数理解析研究所講究録
第746巻1991年261-274

文書整形システム $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-LaTeX とは

慶應義塾大学理工学部　野寺 隆
(Takashi NODERA)

1 はじめに

文書整形システムとして知られる TeX[1]は, 現在では数理物理学の論文を記述するためのなくてはならないツールになりつつある. たぶん御存知の方も多いと思うのだが, TeX の仲間には, plain TeX や $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TeX, LaTeX, MuTeX, PICTeX などがある. この中でも, LaTeX は L. Lamport によって Scribe を真似て作られたシステムであり, 難しいことをするのでなければ, 短期間に学習することができるものであるので, 現在多くのユーザを持つシステムと言える.

$\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TeX は, M. D. Spivak によって作られたシステムである. 特に, 数式の記述に関して, 他の TeX の追従を許さない豊富なコマンドを持っている. また, AMS が全面的に採用しており, これを利用して記述したテキストを電子メールやフロッピーディスクで投稿することができる. また, そのスタイルファイルは, AMS の雑誌のスタイルに近いので, プレプリントを作成するのにも十分利用できるものである. しかし, $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TeX は, どちらかというと plain TeX に近いコマンド体系なので, 一見学習しづらいように思われていたことも確かであろう. 特に, 表や図を描くには, LaTeX のように簡単に記述することは出来なかった. 従来, LaTeX のように使うことができ, しかも数式の記述に関しては $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TeX のように豊富なコマンドを持つシステムを望むユーザも多かったのである. そこで, 登場したのが $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-LaTeX である.

$\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TeX と LaTeX の融合は, 従来から考えられていた. 実際, AMS によって研究開発に本腰が入れられたのは 1987 年であった. この年以降, AMS の TeX の技術スタッフである Michael Downes を顧問として, Romesh Kumar, Frank Mittelbach, Rainer Schöpf の 3 人で $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-LaTeX を制作するプロジェクトが始動し, 現在に至っている. 当然, このシステムを作るための精神として, LaTeX の標準的なコマンドを統帥し, $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TeX のコマンド体系である ‘\something ... \endsomething’を LaTeX の ‘\begin{something}...\end{something}’ のような環境に変更したことであろう. また, $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-LaTeX には, フォントの選択に関してもいろいろ新しい試みが行なわれている. 例えば, フォントは (たとえ数式フォントでも) プリロードする必要がなく, オンデマントでロードすることが出来るとか, ‘\bf\Large’ と ‘\Large\bf’ とは同じ意味を持つことなどをあげることができる.

[1] TeX は AMS(American Mathematical Society) の登録商標である.

2 $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-LaTeX

本節では, AMS-LaTeX の基本的な特徴について述べることにする. 従来の LaTeX と AMS-LaTeX の違いは, 特にフォントの選択方法にあると言える. 特に, AMS-LaTeX では Mittelbach と Schöpf のフォント選択法を採用している. これは, LaTeX V3.0 に採用される方法の一部を AMS-LaTeX のフォントパッケージに則りインプリメントしたものである. LaTeXV3.0 のフォントの選択は, shape, series, family という属性によって指定することができるようになった. 例えば,

```
\family{cmtt}\shape{n}\selectfont
```

というように指定する. 新しい LaTeX のフォント選択に関する詳細は, *TuGboat* [18] を参照してほしい.

2.1 スタイルファイル

LaTeX や AMS-TeX の特徴の一つにスタイルファイルの概念を取り入れていることをあげることができる. AMS-LaTeX においては, LaTeX のスタイルファイルである `article' を使うことができるのだが, この中で AMS-TeX の数式のコマンド体系を利用できるようにするには, スタイルオプションとして amstex.sty のファイルを

```
\documentstyle[amstex]{article}
```

というように指定することになっている.

前述のように, スタイルファイルの指定をしてもよいが, AMS-LaTeX には LaTeX の article と book に対応するスタイルファイルとして amsart と amsbook を利用することができる. 例えば,

```
\documentstyle{amsart}
\documentstyle{amsbook}
```

というよに利用すればよい. この 2 つのスタイルファイルを使う場合には, 前述のスタイルオプションである amstex を指定する必要はない. 特に, amsart のスタイルファイルは, AMS-TeX の amsppt に対応するものであが, 完全に amsppt のコマンドを実現できるものではない. 例えば, 参考文献の記述などに関しては, LaTeX の参考文献の記述方法に従っている.

なお, amsart や amsbook のスタイルファイルには, 2 段組の概念が存在しないので, 例えスタイルオプションとして twocolumn を指定しても 2 段組を生成しない.

LaTeX の article に相当するスタイルファイル amsart では, タイトルや著者名などの論文を記述するコマンドが, AMS-TeX V2.0 用のものに拡張されており, 次のものを利用することが可能である.

```
\title  \author \address \email \thanks
\keyword  \subjclass  \translator \dedicatory \date
```

これらのコマンドは, '\maketitle' を指定することにより論文の所定の場所に記述される. 通常は, AMS-TeX V2.0 の amsppt に従っているので, 著者の住所や電子郵便 (e-mail) の住所は, 参考文献の後に記述されることになる. また, 論文の要旨を記述する '\abstract' コマンドも指定することもできるが, その場合には '\maketitle' の後に記述すればよい.

2.2 amstex オプション

AMS-LaTeX のスタイルオプションである amstex.sty を指定すると, AMS-TeX で利用できる数式に関するコマンドと新しく LaTeX に加わった環境を使用することが可能となる. 代表的なものは, 次の通り.

- 数式のスペーシングコマンド
- 多重積分記号
- 上, 下矢印のコンド
- ドットコマンド
- 数式のアクセントコマンド (2 重アクセントコマンドなど)
- 根号
- 数式を囲むための\boxed コマンド
- 添字付き矢印コマンド ('@<<<' や '@<<<')
- 数式の上下や左右に記号を付けるコマンド
- 数式モードの中で文を記述する '\text' コマンド
- 新しい演算子記号を作るコマンド

  例えば, 次のように利用する.

```
\newcommand{\xRes}{\operatorname{Res}}
\newcommand{\yRes}{\operatornamewithlimits{Res}}
```

- mod コマンド
- 分数や 2 項係数のコマンドなど
- 連文数コマンド
- smash オプション

以上, AMS-TeX V2.0 のコマンドが AMS-LaTeX でも利用できるようになった.

次に, 新しく LaTeX に加わった環境をあげることにする.

- 数式の場合分け (cases 環境)
- 行列 (matrix, pmatrix, bmatrix, vmatrix, Vmatrix 環境)
- Sb と Sp 環境
- 可換な図式 (amscd オプションを使う)
- 数式の縦揃え例えば, align を使っう場合には,

```
\begin{align}
  \max(f, g) & = \frac{f+g+|f-g|}2 \\
  \max(f,-g) & = \frac{f-g+|f+g|}2
\end{align}
```

  というように入力を記述すればよい.

  当然, このコマンドでは, 数式番号はデフォルトで付くように設定されているが, 'align*' と言うように星印を付けると, 数式番号が自動的に付かないようになる. もはや, LaTeX の数式の縦揃えをする eqnarray 環境や eqnarray* 環境を使う必要がなくなった.

- 数式番号

  数式番号は, 自動的に付けることができる. また, 数式の縦揃えなどにおいて, 一部の数式の数式番号を省略するには, '\notag' コマンドを改行コマンド (\\) の前に指定すればよい.

  数式番号の形式は, スタイルファイルに依存することは事実であるが, ユーザが数式番号の形式を変更することも可能である. 例えば, 数式番号を各節毎に (1.1), (1.2), ..., (2.1), (2.2), ..., (3.1), (3.2), ... というように結び付けるには, '\theequation' を次のように再定義すればよい.

```
\renewcommand{\theequation}{\thesection.\arabic{equation}}
```

  これをプリアンブルに指定すればよいが, 各節や章の始めでは数式番号のカウンタの値をゼロにリセットする必要があるので, '\setcounter' コマンドを用いることになる.

  なお, $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX の amstex オプションを使う場合には, もう少し簡単にこれを実現することができる. すなわち, '\numberwithin' コマンドがあり, 数式番号と節の番号を結び付け, 数式番号のカウンタの値をリセットするには,

```
\numberwithin{equation}{section}
```

と記述すればよい.

なお, 数式番号の相互参照をするためには, '\eqref' コマンドが備わっている. 当然, コマンドを使って数式を参照するには, 参照したい数式にラベル (例えば, 'eqn:aaa' を付けて, 本文中でこれを

```
\eqref{eqn:aaa}
```

というように記述すればよい. 数式番号には, 自動的に括弧が付けられるのは言うまでもない. また, イタリック補正が必要なときには, 自動的に行なわれるようになっている.

- 次の新しいドキュメントオプションが利用できる.

nosumlim	総和の添字
intlim	積分の添字
nonamelm	演算子の添字
ctagsplt	split 環境の数式番号
righttag	数式の右端に数式番号

また, amstex オプションを構成するいくつかのものを個々に利用することができる.

amstext	'\text' の定義
amsbsy	'\boldsymbol' や '\pmb' の定義
amsfonts	'\frak' や '\Bbb' の定義
amssymb	AMS の数学記号フォントの名前を定義

2.3 タイトル名の変更

論文の中で, 要旨を記述するための標題 "Abstract" を "Summary" やフランス語の "Résumé" に変更することもスタイルファイルを修正することなく, '\renewcommand' を使って

```
\renewcommand{\abstractname}{Summary}
```

や

```
\renewcommand{\abstractname}{R\'esum\'e}
```

と指定すればよい. これらのタイトルの変更ができるコマンドには, 次のものがある.

コマンド名	タイトル
\abstractname	要約
\partname	部
\indexname	索引
\figurename	図
\tablename	表
\proofname	証明

`\refname`	参考文献
`\appendixname`	付録
`\tocname`	目次

この他に, amsbook スタイルでは,

コマンド名	タイトル
`\chaptername`	章
`\listfigurename`	図目次
`\listtablename`	表目次
`\bibname`	参考文献

ただし, amsbook スタイルでは, 参考文献のタイトルを変更するのに '\bibname' を使うのだが, amsart では '\refname' を使うことになっているので注意してほしい.

2.4 定理, 定義, 命題

$\mathcal{A}\!\mathcal{M}\!\mathcal{S}$-TEX には, 定理, 定義, 命題などを記述するためのコマンドがいくつか定義されており, 各々のコマンドで文字フォントや印刷形式を違えて印字してくれるようになっていた. $\mathcal{A}\!\mathcal{M}\!\mathcal{S}$-LATEX では, LATEX を使う場合と同様に '\newtheorem' コマンドを使ってデフォルト以外に, それらの各々の環境を制作できるようになっている. 特に, スタイルオプションとして, theorem を指定することにより, 定理, 定義, 命題, 証明などの環境をより自由度を持たせて記述できるようになっている. 特に, 定理のスタイルのレベルには,

(1) plain
(2) definition
(3) remark

という三つのタイプを利用できる.

2.5 証明

定理の証明を記述するには, pf 環境を利用すればよい. 例えば,

```
\begin{pf}
 Trivial.
\end{pf}
```

と入力すると
Proof　Trivial. □
と印刷される.

2.6 BIBTEX 用のスタイル

$\mathcal{A}\!\mathcal{M}\!\mathcal{S}$-LATEX の配布ファイルの中には, amsplain と amsalpha という 2 つの参考文献用のスタイルが含まれている. これは, LATEX の plain と alpha に相当するものだと思えばよい.

この他に, mrabbrev ファイルも提供されており, これは *Mathematical Reviews* に記載される数学や数理科学の雑誌名とそれに関連する分野の標準的な書略語で記述するためのファイルである.

2.7 $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX V2.0 と amstex オプションの違い

$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX の多くのコマンドは, $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LATEX の amstex オプションを指定することによって, その機能を利用することができる. しかし, $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX のコマンドがそのまま使えるものも多いのだが, 使い方が LATEX 風に変更されいてる物も多いので注意が必要である. もっとも恐いのは, コマンド名が同じで, その意味が多少異るものがあることである (例えば, '\:' など). また, 数式モードで利用できるコマンドにいくつかの変更点があるので注意してほしい. 詳細は文献 [19] を参照してほしい.

3 $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LATEX の入手方法

$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LATEX は, AMS が配布しているのだが, 現在では以前のようにディスケットなどでは配布されていない. 一番簡単な方法は下記の住所に, anonymous FTP を使って

`e-MATH.ams.com`

から入手することができる.

また, FTP ができない所は,

AMS-LATEX@MATH.AMS.COM

に $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LATEX がほしい旨と完全な住所を書き, e-mail を送ればよいことになっている.

どしうても, 以上の 2 つの方法で入手出来ない人は, AMS の Publication 部門に手紙を書けば相談にのってくれることになっている. 住所は下記の通り.

```
American Mathematical Society
P.O. Box 6248
Providence, RI 02940
USA
```

なお, $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX や $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LATEX を使って論文を投稿する場合の規定書ができあがっており, これも e-MATH に anonymous FTP をして手に入れることができるし,

`GUIDE-ELEC@MATH.AMS.COM`

に e-mail を送ると, 電子郵便で入手できる.

東京大学にも $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LATEX のマクロファイルとそのフォントファイルが置いてあるので, anonymous FTP を使ってソフトウェアを入手することができる.

4 論文例

簡単な $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LATEX を使った論文例を付録に記載することにする. これは, 以前に高橋秀俊先生が京都大学数理解析研究所で行なわれた数値積分に関する研究集会で発表され, その講究録に載せられた論文の一部である.

なお, 入力テキストも同時に掲載したので, $\mathcal{AMS}$-LaTeX の記述方法がおわかりになると思う.

5 おわりに

$\mathcal{AMS}$-LaTeX の機能について簡単に概観してきた. これは, LaTeX の機能をほぼ利用することができるし, さらに数式に関しては, $\mathcal{AMS}$-TeX を使った場合のクオリティを持っているので, ユーザにとってこんなすばらしいものはない. ただし, いろんな機能を持つ性格上, システムが多少大きいのが気にかかる.

参考文献

[1] I. Aredon, "*The TaO of TeX—A Gourmet Guide to Treasure Chest of Favorit Mathematician's Activities by Computer*," KSTS/RR-88/002, Keio Univ, 1988.

[2] I. Aredon, "*The TaO of TeX—Notes for Formulas Part I*, " KSTS/RR-88/003, Keio Univ, 1988.

[3] I. Aredon, 『TeX 稽古』, Seminar on Mathematical Science No.13, Keio Univ., マテマティカ, 1989.

[4] I. Aredon, 『初めての $\mathcal{AMS}$-TeX』, Seminar on Mathematical Science No.14, Keio Univ., マテマティカ, 1989.

[5] I. Aredon, 『とことん TeX』, Seminar on Mathematical Science No.15, Keio Univ., マテマティカ, 1989.

[6] D. E. Knuth, "*The TeXbook*," Addison Wesley, 1984.

[7] L. Lamport, "*LaTeX—A Document Preparation System*," Addison-Wesley, 1986.

[8] 野寺隆志, 『楽々LaTeX』, 共立出版, 1990.

[9] 大野義夫, 野寺隆, 『数学のための TeX 入門』(仮題), 近刊 (岩波書店).

[10] 大野義夫編, 『TeX 入門』, 共立出版, 1989.

[11] 大野義夫, "*$\mathcal{AMS}$-TeX*," bit vol.20 No.3, pp.351-362, 1988.

[12] A. L. Samuel, "*First Grade TeX-A Beginner's TeX Manual*," STANCS-83-985, Stanford Univ., 1983.

[13] M. D. Spivak, "*The Joy of TeX*," Secomnd Edition, American Mathematical Society, 1990.

[14] M. D. Spivak, "*LAMS-TeX—The Synthesis*," TeXplorators Corpolation, 1989.

[15] I. Aredon, "*LAMS-TeX* 参上," bit 9 月号, pp.36-48 (1990).

[16] I. Aredon, "新しい $\mathcal{AMS}$-TeXV2.0," bit 11 月号, pp.67-79(1990).

[17] F. Mittelbach and R. Schöpf, *The New Font Family Selection—User Interface to Standard LaTeX*, TuGboat, Vol.11 No.2 (1990).

[18] AMS, *$\mathcal{AMS}$-LaTeX Version 1.0—User,s Guide*," American Mathematical Society, August 1990.

[19] AMS, *Installation Guide for $\mathcal{AMS}$-LaTeX 1.0*," American Mathematical Society, August 1990.

[20] 野寺隆志, 『もっと³ $\mathcal{AMS}$-TeX』, 共立出版, 1991.

付 録 (論文例)

THE METHOD OF SPLITTING FOR MULTIDIMENSIONAL INTEGRATION WITH SINGULARITIES

HIDETOSI TAKAHASI
KEIO UNIVERSITY

1. Introduction

Numerical integration of function with one or more singularities always poses some problem. Foe example, one-dimensional integration, however, the method of transformation of variables has been shown to be satisfactory for most cases. In multidimensional integration, the same technique does not help much unless the domain of integration is a sphere (or infinite as a special cases) and the singular point is situated at its center. When the boundary is rectangular, for example, no simpletransformation can be found that eliminate the singularity or map it to infinity and still retain a simple form of the boundary.

One conventional approach that can be imagined is to divide the domain to a sphere and the remaining part (i.e. a rectangular body with a spherical hole). Then the integral for the spherical part can be easily evaluated using polar coordinate, but the integration over the remaining domain willbe intractable owing to its awkward shape.

Lyness[1] has proposed a method to be used for such problems. It is essentially the method of extrapolation like the well known Romberg method. From the knowledge of the type of the singularity one can find out the general form of the asymptotic expansion of the quadrature error as function of mesh size. Then one can determine the unknown coefficients of the expansion, together with the true value of the integral, by solving a system of simultaneous equations obtained from the results of numerical quadrature fro several different mesh sizes. His method has been shown to give satisfactory results for a number of test problems. However, one drawback of the method is the loss of significant figures due to the ill condition of the equation, as is often encountered in curve fitting using a family of more or less monotone basis functions.

The method I am going to present is much more straightforward and elementary. It somewhat resembles the method of the division of the domain. But, instead of dividing the domain into disjoint parts separated by a sharp boundary, we try to split the integrand into two parts, so that one part is a function regular over the entire domain and the other part is virtually zero outside a spherical region lying in the domain. In some sense, this may be regarded as an effective division of the domain, but the boundary is "blurred" by use of continuous weighting functions.

With this "splitting", the first part is easily evaluated using any known method of dealing with multiple integrals. Since the domain of integration for the second part is actually a sphere, it can be integrated using polar coordinate.

```
\documentstyle{amsart}
\textheight=19.5cm \textwidth=14.5cm
%
\begin{document}
\title{The Method of Splitting for \\
Multidimensional Integration \\
  with Singularities}
\author{Hidetosi TAKAHASI\\
Keio University}
\maketitle
\section{Introduction}
Numerical integration of function with one or more singularities always
poses some problem. Foe example, one-dimensional integration,
however, the method of transformation of variables has been shown to be
satisfactory for most cases. In multidimensional integration,
the same technique does not help much unless the domain of integration
is a sphere (or infinite as a special cases) and the singular
point is situated at its center. When the boundary is rectangular,
for example, no simpletransformation can be found that eliminate the
singularity or map it to infinity and still retain a simple form of
the boundary. \par
One conventional approach that can be imagined is to divide the domain
to a sphere and the remaining part (i.e. a rectangular body with
a spherical hole). Then the integral for the spherical part can be
easily evaluated using polar coordinate, but the integration over the
remaining domain willbe intractable owing to its awkward shape.\par

Lyness\cite{lyness} has proposed a method to be used for such problems.
It is essentially the method of extrapolation like the well known
Romberg method. From the knowledge of the type of the singularity
one can find out the general form of the asymptotic expansion of
the quadrature error as function of mesh size. Then one can determine
the unknown coefficients of the expansion, together with the true value
of the integral, by solving a system of simultaneous equations obtained
from the results of numerical quadrature fro several different mesh
sizes. His method has been shown to give satisfactory results for a
number of test problems. However, one drawback of the method is the
loss of significant figures due to the ill condition of the equation,
as is often encountered in curve fitting using a family of more
or less monotone basis functions.\par

The method I am going to present is much more straightforward and
elementary. It somewhat resembles the method of the division of
the domain. But, instead of dividing the domain into disjoint parts
separated by a sharp boundary, we try to split the \underbar{integrand}
into two parts, so that one part is a function regular over the entire
domain and the other part is virtually zero outside a spherical region
lying in the domain.  In some sense, this may be regarded as an
effective division of the domain, but the boundary is ``blurred''
by use of continuous weighting functions.\par

With this ``splitting'', the first part is easily evaluated using
any known method of dealing with multiple integrals. Since the domain
of integration for the second part is actually a sphere, it can be
integrated using polar coordinate.
```

2. Weighting Function

To make the argument more specific, we assume with Lyness that the integrand has a form

$$\int(r) = r^{\alpha} g(r) \tag{1}$$

where $g(r)$ is a polynomial or otherwise a regular function of the cartesian coordinates $x_1, x_2, \ldots, x_n$, which means that it has a convergent power series expansion around the origin. The above mentioned splitting can then be realized by splitting the "singular part" r^{α} as

$$r^{\alpha} = \phi_1(r) + \phi_2(r) \tag{2}$$

so that

(1) $\phi(r)$ is a regular, even function of r, and
(2) $\phi_2(r)$ tends to zero rapidly as r tends to infinity, so $\phi_2(r)$ is negligible for $r > r_0$.

Then we have the integral as a sum of two integrals I_1 and I_2, each defined by

$$I_1 = \int \phi_1(r) g(r) dr \tag{3}$$

$$I_2 = \int \phi_2(r) g(r) dr \tag{4}$$

respectively.

<< omission >>

3. Numerical Examples

The accompaying figures show the results of the method applied to few examples which are similar to those used by Lyness. They are:

$$f(r) = r^{\alpha} \cdot \exp(-2x^2 - y^2), \quad \alpha = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2};$$

$$f(r) = r^{\alpha} \cdot x, \quad \alpha = -\frac{1}{2}, 1.$$

The figures show the dependence of the error on the number of mesh points used. The errors for I_1 and I_2 are also shown. Lyness' method was also tested and its results are shown for comparison.

So far as one can see from these figures, our method does not compare favorable to Lyness' methd. However, it must be stressed that our method gives results which are correct almost to the working accuracy, as constrasted to Lyness' method.

It will be seen from the figures that most of the computing cost concerns the first part I_1. It should also be noticed that contribution of the second part I_2 to the results strongly depends on the exponent in the singularity. When $\alpha = -3/2$, I_2 is comparable in magnitude to I_1, but it is two orders of magnitude below I_1 when $\alpha = 1/2$.

To summarize, it will be said that the method of splitting offers an alternative way to evaluate the special type of multiple integrals as dealt with by Lyness, which is at least as efficient as his method as to the amount of computation.

```
\section{Weighting Function}
To make the argument more specific, we assume with Lyness that the
integrand has a form
 \begin{equation}
\int(\mbox{\boldmath$r$})= \mbox{\boldmath$r$}^{\alpha}
g(\mbox{\boldmath$r$})
\end{equation}
where \( g(\mbox{\boldmath$r$})\) is a polynomial or otherwise a
regular function of the cartesian coordinates
\(x_1, x_2, \allowbreak\ldots, x_n\),
which means that it has a convergent power series expansion around
the origin. The above mentioned splitting can then be realized by
splitting the ``singular part'' \(r^{\alpha}\) as
\begin{equation}
r^{\alpha}=\phi_1(r) + \phi_2(r)
\end{equation}
so that
\begin{enumerate}
\item \(\phi(r)\) is a regular, even function of \(r\), and
\item \(\phi_2(r)\)  tends to zero rapidly as \(r\) tends to
infinity, so \(\phi_2(r)\) is negligible for \(r>r_0\).
\end{enumerate}

Then we have the integral as a sum of two integrals \(I_1\) and
\(I_2\), each defined by
\begin{align}
I_1 &=  \int
\phi_1(\mbox{\boldmath$r$})g(\mbox{\boldmath$r$})dr \\
I_2 &=  \int
\phi_2(\mbox{\boldmath$r$})g(\mbox{\boldmath$r$})dr
\end{align}
respectively.

%$$<<>>$$
$$<<\text{omission}>>$$
\section{Numerical Examples}
The accompaying figures show the results of the method applied to
few examples which are  similar to those used by Lyness. They are:
\begin{align}
f(\mbox{\boldmath$r$}) & =
   r^{\alpha}\cdot\exp(-2x^2-y^2),\quad \alpha =-\frac32,-\frac12,
   \frac12; \nonumber \\
f(\mbox{\boldmath$r$}) & =
  r^{\alpha}\cdot x, \quad  \alpha=-\frac12, 1. \nonumber
\end{align}
The figures show the dependence of the error on the number of mesh
points used. The errors for $I_1$ and $I_2$ are also shown.  Lyness'
method was also tested and its results are shown for comparison. \par
  So far as one can see from these figures, our method does not
compare favorable to Lyness' methd. However, it must be stressed
that our method gives results which are correct almost to the
working accuracy, as constrasted to Lyness' method.\par

  It will be seen from the figures that most of the computing cost
concerns the first part $I_1$. It should also be noticed that
contribution of the second part $I_2$ to the results strongly depends
on the exponent in the singularity. When $\alpha=-3/2$, $I_2$ is
comparable in magnitude to $I_1$, but it is two orders of magnitude
below $I_1$ when $\alpha=1/2$. \par
To summarize, it will be said that the method of splitting offers an
alternative way to evaluate the special type of multiple integrals

as dealt with by Lyness, which is at least as efficient as his method
as to the amount of computation.\par
```

Finally, the author would like to thank Mr. Akio Saito for numerical works, which was done as a part of his work for preparing the Master's Thesis.

REFERENCES

1. J. N. Lyness, "*Approximation of extrapolation techniques to multidimensional quadrature of some integrand functions with a singularity*," J. Comp. Physics, 20 (1976), 346-364.
2. H. Takahasi and M. Mori, "*Quadrature formulas obtained by variable transformation*," Num. Math. 21 (1973), 206-219.

```
Finally, the author would like to thank Mr. Akio
Saito for  numerical works, which was done as a
part of his work for
preparing the Master's Thesis.

\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{lyness}J.~N. Lyness, ``{\it Approximation of
extrapolation
techniques to multidimensional quadrature of some
integrand functions with a singularity},"
J.~Comp.~Physics, 20 (1976), 346-364.
\bibitem{takahasi}H.~Takahasi and M.~Mori,
``{\it Quadrature formulas obtained by variable
transformation}," Num.~Math.
21 (1973),
206-219.
\end{thebibliography}
\end{document}
```