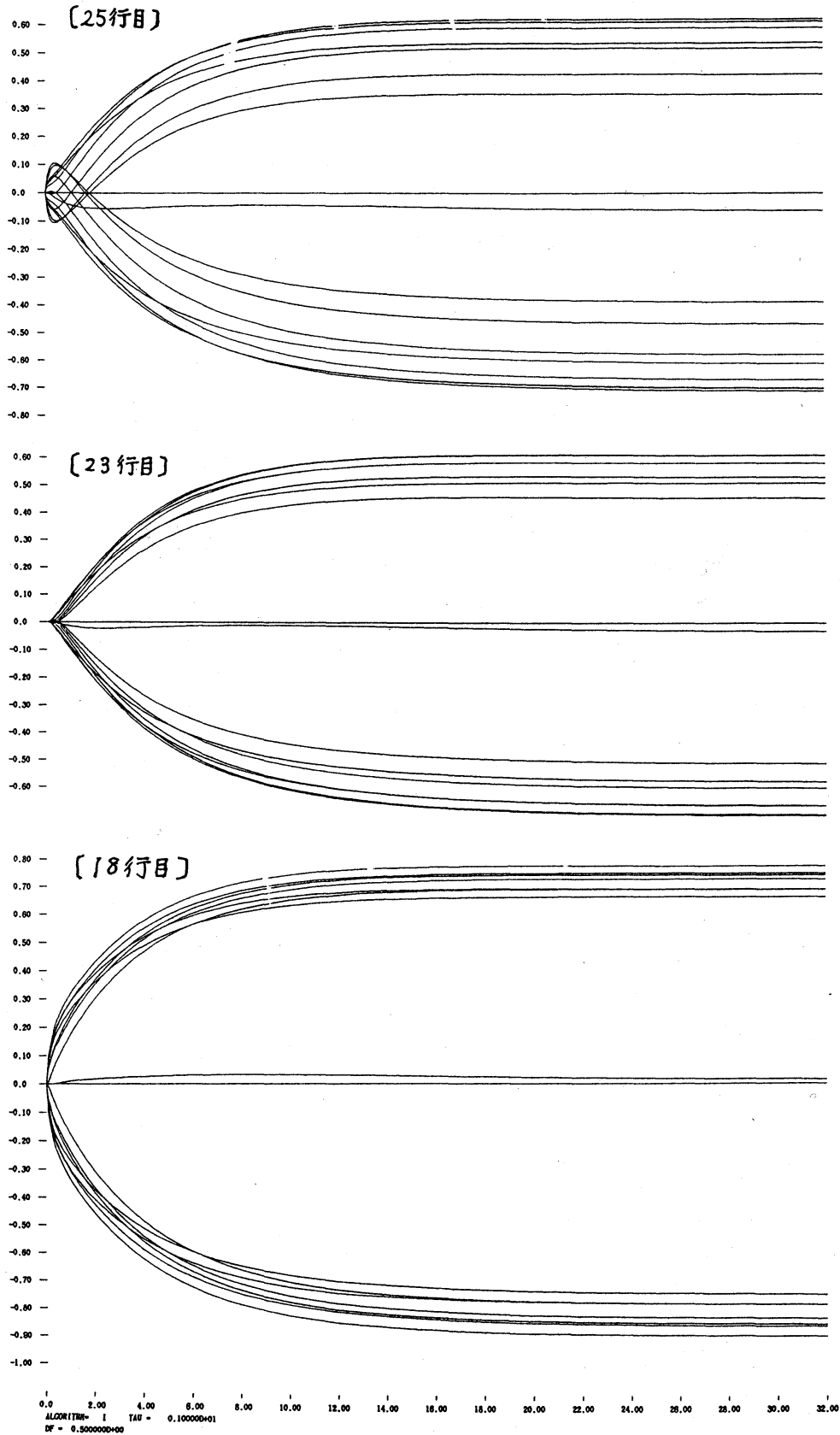


図3 : $t = 32$ (最終)での温度の等高線.

$DF = 0.25, 0.1, \dots$; $DO = 0.40$; 100×12 (12700元).

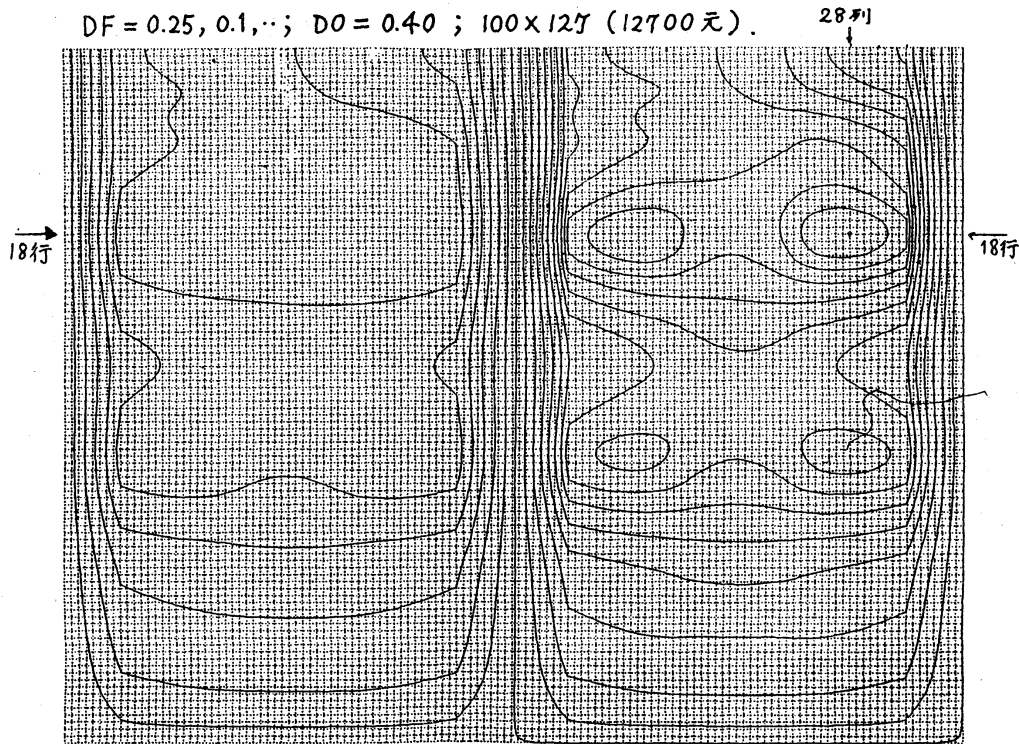
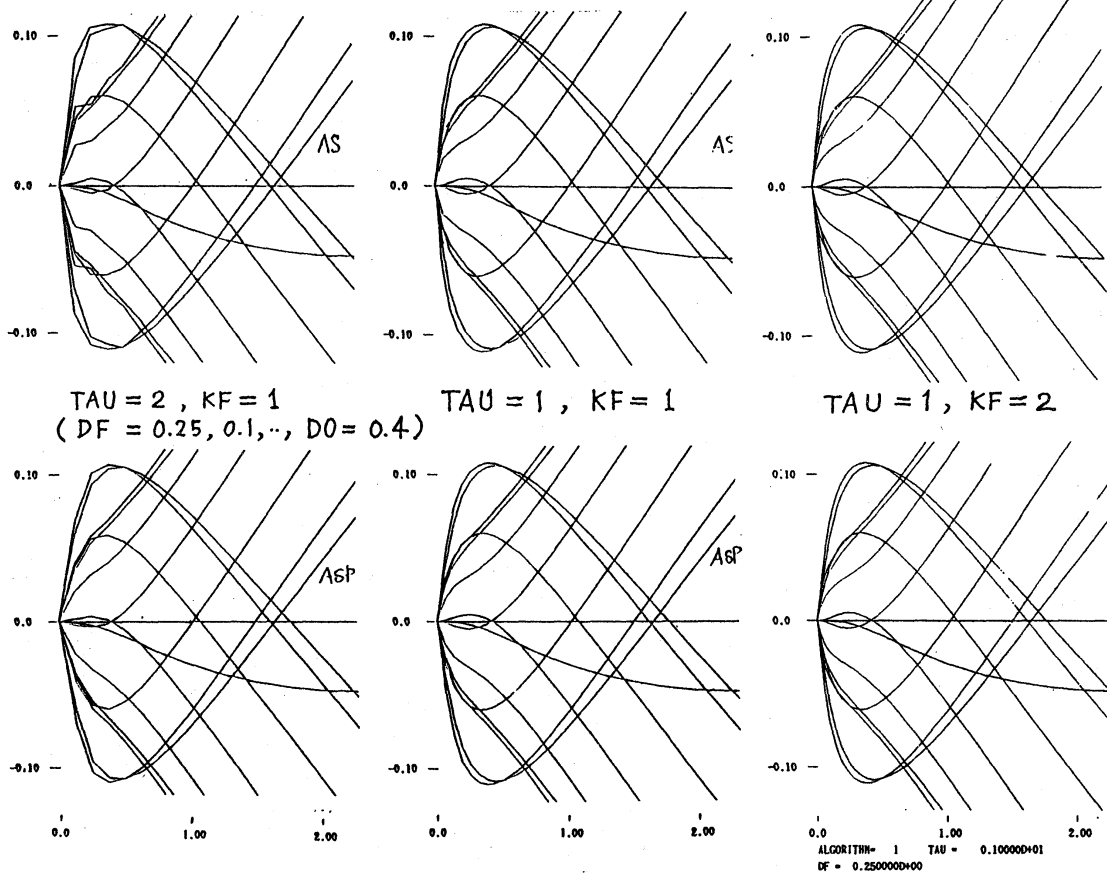


図4 平均化による初期値とり直しの効果: 上段が何も手当しないときのもの.



プログラムAの主要部 (これが基本)

```

*
1 PROGRAM MODEAS
2 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
*
3 PARAMETER( MJ=1,M1=25*MJ,NK=1,M2=32*MK-1 ,N=M1*M2,KMAX=N )
*
4 DIMENSION AO(N),A1(-M1:N),A2(-M1:N),AT(0:M1,N),AW(N)
+ ,DF(0:3),FF(4*24),WK(0:N+M1),F(N),C(N),BW(-M1:N+M1)
+ ,BO(N),B1(N),UU(0:2000,50),T(0:2000),UTC(M2,0:1024,6 )
+ ,UWN(-M1:N+M1),ERR(1024), NI(1024), BWR(-M1:N)
*

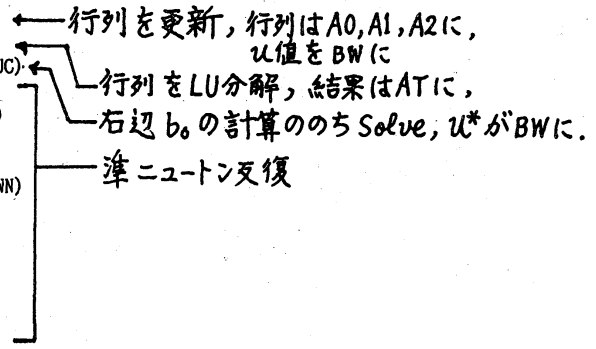
```

```

32 TAU=TAU/(16.0D0*KF)
33 DO 320 JT = 1, 8*KF
34 CALL REVMAT(N,M1,M2,AO,A1,A2,WK,DF,DO,BW,MJ,MK)
35 → CALL IPTALU(N,M1,AT,AO,A1,A2,AW,C, TAUC)
36 CALL RIGHT(N,M1,AT,BO,B1,AO,A1,A2,F,BW,C,ITG,TAUC)
37 DO 820 IN=1,NITER
38 CALL REVMAT(N,M1,M2,AO,A1,A2,WK,DF,DO,BW,MJ,MK)
39 DO 821 I=1,N
40 821 BWR(I)=BW(I)
41 CALL RIGHTN(N,M1,AT,BO,B1,AO,A1,A2,BW,TAUC,C,UWN)
42 SUM=0.0D0
43 DO 240 I=1,N
44 240 SUM=SUM+(BW(I)-BWR(I))**2
45 ERN=DSQRT(SUM/N)
46 IF(ERN.LT.EPSN) GO TO 825
47 820 CONTINUE
48 825 CONTINUE
49 ITF=ITF+1
50 ERR(ITF)=ERN
51 NI(ITF)=IN
52 DO 321 J=1,M2
53 321 UTC(J,ITF,3)=BW(18*MJ+M1*(J-1))
54 XDA(ITF)=XDA(ITF-1)+TAUC
55 320 CONTINUE

```

----- $\tau = 0.5$ までの初期計算



← 下から18行目の値をUTC(,3)へ。(Print用)

----- ここから $\tau > 0.5$ の計算に入る.

```

56 TAU1=TAU/(8.0D0*KF)
57 DO 400 K=1,KM
58 TAU=TAU1*(2.0**K-1)
59 DO 330 JT = 1, 4*KF
60 CALL REVMAT(N,M1,M2,AO,A1,A2,WK,DF,DO,BW,MJ,MK)
61 → CALL IPTALU(N,M1,AT,AO,A1,A2,AW,C, TAUC)
62 CALL RIGHT(N,M1,AT,BO,B1,AO,A1,A2,F,BW,C,ITG,TAUC)
63 DO 830 IN=1,NITER
64 CALL REVMAT(N,M1,M2,AO,A1,A2,WK,DF,DO,BW,MJ,MK)
65 DO 831 I=1,N
66 831 BWR(I)=BW(I)
67 CALL RIGHTN(N,M1,AT,BO,B1,AO,A1,A2,BW,TAUC,C,UWN)
68 SUM=0.0D0
69 DO 340 I=1,N
70 340 SUM=SUM+(BW(I)-BWR(I))**2
71 ERN=DSQRT(SUM/N)
72 IF(ERN.LT.EPSN) GO TO 835
73 830 CONTINUE
74 835 CONTINUE
75 ITF=ITF+1
76 ERR(ITF)=ERN
77 NI(ITF)=IN
78 DO 322 J=1,M2
79 322 UTC(J,ITF,3)=BW(18*MJ+M1*(J-1))
80 XDA(ITF)=XDA(ITF-1)+TAUC
81 330 CONTINUE
82 400 CONTINUE

```

このDO 330の文を2行下の→部に移すとPr. Bになる。(上の方のDO 320の文についても同様)

"平均化による初期値とり直し"を前置するときには、

```

TAUC=TAU/(16.0D0*KF)
DO 310 IT=1,2
CALL REVMAT(N,M1,M2,AO,A1,A2,WK,DF,DO,BW,MJ,MK)
CALL IPTALU(N,M1,AT,AO,A1,A2,AW,C, TAUC)
CALL RIGHT(N,M1,AT,BO,B1,AO,A1,A2,F,BW,C,ITG,TAUC)
DO 810 IN=1,3
CALL REVMAT(N,M1,M2,AO,A1,A2,WK,DF,DO,BW,MJ,MK)
CALL RIGHTN(N,M1,AT,BO,B1,AO,A1,A2,BW,TAUC,C,UWN)
810 CONTINUE
DO 101 I=1,N
101 BWW(I,IT)=BW(I)
310 CONTINUE
*
DO 103 I=1,N
WX=(BWO(I)+BWW(I,1))/2.0
WY=(BWW(I,1)+BWW(I,2))/2.0
103 BW(I)=(WX+WY)/2.0
ITF=ITF+1
DO 121 J=1,M2
121 UTC(J,ITF,3)=BW(18*MJ+M1*(J-1))
XDA(ITF)=XDA(ITF-1)+TAUC
*

```

```

83 TTN=0
84 DO 500 I=1,ITF
85 500 TTN=TTN+NI(I)
86 WRITE(6,*) ' TTN= ',TTN
***** PRINT ROUTINE *****

```

DO 320 JT = 2, 8*KF 以下はAと同じ。

ここから先は、Stiffな、非線形連立常微分方程式の解法という観点から、台形法とZlamal(3段)法の比較を行う。初めに台形法に対する“平均化による初期値とり直し”の効果を調べる。ニュートン反復のEPSNを 10^{-6} に設定する。

場は、 $DF=0.25, 0.1, \dots$; $DO=0.4$; $MJ=1, MK=1(25 \times 31元)$ とする。空間のあみ目が粗いから条件数はまだ大きくはない：初めが 1.49×10^3 , 終りが 2.33×10^3 。

$\tau=1.0$, $KF=1, 2, 4, 8, 16$ の各々に対しその半分の τ のものを同時に計算し、差をDIF(*)に出力する。測定点は25行目、左から28列目の点とした。

表5

*** PROG: MODEAJ (ICCGV.) *** (標準) (ICCG使用)

KF →	1	2	4	8	16	32						
* XDA(*)	U(28,*)	DIF(*)	U(28,*)	DIF(*)	U(28,*)	DIF(*)	U(28,*)	DIF(*)	U(28,*)	DIF(*)	UF(28,*)	
1	0.063	0.051064	0.000313	0.050751	0.000339	0.050412	0.000077	0.050335	0.000019	0.050316	0.000005	0.050311
2	0.125	0.078680	0.001589	0.077091	0.000242	0.076849	0.000060	0.076789	0.000015	0.076774	0.000004	0.076770
3	0.188	0.092055	0.000352	0.091703	0.000138	0.091565	0.000035	0.091531	0.000009	0.091522	0.000002	0.091520
4	0.250	0.100547	0.000409	0.100137	0.000091	0.100046	0.000023	0.100023	0.000006	0.100017	0.000001	0.100016
5	0.313	0.104900	0.000258	0.104642	0.000069	0.104573	0.000017	0.104556	0.000004	0.104552	0.000001	0.104551
6	0.375	0.106630	0.000222	0.106408	0.000055	0.106353	0.000014	0.106339	0.000003	0.106336	0.000001	0.106335
7	0.438	0.106364	0.000184	0.106180	0.000046	0.106134	0.000011	0.106122	0.000003	0.106120	0.000001	0.106119
8	0.500	0.104616	0.000152	0.104464	0.000038	0.104426	0.000010	0.104416	0.000002	0.104414	0.000001	0.104413
9	0.625	0.098115	0.000174	0.097941	0.000043	0.097898	0.000011	0.097887	0.000003	0.097885	0.000001	0.097884
10	0.750	0.088837	0.000149	0.088689	0.000037	0.088652	0.000009	0.088642	0.000002	0.088640	0.000001	0.088640
11	0.875	0.077896	0.000121	0.077775	0.000030	0.077745	0.000007	0.077738	0.000002	0.077736	0.000000	0.077735
12	1.000	0.065914	0.000094	0.065821	0.000024	0.065797	0.000006	0.065791	0.000001	0.065790	0.000000	0.065789
29	20.000	-0.886481	0.001121	-0.885360	0.000273	-0.885087	0.000068	-0.885018	0.000017	-0.885001	0.000004	-0.884997
30	24.000	-0.941583	0.001084	-0.940499	0.000270	-0.940229	0.000067	-0.940162	0.000017	-0.940145	0.000004	-0.940141
31	28.000	-0.982035	0.000956	-0.981079	0.000235	-0.980844	0.000059	-0.980785	0.000015	-0.980770	0.000004	-0.980767
32	32.000	-1.012652	0.000789	-1.011863	0.000197	-1.011666	0.000049	-1.011617	0.000012	-1.011605	0.000003	-1.011602

(301°)

(473°)

*** PROG: MODEAJV (ICCGV.) *** (平均化つき) (ICCG使用)

1	0.063	0.045202	0.003878	0.049081	0.000947	0.050028	0.000213	0.050240	0.000052	0.050293	0.000013	0.050306
2	0.125	0.075174	0.001236	0.076411	0.000269	0.076679	0.000067	0.076747	0.000017	0.076764	0.000004	0.076768
3	0.188	0.090853	0.000479	0.091332	0.000140	0.091472	0.000035	0.091507	0.000009	0.091516	0.000002	0.091518
4	0.250	0.099516	0.000380	0.099897	0.000089	0.099986	0.000022	0.100008	0.000006	0.100013	0.000001	0.100015
5	0.313	0.104243	0.000229	0.104472	0.000059	0.104531	0.000015	0.104545	0.000004	0.104549	0.000001	0.104550
6	0.375	0.106125	0.000158	0.106283	0.000039	0.106322	0.000010	0.106331	0.000002	0.106334	0.000001	0.106334
7	0.438	0.105986	0.000099	0.106086	0.000025	0.106110	0.000006	0.106117	0.000002	0.106118	0.000000	0.106118
8	0.500	0.104329	0.000063	0.104392	0.000016	0.104408	0.000004	0.104411	0.000001	0.104412	0.000000	0.104413
9	0.625	0.097943	0.000045	0.097898	0.000010	0.097887	0.000003	0.097885	0.000001	0.097884	0.000000	0.097884
10	0.750	0.088733	0.000071	0.088662	0.000017	0.088645	0.000004	0.088641	0.000001	0.088640	0.000000	0.088639
11	0.875	0.077828	0.000070	0.077758	0.000017	0.077741	0.000004	0.077737	0.000001	0.077736	0.000000	0.077735
12	1.000	0.065871	0.000062	0.065809	0.000015	0.065794	0.000004	0.065790	0.000001	0.065789	0.000000	0.065789
29	20.000	-0.886479	0.001120	-0.885360	0.000273	-0.885087	0.000068	-0.885018	0.000017	-0.885001	0.000004	-0.884997
30	24.000	-0.941581	0.001082	-0.940498	0.000269	-0.940229	0.000067	-0.940162	0.000017	-0.940145	0.000004	-0.940141
31	28.000	-0.982034	0.000955	-0.981079	0.000235	-0.980844	0.000059	-0.980785	0.000015	-0.980770	0.000004	-0.980767
32	32.000	-1.012651	0.000788	-1.011863	0.000197	-1.011666	0.000049	-1.011617	0.000012	-1.011605	0.000003	-1.011602

(87°)

(129°)

(196°)

(303°)

(474°)

1°) 平均化は(振動的な誤差は抑えるが)精度的には初期($\tau \leq 0.25$ あたり)の間はダンプリ過ぎの嫌いがある。 $\tau \geq 0.5$ ともなると精度的にも優れてくる。

2°) τ を半分にすると誤差は $1/3$ になるという線形問題での周知の事実は、ここでほぼ成立している。(DIF値に $4/3 = 1.33$ を掛けると真値との差が得られる)

3°) $KF=4$ にて4桁, $KF=16$ にて5桁の精度が得られる(このとき総時間きざみは512), ($KF \geq 2$ ではもはや振動的な誤差は、目では見えないから“平均化”の必要はないとも言える。また振動が目で見えたら、 τ が粗いと判断して τ を小さくする, としてもよい)

Zlamal (3段)法: 一般の線形多段法の公式を

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n-i} = \tau \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n-i}, \quad \sum_{i=0}^k \beta_i = 1$$

特性方程式を

$$f(\zeta) + \tau \lambda \sigma(\zeta) = 0; \quad f(\zeta) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \zeta^{n-i}, \quad \sigma(\zeta) = \sum_{i=0}^k \beta_i \zeta^{n-i}$$

と書くとき, Gear の $\sigma(\zeta)$ は $\beta_0 \zeta^k$ の形をしているに対し Zlamal は $\beta_0 (\zeta + \zeta_0)^k$ である。 ζ_0 を決めると, β_i, α_i が全部定まる。(詳しくは文献1)

$k=3$ (3段)とし, $\zeta_0 = \frac{1}{2}$ のものと $\zeta_0 = \frac{1}{4}$ のものを取り上げて, 台形法と比較した。初期値が3点要るがそれは台形法によ, て求める。

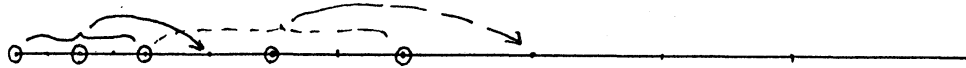
結果の要約:

1° Zlamal 3段, $\zeta_0 = \frac{1}{4}$ の $KF=2$ の時間きざみは, ^{この精度} 台形法の $KF=4$ 並みである。(ガウスによるとき, 約半分のCPUタイムで同程度の精度が得られる。) (表6-1参照)

Zlamal 3段, $\zeta_0 = \frac{1}{2}$ の $KF=2$ は, $\zeta_0 = \frac{1}{4}$ のものの約半分の誤差である。

2° Zlamal 3段, $\zeta_0 = \frac{1}{2}$ の $KF=4$ のものは台形法の $KF=16$ 並みである。(ガウスによるとき約1/4のCPUタイムで同程度の精度が得られる) (表6-2参照)

3° Zlamal 3段, $\zeta_0 = \frac{1}{2}$ の $KF=1$ は台形法の $KF=2$ よりやや劣る。Zlamal にとって $KF=1$ では,



から分かるように, 時間中の変更が頻繁過ぎて, 実力を出せない嫌いがある。(表6-3参照)

以下は, $M1=25$ ($N=775$); $DF=0.25, 0.1, \dots$; $D0=0.4$; $EPSN=1.0D-7$ による。

表6-1 台形法の $KF=4$ と Zlamal (3段, $\zeta_0 = \frac{1}{4}$ と $\frac{1}{2}$) の $KF=2$ を比較。

T	真値 (6桁まで)	MODEA (台形法) KF=4 差	MODEZ, $\zeta_0 = \frac{1}{4}$ KF=2 差	MODEZ $\zeta_0 = \frac{1}{2}$ KF=2 差	$\zeta_0 = \frac{1}{4}$ (差) $\zeta_0 = \frac{1}{2}$ (差)
10.0	-0.615311	-0.615358 47	-0.615284 27	-0.615297 14	1.93
12.0	-0.693208	-0.693266 58	-0.693166 42	-0.693188 20	2.10
14.0	-0.756055	-0.756117 62	-0.756005 50	-0.756032 23	2.17
16.0	-0.807340	-0.807402 62	-0.807290 50	-0.807318 22	2.27
20.0	-0.884996	-0.885087 91	-0.884869 127	-0.884935 61	2.08
24.0	-0.940139	-0.940229 90	-0.940008 131	-0.940083 56	2.34
28.0	-0.980765	-0.980844 79	-0.980654 111	-0.980718 47	2.36
32.0	-1.011600	-1.011666 66	-1.011511 89	-1.011563 37	2.40

表6-2 台形法のKF=16とZlamal(3段; $\zeta_0=1/4, 1/2$)のKF=4を比較.

T	真値(6桁まで)	MODEA(台形法) KF=16	MODEZ, $\zeta_0=1/4$ KF=4	MODEZ, $\zeta_0=1/2$ KF=4
10.0	-0.615311	-0.615314 ₃	-0.615308 ₃	-0.615310 ₁
12.0	-0.693208	-0.693211 ₃	-0.693203 ₅	-0.693205 ₃
14.0	-0.756055	-0.756059 ₄	-0.756049 ₆	-0.756052 ₃
16.0	-0.807340	-0.807344 ₄	-0.807334 ₆	-0.807338 ₂
20.0	-0.884996	-0.885001 ₅	-0.884982 ₁₄	-0.884989 ₆
24.0	-0.940139	-0.940145 ₆	-0.940125 ₁₄	-0.940133 ₆
28.0	-0.980765	-0.980770 ₅	-0.980753 ₁₂	-0.980760 ₅
32.0	-1.011600	-1.011605 ₅	-1.011596 ₁₀	-1.011159 ₄

表6-3 台形法のKF=2とZlamal(3段; $\zeta_0=1/4, 1/2$)のKF=1を比較

T	真値(6桁まで)	MODEA(台形法) KF=2	MODEZ, $\zeta_0=1/4$ KF=1	MODEZ, $\zeta_0=1/2$ KF=1
10.0	-0.615311	-0.615496 ₁₈₅	-0.615088 ₂₂₃	-0.615152 ₁₅₉
12.0	-0.693208	-0.693441 ₂₃₃	-0.692841 ₃₆₇	-0.693045 ₁₆₃
14.0	-0.756055	-0.756305 ₂₅₀	-0.755606 ₄₄₉	-0.755826 ₂₂₉
16.0	-0.807340	-0.807588 ₂₄₈	-0.806871 ₄₆₉	-0.807158 ₁₈₂
20.0	-0.884996	-0.885360 ₃₆₄	-0.883829 ₁₁₁₇	-0.884278 ₇₁₈
24.0	-0.940139	-0.940498 ₃₅₉	-0.938758 ₁₃₈₁	-0.939601 ₅₃₈
28.0	-0.980765	-0.981079 ₃₁₄	-0.979577 ₁₁₈₈	-0.980291 ₄₇₄
32.0	-1.011600	-1.011863 ₂₆₃	-1.010701 ₈₉₉	-1.011329 ₂₇₁

Zlamal $\zeta_0=1/4, 1/2$ の局所離散化誤差定数はそれぞれ, $-0.102, -0.046$, $A(\alpha)$ stability の角度 α はそれぞれ, $79.9^\circ, 60.0^\circ$ である。

以上, グラフを画くプログラム, 条件数を概算するプログラムは, 図書館情報大学講師: 長谷川秀彦氏をわずらわした。深謝したい。

紙面の制約から言及できなかったことが多い。別の機会に報告したい。

文献

- 1) 村田・名取・唐木: 大型数値シミュレーション, 岩波, 1990
- 2) Zlamal, M: "Finite Element Methods in Heat Conduction Problems" in Whiteman (Ed): The Mathematics of Finite Element and Applications II, Academic Press (1975)
- 3) Dupont, T, Fairweather & Johnson, P: "Three Level Galerkin Meth. for Parabolic Equations", SIAM J. Numer. Anal. Vol 11, 2 (1974)