数理解析研究所講究録
第 747 巻 1991 年 108-121

動的計画の並行合成について

九大・経済　岩本誠一 (Seiichi Iwamoto)

1．概要

R. Bellman の動的計画法は、目的関数の単調性と可分性の下で多変数同時最適化を一連の決定を含む状態変換列の下での多段最適化によって行う逐次最適化手法である[1, 4-7, 9, 10]。 可分性を持たない目的関数の逐次最適化の例として分数計画問題[11, 12]がある。 この目的関数は 加法型関数／加法型関数 なる分数型合成関数である。 また、R. Bellman の著書には目的関数として 加法型関数＋最大型関数 なる加法型合成関数[1,p.55; 2,p.31; 3,p.134]が見られる。 これらは２つの関数の $h(x,y)=x/y$ または $x+y$ による合成関数である。 このとき、合成される個々の加法型関数、最大型関数はともに単調性と可分性をもっている。 しかし、合成された関数自身には両性質は消えている。

本論文では、上述の２つの合成関数を含む複合関数の族の逐次最適化を考える。 まず、第２節では有限段確定的動的計画 D を逐次最適化機械として定義する。 これは逐次状態変換の下での最適化問題を表現している。 第３節では、同じ段数をもつ２つの動的計画 D_1 ,D_2 と２変数関数 h を与えておく。 このとき、h によって合成された最適化問題を表現する動的計画 $h(D_1,D_2)$ を導入する。 これを動的計画の平行合成という。 第４節では、平行合成された動的計画の例として散布度最小化問題を有限段グラフ上で考える。 バラツキなどの分散最小化問題はいわゆる最短ルート問題の次に位置している問題と考えられる。 特に、統計的散布度として範囲、分散、比の３つをそれぞれ最小化する。 したがって、グラフ上での最小範囲ルート、最小分散ルート、最小比ルートを動的計画の最適解３点（最適利得関数列、最適政策、最適行動）を求めることによってそれぞれ求める。

2．　動的計画

この節では以下の定式化に必要な有限段確定的動的計画を逐次最適化として定義しておこう。
有限段確定的動的計画(Dynamic Program, DP) D は順序づけられた５つ組

$$D = (\mathrm{Opt}, \{S_n\}_1^{N+1}, \{A_n\}_1^N , (\{f_n\}_1^N, k , \otimes), \{T_n\}_1^N)$$

で与えられる[4-7]。 ただし、

(i) N は正の整数で段の総数を表す。 n は段を示すパラメータである。

(ii) S_n は空でない集合で、第n状態空間という。 この元を s_n, s_n^* などで書く。 通常、s_1 を初期状態、s_{N+1} を終端状態という。

(iii) A は空でない集合。 さらに、2^{A_n}= {集合 A_nの空でない部分集合} として、 $A_n(\cdot)$: $S_n \longrightarrow 2^{A_n}$ とする。 すなはち、各 $s_n \in S_n$ に対して $A_n(s_n)$ は集合 A_n の空でない部分集合である。 ここに記号 A_n を集合と点対集合値写像の両方に用いていることに注意する。 集合 A_n を第n決定空間、($A_n \supset$)$A_n(s_n)$ を s_n における可能な決定空間という。 $A_n(s_n)$ の元を a_n,a_n^* などで表す。 写像 $A_n(\cdot)$ のグラフ $G_r(A_n)$ を

$$G_r(A_n) = \{(s_n,\ a_n) \mid a_n \in A_n(s_n),\ \ s_n \in S_n\} \qquad 1 \leqq n \leqq N$$

で定義する

（iv）$f_n : G_r(A_n) \longrightarrow R^1$ を<u>第n利得関数</u>、 $k : S_{N+1} \longrightarrow R^1$ を<u>終端利得関数</u>という。 ただし、R^p はp次元ユークリッド空間である。 $\otimes$ は２項演算である。 すなわち、ある空でない部分集合 $R \subset R^1$ に対して、演算 $\otimes : R \times R \longrightarrow R$ は結合的

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

かつ、第２変数に関して単調非減少

$$b_1 < b_2 \Longrightarrow a \otimes b_1 < a \otimes b_2$$

とする。 このとき，３つ組 （$\{f_n\}_1^N$, k, $\otimes$） を<u>利得系</u>という。

（v）$T_n : G_r(A_n) \longrightarrow S_{n+1}$ を<u>第n状態変換</u>という。

（vi）Opt は Max か min のいずれか一方を指示する<u>最適子</u>で、次の最適化問題を表現していることを意味する。

$$\mathrm{Opt} \bigotimes_{n=1}^{N} g_n(s_n,\ a_n) \otimes k(s_{N+1})$$
$$\text{s.t.}\ \ (\mathrm{i})\ T_n(s_n,\ a_n) = s_{n+1} \quad (\mathrm{ii})\ a_n \in A_n(s_n) \qquad 1 \leqq n \leqq N \tag{1}$$

ただし、この目的関数は

$$g_1(s_1,\ a_1) \otimes g_2(s_2,\ a_2) \otimes \cdots \otimes g_N(s_N,\ a_N) \otimes k(s_{N+1})$$

を略記したものである。

以上が、問題としての動的計画自身の導入である。 ここで、利得系について若干コメントしておこう。 すなわち、利得系に含まれる２項演算の結合性が利得の再帰性を導き、ひいては動的計画の可分性を与えている。 他方、２項演算の単調非減少性が動的計画のいわゆる単調性を保証している。 一般論として、２項演算 $\otimes$ を用いずに利得系を定式化できるが[4-7]、本論文では以下の合成や応用例を考慮して、２項演算を含む型で利得系を導入しておくことにする。 ただ、ここでは利得系の定式化・導入にはいくつかの可能な方法があることを注意しておこう。

次に,N段DP D の解に相当する部分を導入しよう。 さて、有限列 $\{\pi_n\}_1^N$ が D の<u>政策</u>とは、各 $\pi_n : S_n \longrightarrow A_n$ が $\pi_n(s_n) \in A_n(s_n)$ $s_n \in S_n$, $1 \leqq n \leqq N$ となるときをいう。 政策 $\{\pi_n^*\}_1^N$ が s_1 <u>における D の最適政策</u>とは、各初期状態 s_1 、状態変換列 $\{T_n\}_1^N$、および政策 $\{\pi_n^*\}_1^N$ から一意に定まる状態と決定の列 $\{ s_1,\ a_1^*,\ s_2^*,\ a_2^*,\ \dots,\ s_N^*,\ a_N^*,\ s_{N+1}^* \}$ すなわち

$$a_1^* = \pi_1^*(s_1)\ ,\quad s_2^* = T_1(s_1,\ a_1^*)\ ,\quad a_2^* = \pi_2^*(s_2^*)\ ,\ \dots,\quad a_N^* = \pi_N^*(s_N^*)\ ,$$
$$s_{N+1}^* = T_N(s_N^*\ ,\ a_N^*)$$

が、最適化問題（1）の最適値を与えるときをいう。 各 $s_1 \in S_1$ における D の最適政策を単に<u>D の最適政策</u>という。 最適値を与える列 $\{s_1\ ,\ a_1^*\ ,\ s_2^*,\ \dots,\ a_N^*\ ,\ s_{N+1}^*\}$ を D の s_1 <u>からの最適行動</u>という。 一般に、状態と決定から成る交互列 $\{ s_1\ ,\ a_1\ ,\ s_2,\ a_2,\ \dots,\ a_N,\ s_{N+1}\}$ を<u>行動</u>といい、特に(1)の制約条件を満たしているとき、すなわち

$$a_n \in A_n(s_n)\ ,\quad T_n(s_n,\ a_n) = s_{n+1} \qquad 1 \leqq n \leqq N$$

のとき、可能な行動という。

N段DP D

$$D = (\mathrm{Opt},\ \{S_n\}_1^{N+1},\ \{A_n\}_1^N,\ (\{f_n\}_1^N,\ k,\ \otimes),\ \{T_n\}_1^N)$$

が与えられたとき、各 n (1≦n≦N) に対して、 D_n を

$$D_n = (\mathrm{Opt},\ \{S_m\}_n^{N+1},\ \{A_m\}_n^N,\ (\{f_m\}_n^N,\ k,\ \otimes),\ \{T_m\}_n^N)$$

で定義する。 D は、$s_n \in S_n$ を初期状態とし、$s_{N+1} \in S_{N+1}$ を終端状態とする(N-n+1)段DPであり、最適化問題

$$\mathrm{Opt}\ \bigotimes_{m=n}^{N} f_m(s_m,\ a_m) \otimes k(s_{N+1})$$

$$\text{s.t.}\quad (\mathrm{i})\ T_m(s_m,\ a_m) = s_{m+1} \quad (\mathrm{ii})\ a_m \in A_m(s_m) \qquad n \leqq m \leqq N \tag{2}$$

を表現している。 したがって、特に $D = D_1$ である。 DP D_nの政策、最適政策、行動などは D の場合と同様に定義される。 問題 (2) の最適値を $u^{N-n+1}(s_n)$ で表す。

$$u^{N-n+1}(s_n) = \mathop{\mathrm{Opt}}_{a_m:(\mathrm{i})(\mathrm{ii})} \bigotimes_{m=n}^{N} f_m(s_m, a_m) \otimes k(s_{N+1})$$

関数 $u^{N-n+1}: S_n \rightarrow R^1$ を D_n の最適値関数という。 特に、

$$u^0(s_{N+1}) = k(s_{N+1})$$

としておく。 列 $\{u^n\}_0^N$ を DP D の最適値関数列という。 動的計画の解は、与えられたDP D に対してその最適利得関数列、最適政策、最適行動の３点から成る最適解を求めることである。 ただ、前述の様に最適行動は最適政策と状態変換列から一意に定まるから、本質的には最適利得関数列と最適政策の２点を求めることで十分である。 この２点は次の再帰式を解くことによって求められる。

定理1 ([6]) (i) 最適利得関数列は次の再帰式を満たす。

$$\begin{cases} u^0(s_{N+1}) = k(s_{N+1}) \\ u^{N-n+1}(s_n) = \mathop{\mathrm{Opt}}_{a_n \in A_n(s_n)} f_n(s_n, a_n) \otimes u^{N-n}(T_n(s_n, a_n)) \qquad s_n \in S_n,\ \ 1 \leqq n \leqq N \end{cases}$$

(ii) 各 n ,各 s_n に対して (i)の最適点 a_n を $\pi_n^*(s_n)$ とすると、列 $\{\pi_n^*\}_1^N$ は最適政策である。

３． 動的計画の平行合成

この節では与えられた２つのN段DPと２変数関数に対して、平行合成されたN段DPを導入する。平行合成されたDPは終端型利得系をもつ。

いま、２つのN段DP

$$D_1 = (\,\mathrm{Opt},\ \{S_n\}_1^{N+1},\ \{A_n\}_1^N,\ (\{f_n\}_1^N,\ k,\ \otimes),\ \{T_n\}_1^N)$$

$$D_2 = (\,\mathrm{Opt},\ \{U_n\}_1^{N+1},\ \{B_n\}_1^N,\ (\{g_n\}_1^N,\ l,\ \oplus),\ \{V_n\}_1^N)$$

と１つの２変数実数値関数

$$h : R^1 \times R^1 \to R^1$$

が与えられているとする。 D_1 は前２節での最適化問題（1）を表現している。同様に、D_2 は最適化問題

$$\begin{aligned}&\mathrm{Opt}\ \bigoplus_{n=1}^{N} g_n(u_n,\ b_n) \oplus l(u_{N+1})\\ &\text{s.t.}\quad (i)\ \ V_n(u_n,\ b_n) = b_{n+1},\ (ii)\ \ b_n \in B_n(u_n) \qquad 1 \leqq n \leqq N\end{aligned} \tag{3}$$

を表現している。 このとき、関数 h によって合成された次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned}&\mathrm{Opt}\quad h\Big(\bigotimes_{n=1}^{N} f_n(s_n, a_n) \otimes k(s_{N+1}),\ \bigoplus_{n=1}^{N} g_n(u_n,\ b_n) \oplus l(u_{N+1})\Big)\\ &\text{s.t.}\quad (i)\ \ T_n(s_n,\ a_n) = s_{n+1} \quad (ii)\ \ a_n \in A_n(s_n)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leqq n \leqq N\\ &\qquad\ \ (iii)\ \ V_n(u_n,\ b_n) = u_{n+1} \quad (iv)\ \ b_n \in B_n(u_n)\end{aligned} \tag{4}$$

さて、この最適化問題に対して、新しく実数パラメータ p, q を含む問題群

$$\begin{aligned}&\mathrm{Opt}\quad h\Big(p \otimes \bigotimes_{m=n}^{N} f_m(s_m,\ a_m) \otimes k(s_{N+1}),\ \ q \oplus \bigoplus_{m=n}^{N} g_m(u_m,\ b_m) \oplus l(u_{N+1})\Big)\\ &\text{s.t.}\quad (i)\ \ T_m(s_m,\ a_m) = s_{m+1} \quad (ii)\ \ a_m \in A_m(s_m)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n \leqq m \leqq N\\ &\qquad\ \ (iii)\ \ V_m(u_m,\ b_m) = u_{m+1} \quad (iv)\ \ b_m \in B_m(u_m)\end{aligned} \tag{5}$$

を導入して、p, q の適当な値 p_1 , q_1 および n = 1 のとき、（5）が特に与問題（4）になるようにする。 すなわち、与問題（4）を問題群（5）に埋め込むことにする。 問題（5）の最適値を $w^{N-n+1}(s_n,\ p,\ u_n, q)$ とすると、次の結果が成り立つ。

定理2 （i）関数列 $\{w^n\}_0^N$ の間には再帰式

$$\Bigg\{\ w^0(s_{N+1},\ p,\ u_{N+1},\ q) = h(p \otimes k(s_{N+1}),\ q \oplus l(u_{N+1}))$$

$$\begin{cases} \quad p,\ q \in R^1,\quad s_{N+1} \in S_{N+1},\quad u_{N+1} \in U_{N+1}, \\ w^{N-n+1}(s_n,\ p,\ u_n,\ q) = \underset{\substack{a_n \in A_n(s_n) \\ b_n \in B_n(u_n)}}{\mathrm{Opt}}\ w^{N-n}(T_n(s_n,\ a_n),\ p \otimes f_n(s_n,\ a_n),\ V_n(u_n,\ b_n), \\ \qquad\qquad q \oplus g_n(u_n,\ b_n)) \\ \quad p,\ q \in R^1,\quad s_n \in S_n,\ u_n \in U_n,\ 1 \leqq n \leqq N \end{cases}$$

が成り立つ。

(ii) 与問題 (4) は終端利得関数のみをもつN段DP D_3 で表現される：

$$D_3 = (\ \mathrm{Opt},\ \{\ S_n \times R^1 \times U_n \times R^1\ \}_1^{N+1},\ \{\ A_n \times B_n\}_1^N,\ (\ \{h_n\}_1^N,\ m\ , \oplus\}\ ),\ \{\ P_n\}_1^N\ )$$

ただし、

$$(A_n \times B_n)(s_n,\ p,\ u_n,\ q) = \{(a_n,\ b_n) \mid\ a_n \in A_n(s_n)\ ,\ b_n \in B_n(u_n)\}\ ,$$

$$h_n(s_n,\ p\ ,\ u_n,\ q\ ;\ \ a_n,\ b_n\ ;\ s_{n+1}\ ,\ p'\ ,\ u_{n+1}\ ,\ q') = 1\ ,\qquad a \oplus b = b\ ,$$

$$m(s_{N+1}\ ,\ p\ ,\ u_{N+1}\ ,\ q) = h(p \otimes k(s_{N+1})\ ,\ q \oplus l(u_{N+1}))\ ,$$

$$P_n(s_n\ ,\ p\ ,\ u_n\ ,\ q\ ;\ a_n\ ,\ b_n) = (\ T_n(s_n\ ,\ a_n)\ ,\ p \otimes f_n(s_n\ ,\ a_n),$$
$$V_n(u_n\ ,\ b_n)\ ,\ q \oplus g_n(u_n\ ,\ b_n)).$$

このとき、D_3 を

$$D_3 = \ h(D_1\ ,\ D_2)$$

と表し、D_1 , D_2 の h による平行合成 (parallel composition) という。

4. グラフ上での複合関数の最適化

この節では動的計画の平行合成の例として、有限グラフ上での複合関数の最適値を再帰式を解いて求める。 さて、前述のN段DP D_1 は最適化問題

$$\mathrm{Opt}\ \bigotimes_{n=1}^{N} f_n(s_n,\ a_n) \otimes k(s_{N+1})$$

$$\text{s.t.}\ \ (i)\ \ T_n(s_n,\ a_n) = s_{n+1}\ ,(ii)\ \ a_n \in A_n(s_n) \qquad 1 \leqq n \leqq N$$

を表現していた。 ここで、二項演算 $\otimes$ が特に + , x , v , ∧ のときは、この最適化問題の目的関数はそれぞれ

加法型　$\sum_{n=1}^{N} f_n(s_n,\ a_n) + k(s_{N+1})$

乗法型　$\prod_{n=1}^{N} f_n(s_n,\ a_n) \times k(s_{N+1})$　　ただし　$f_n(s_n, a_n) \geqq 0$
　　$k(s_{N+1}) \geqq 0$

最大型　$\bigvee_{n=1}^{N} f_n(s_n,\ a_n) \vee k(s_{N+1})$

最小型　$\bigwedge_{n=1}^{N} f_n(s_n,\ a_n) \wedge k(s_{N+1})$

になる([6, p.15])。　ここでは、これらの目的関数を含む (1) を単一問題という。　これに対して、h で合成された最適化問題

$$\mathrm{Opt}\quad h\left(\bigotimes_{n=1}^{N} f_n(s_n,\ a_n) \otimes k(s_{N+1}),\ \bigoplus_{n=1}^{N} g_n(s_n,\ a_n) \oplus l(s_{N+1})\right)$$
$$\text{s.t. (i) } T_n(s_n,\ a_n) = s_{n+1}\ ,\ \text{(ii) } a_n \in A_n(s_n) \quad 1 \leqq n \leqq N \tag{6}$$

を２つの評価関数の合成問題という。　一般に、n 個の評価関数の合成問題は n個の N段DPのn変数関数

$$h : \overbrace{R^1 \times R^1 \times \cdots \times R^1}^{n} \longrightarrow R^1$$

による平行合成で表される。　ただし、n個のDPの状態空間列、決定空間列、状態変換列はそれぞれ共通であるとする。

4.1　最小範囲問題

図1において点Aから出発して左→右の方向に進んで点Nで終わるとする。　このとき、いわゆる最短ルート問題 [8, p.77] やこれを広義化した単一最適化問題 [7; p.2, p.15, p.20] が自然に考えられる。

ここでは、2つの評価関数　最大型関数 $x = \bigvee_{n=1}^{5} g_n(x_n,\ x_{n+1})$ と　最小型関数 $y = \bigwedge_{n=1}^{5} g_n(x_n,\ x_{n+1})$ との差 $h = x - y$ によって合成された複合関数を、統計学におけるデータのバラツキを表す範囲 range として考える。　例えば、図1のルート A → B → E → I → L → N の範囲は　最大値 - 最小値 = 11 - 2 = 9 である。　特に、部分ルート B → E → I を含むルートの範囲は 9 である。

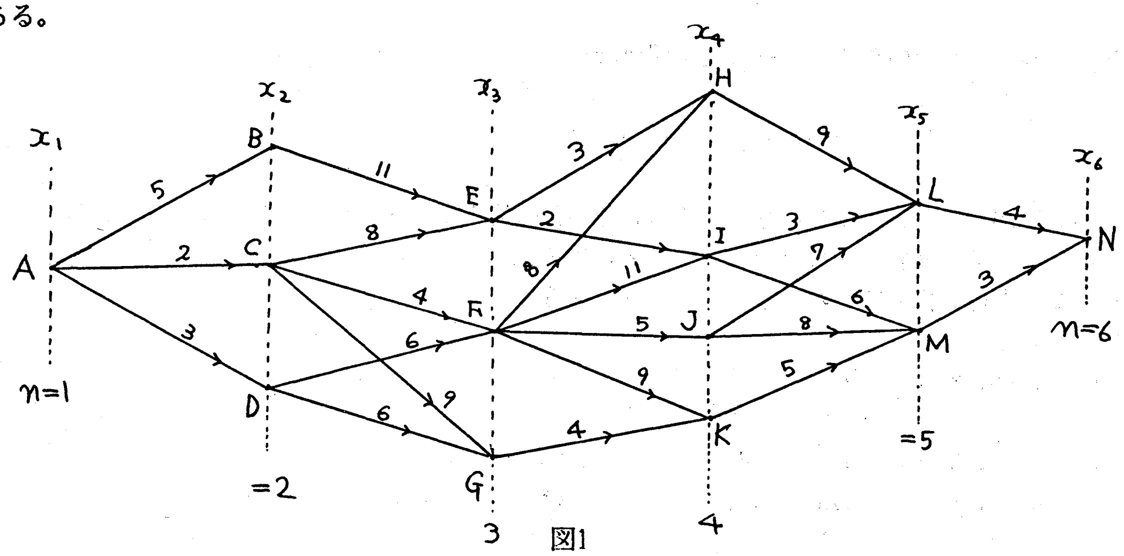

図1

このように各ルートに範囲を対応させる。 このとき、範囲が最小になるルートを求めよう。 これは最適化問題

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min} \quad \underset{1\leq n\leq 5}{\mathrm{Max}}\, g_n(x_n, x_{n+1}) - \underset{1\leq n\leq 5}{\min}\, g_n(x_n, x_{n+1}) \\ &\text{s.t.} \quad (\mathrm{i}) \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \quad 1 \leqq n \leqq 5 \end{aligned} \tag{7}$$

で表される。 ただし、図1で示した時刻 n , 状態 x_n に対して $A_n(x_n)$ は点 x_n から直接行ける点 x_{n+1} の全体とし、$g_n(x_n, x_{n+1})$ は辺 $x_n x_{n+1}$ 上の実数値とする。 時刻nにおける状態 x_n の全体を S_n とする。

この最適化問題を新しく実パラメータ b, c を導入した問題群

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min} \quad b \vee \bigvee_{k=n}^{5} g_k(x_k, x_{k+1}) \vee k(x_6) - c \wedge \bigwedge_{k=n}^{5} g_k(x_k, x_{k+1}) \wedge l(x_6) \\ &\text{s.t.} \ (\mathrm{i}) \quad x_{k+1} \in A_k(x_k) \qquad n \leqq k \leqq 5 \\ &\qquad\qquad x_n \in S_n, \quad b, c \in \{1, 2, \ldots, 12\}, \quad 1 \leqq n \leqq 5 \end{aligned} \tag{8}$$

に埋め込む。 ここで、図1での最大値が 11 , 最小値が 2 に注意すれば、b, cを有限集合 {1, 2, ..., 12} 内を動かせば十分であることがわかる。 問題 (8) の最小値を $u^{6-n}(b, x_n, c)$ とすると、再帰式

$$\begin{cases} u^{6-n}(b, x_n, c) = \underset{x_{n+1}\in A_n(x_n)}{\mathrm{Min}} u^{5-n}(b \vee g_n(x_n, x_{n+1}), x_{n+1}, c \wedge g_n(x_n, x_{n+1})) \\ \qquad\qquad b, c \in \{1, 2, \ldots, 12\}, \quad x_n \in S_n, \quad 1 \leqq n \leqq 5 \\ u^0(b, x_6, c) = b \vee k(x_6) - c \wedge l(x_6) \\ \qquad\qquad b, c \in \{1, 2, \ldots, 12\}, \quad x_6 \in S_6 \end{cases} \tag{9}$$

が成り立つ。 簡単のために、終端利得関数はそれぞれ

$$k(N) = 1 , \quad l(N) = 12$$

とすることができる。 このとき、与えられた問題の最小値は n = 1 , x_1 = A, c = 12 のときの $u^{6-n}(b, x_1, c)$ の値 $u^5(1, A, 12)$ で与えられる。

さて、上述の再帰式を解くと、次のようになる。

$$u^0(b, N, c) = b - c$$

$$u^1(b, L, c) = b \vee 4 - c \wedge 4, \qquad \pi_5^*(b, L, c) = N$$

$$u^1(b, M, c) = b \vee 3 - c \wedge 3, \qquad \pi_5^*(b, L, c) = N$$

$u^2(b, H, c) = b\vee 9 - c\wedge 4,\qquad \pi_4^*(b, H, c) = L$

$u^2(b, I, c) = b\vee 4 - c\wedge 3,\qquad \pi_4^*(b, I, c) = \begin{cases} L \text{ or } M & b \geqq 6 \\ L & 1 \leqq b \leqq 5 \end{cases}$ のとき

$u^2(b, J, c) = b\vee 7 - c\wedge 4,\qquad \pi_4^*(b, J, c) = \begin{cases} L \text{ or } M & b \geqq 8,\ c \leqq 3 \\ L & \text{その他} \end{cases}$ のとき

$u^2(b, K, c) = b\vee 5 - c\wedge 3,\qquad \pi_4^*(b, K, c) = M$

$u^3(b, E, c) = b\vee 4 - c\wedge 2,\qquad \pi_3^*(b, E, c) = \begin{cases} H \text{ or } I & (b \geqq 9,\ c \leqq 2) \text{ or } (b=8,\ c=3) \\ I & \text{その他} \end{cases}$ のとき

$u^3(b, F, c) = b\vee 7 - c\wedge 4,$

$$\pi_3^*(b, F, c) = \begin{cases} H, I, J \text{ or } K & b \geqq 11,\ c \leqq 3 \\ H, J \text{ or } K & 9 \leqq b \leqq 10,\ c \leqq 3 \\ J & 1 \leqq b \leqq 8 \\ H \text{ or } J & b \geqq 9,\ c \geqq 4 \end{cases} \text{ のとき}$$

$u^3(b, G, c) = b\vee 5 - c\wedge 3,\qquad \pi_3^*(b, G, c) = K$

$u^4(b, B, c) = b\vee 11 - c\wedge 2,\qquad \pi_2^*(b, B, c) = E$

$u^4(b, C, c) = b\vee 7 - c\wedge 4,$

$$\pi_2^*(b, C, c) = \begin{cases} E, F \text{ or } G & b \geqq 9,\ c \leqq 2 \\ E \text{ or } G & b=8,\ c \leqq 2 \\ F & b \leqq 7,\ c \leqq 2 \\ F \text{ or } G & b \geqq 9,\ c=3 \\ F & b \leqq 8,\ c=3 \\ F & c \geqq 4 \end{cases} \text{ のとき}$$

$u^4(b, D, c) = (b\vee 7 - c\wedge 4)\wedge(b\vee 6 - c\wedge 3)$

$$\pi_2^*(b, D, c) = \begin{cases} F \text{ or } G & b \geqq 7,\ c \leqq 3 \\ G & b \leqq 6,\ c \leqq 3 \\ F \text{ or } G & b \leqq 6,\ c \geqq 4 \\ F & b \geqq 7,\ c \geqq 4 \end{cases} \text{ のとき}$$

$u^5(b, A, c) = b\vee 6 - c\wedge 3$

$$\pi_1^*(b, A, c) = \begin{cases} B, C \text{ or } D & b \geqq 11,\ c \leqq 2 \\ C \text{ or } D & 7 \leqq b \leqq 10,\ c \leqq 2 \\ D & 7 \leqq b \leqq 10,\ c \geqq 3 \\ D & b \leqq 6 \end{cases} \text{ のとき。}$$

したがって、求める最小値は $u^5(1, A, 12) = 3$ であり、初期状態 $s_1 = (1, A, 12)$ からの最適政策 $\{\pi_n^*\}_1^5$ による最適行動は

$$s_1 = (1,A,12) \xrightarrow{\ D\ } \hat{s}_2 = (3,D,3) \xrightarrow{\ G\ } \hat{s}_3 = (6,G,3) \xrightarrow{\quad K\quad} \hat{s}_4 =$$

$(6,K,3) \xrightarrow{M} \hat{s}_6 = (6,M,3) \xrightarrow{N} \hat{s}_6 = (6,N,3)$

となる。　ゆえに、この範囲最小値問題は最南端ルート $A \to D \to G \to K \to M \to N$ で最小値 3 が達成されることになる。

注意　図1では $g_1(A, D) = 3$ であるが、これを $g_1(A, D) = 4$ に変更し、他のデータはそのままにすると、再帰式の解としては $u^5(b, A, c)$と $\pi_1^*(b, A, c)$ のみが変化して、次のようになる。

$$u^5(b, A, c) = (b\vee 7 - c\wedge 4)\wedge(b\vee 6 - c\wedge 3)$$

$$\pi_1^*(b, A, c) = \begin{cases} B, C \text{ or } D & b \geqq 11,\ c \leqq 2 \\ C, D & 7 \leqq b \leqq 10,\ c \leqq 2 \\ D & 7 \leqq b \leqq 10,\ c \geqq 3 \\ D & b \leqq 6 \end{cases} \quad \text{のとき}$$

したがって、このときの求める最小値は

$$u^5(1, A, 12) = (1\vee 7 - 12\wedge 4)\wedge(1\vee 6 - 12\wedge 3) = 3$$

になり、$s_1 = (1,A,12)$ からの最適政策による最適行動は途中の $\hat{s}_2$ から2つに分岐して

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\quad \hat{s}_3=(6,F,4) \xrightarrow{J} \hat{s}_4=(6,J,4) \xrightarrow{L} \hat{s}_5=(7,L,4) \xrightarrow{N} \hat{s}_6=(7,N,4) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \uparrow F \\ s_1=(1,A,12) \xrightarrow{D} \hat{s}_2=(4,D,4) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \downarrow G \\ \qquad\qquad\qquad\quad \hat{\hat{s}}_3=(6,G,4) \xrightarrow{K} \hat{\hat{s}}_4=(6,K,4) \xrightarrow{M} \hat{\hat{s}}_5=(6,M,4) \xrightarrow{N} \hat{\hat{s}}_6=(6,N,3) \end{array}$$

になる。　ゆえに、$g_1(A, D) = 4$ に変更した最小範囲問題は２つのルート $A \to D \to F \to J \to L \to N$ と $A \to D \to G \to K \to M \to N$ 上で最小値 3 をとる。

4．2　最小分散問題

同じく図1において、ルート上の５つの値を統計的データと解釈して、その分散を最小にするルートを求めることを考える。　この問題は

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{5}\left(g_n(x_n, x_{n+1}) - \frac{1}{5}\sum_{1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1})\right)^2 \\ &\text{s.t. (i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5 \end{aligned} \qquad (10)$$

で表される。　以下では分数計算より簡単な整数計算を行うために、この目的関数を25倍した

$$\begin{aligned} &25 \cdot \frac{1}{5}\sum_{1}^{5}\left(g_n(x_n, x_{n+1}) - \frac{1}{5}\sum_{1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1})\right)^2 \\ &= 5\sum_{1}^{5} g_n^2(x_n, x_{n+1}) - \left(\sum_{1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1})\right)^2 \end{aligned}$$

を目的関数にもつ最小値問題

$$\text{Min} \quad 5\sum_{1}^{5} g_n^2(x_n, x_{n+1}) - \left(\sum_{1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1})\right)^2 \qquad (11)$$

$$\text{s.t. (i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5$$

を解こう。

さて、 新しい非負ﾊﾟﾗﾒｰﾀ b を含む問題

$$\text{Min} \quad 5\sum_{k=n}^{5} g_k^2(x_k, x_{k+1}) + \ell(x_6) - \left(b + \sum_{n}^{5} g_k(x_k, x_{k+1}) + k(x_6)\right)^2 \qquad (12)$$

$$\text{s.t. (i)} \quad x_{k+1} \in A_k(x_k) \qquad n \leqq k \leqq 5$$

$$b \geqq 0, \ x_n \in S_n, \ 1 \leqq n \leqq 6$$

の最小値を $v^{6-n}(b,x_n)$ とおくと、再帰式

$$\begin{cases} v^{6-n}(b,x_n) = \underset{x_{n+1} \in A_n(x_n)}{\text{Min}} \left[5g_n^2(x_n, x_{n+1}) + v^{5-n}(b+g_n(x_n, x_{n+1}), x_{n+1}) \right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b \geqq 0, \ x_n \in S_n, \ 1 \leqq n \leqq 5 \\ v^0(b,x_6) = \ell(x_6) - (b + k(x_6))^2 \qquad b \geqq 0, \ x_6 \in S_6 \end{cases}$$

が成り立つ。 ここで、終端利得を

$$l(N) = k(N) = 0$$

とすれば、問題(11)の最小値は、この再帰式を解いて, $v^5(0,A)$ で与えられる。

さて、再帰式を解くと、次のようになる。

$$v^0(b,N) = -b^2$$

$$v^1(b,L) = 5\cdot16 - (b+4)^2, \qquad \hat{\sigma}_5(b,L) = N$$

$$v^1(b,M) = 5\cdot9 - (b+3)^2, \qquad \hat{\sigma}_5(b,M) = N$$

$$v^2(b,H) = 5\cdot97 - (b+13)^2, \qquad \hat{\sigma}_4(b,H) = L$$

$$v^2(b,I) = \begin{cases} 5\cdot25 - (b+7)^2 \\ 5\cdot45 - (b+9)^2, \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_4(b,I) = \begin{cases} L \\ M \end{cases} \begin{cases} 0 \leqq b \leqq 17 \\ b \geqq 17 \end{cases} \text{のとき}$$

$$v^2(b,J) = 5\cdot65 - (b+11)^2, \qquad \hat{\sigma}_4(b,J) = L$$

$$v^2(b,K) = 5\cdot34 - (b+8)^2, \qquad \hat{\sigma}_4(b,K) = M$$

$$v^3(b,E) = \begin{cases} 5\cdot29 - (b+9)^2 \\ 5\cdot106 - (b+16)^2, \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_3(b,E) = \begin{cases} I(L) \\ H \end{cases} \begin{cases} 0 \leqq b \leqq 15 \\ b \geqq 15 \end{cases} \text{のとき}$$

$$v^3(b,F) = \begin{cases} 5\cdot 90 - (b+16)^2 \\ \\ 5\cdot 161 - (b+21)^2, \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_3(b,F) = \begin{cases} J \\ \\ H \end{cases} \begin{cases} 0 \leq b \leq 17 \\ \\ b \geq 17 \end{cases} \text{のとき}$$

$$v^3(b,G) = 5\cdot 50 - (b+12)^2, \qquad \hat{\sigma}_3(b,G) = K$$

$$v^4(b,B) = \begin{cases} 5\cdot 150 - (b+20)^2 \\ \\ 5\cdot 227 - (b+27)^2, \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_2(b,B) = \begin{cases} E(IL) \\ \\ E(H) \end{cases} \begin{cases} 0 \leq b \leq 4 \\ \\ b \geq 4 \end{cases} \text{のとき}$$

$$v^4(b,C) = \begin{cases} 5\cdot 106 - (b+20)^2 \\ \\ 5\cdot 227 - (b+27)^2, \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_2(b,C) = \begin{cases} F(J) \\ \\ F(H) \end{cases} \begin{cases} 0 \leq b \leq 13 \\ \\ b \geq 13 \end{cases} \text{のとき}$$

$$v^4(b,D) = \begin{cases} 5\cdot 86 - (b+18)^2 \\ 5\cdot 126 - (b+22)^2 \\ 5\cdot 197 - (b+27)^2, \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_2(b,D) = \begin{cases} G \\ F(J) \\ F(H) \end{cases} \begin{cases} 0 \leq b \leq 5 \\ 5 \leq b \leq 11 \\ b \geq 11 \end{cases} \text{のとき}$$

$$v^5(b,A) = \begin{cases} 5\cdot 95 - (b+21)^2 \\ 5\cdot 135 - (b+25)^2 \\ 5\cdot 206 - (b+30)^2 \\ 5\cdot 252 - (b+32)^2, \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_1(b,A) = \begin{cases} D(G) \\ D(FG) \\ D(FH) \\ B(EH) \end{cases} \begin{cases} 0 \leq b \leq 2 \\ 2 \leq b \leq 8 \\ 8 \leq b \leq 53/2 \\ b \geq 53/2 \end{cases} \text{のとき。}$$

したがって、問題(11)は最小値

$$v^5(0,A) = 5\cdot 95 - 21^2 = 34$$

をもつ。 初期状態 $s_1 = (0,A)$ からの最適政策 $\{\hat{\sigma}_n\}_1^5$ による最適行動は

$$s_1 = (0,A) \xrightarrow{D} \hat{s}_2 = (3,D) \xrightarrow{G} \hat{s}_3 = (9,K) \xrightarrow{K} \hat{s}_4 = (13,K) \xrightarrow{M}$$

$$\hat{s}_5 = (18,M) \xrightarrow{N} \hat{s}_6 = (21,N)$$

になる。 したがって、最南端ルート $A \to D \to G \to K \to M \to N$ が問題(11)の最小値

$$\begin{aligned} v5(0,A) &= 5(3^2+6^2+4^2+5^2+3^2) - (3+6+4+5+3)^2 \\ &= 5\cdot 95 - 21^2 \\ &= 34 \end{aligned}$$

を与える。

ゆえに、最初に与えられた最小分散問題(10)は最南端ルート $A \to D \to G \to K \to M \to N$ 上で最小値 $34/25 = 1.36$ をもつ。

4．3　最小比問題

図2においても点 A から出発して左 ⟶ 右の方向に進んで点 N で終わるとする。 このとき、

ルート上の左端の和に対する右端の和の比を最小にする問題を考える。

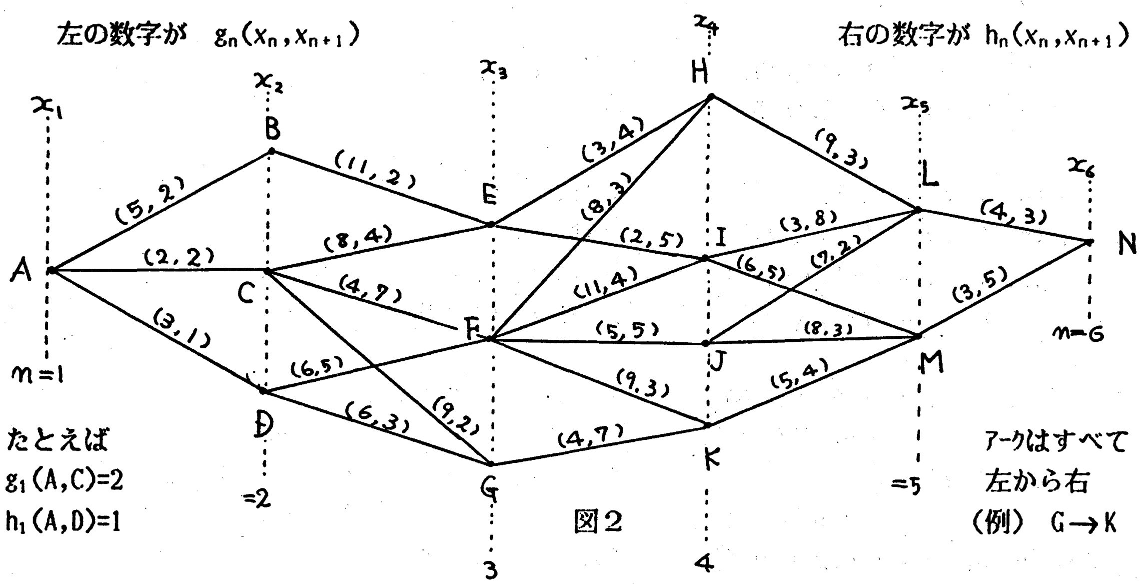

図2

これは最小化問題として

$$\mathrm{Min}\ \left(\sum_{1}^{5} g_n(x_n,\ x_{n+1})\right) / \left(\sum_{1}^{5} h_n(x_n,\ x_{n+1})\right) \tag{13}$$

$$\text{s.t.}\quad (\mathrm{i})\quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5$$

で表される。 この問題を、終端利得関数を組み込んだ新しい実パラメータ b,c を導入した問題群

$$\mathrm{Min}\quad \left(b + \sum_{n}^{5} g_k(x_k, x_{k+1}) + k(x_6)\right) / \left(c + \sum_{n}^{5} g_k(x_k, x_{k+1}) + l(x_6)\right)$$

$$\text{s.t.}\quad (\mathrm{i})\quad x_{k+1} \in A_k(x_k) \qquad n \leqq k \leqq 5 \tag{14}$$

$$b \geqq 0,\quad x_n \in S_n,\quad c \geqq 0,\qquad 1 \leqq n \leqq 5$$

に埋め込む。 (14)の最小値を $v^{6-n}(b,\ x_n,\ c)$ とすると、次の再帰式が得られる。

$$\begin{cases} v^{6-n}(b,\ x_n,\ c) = \displaystyle\min_{x_{n+1} \in A_n(x_n)} v^{5-n}(b+g_n(x_n, x_{n+1}),\ x_{n+1},\ c+h_n(x_n, x_{n+1})) \\ \qquad\qquad b \geqq 0,\quad x_n \in S_n,\quad c \geqq 0,\quad 1 \leqq n \leqq 5 \\ v^0(b,\ x_6,\ c) = (b+k(x_6))/(c+l(x_6)) \qquad b \geqq 0,\quad x_6 \in S_6,\quad c \geqq 0 \end{cases} \tag{15}$$

特に、終端利得を

$$k(N) = l(N) = 0$$

とすると、 $v^5(0,\ A,\ 0)$ が求める最小値になっている。 この再帰式を解くと、次のようになる。

$v^0(b, N, c) = b/c \qquad b \geq 0, \ c > 0$

(以下 b, c ≧ 0 とする。)

$v^1(b, L, c) = (b+4)/(c+3), \qquad \hat{\sigma}_5(b, L, c) = N$
$v^1(b, M, c) = (b+3)/(c+5), \qquad \hat{\sigma}_5(b, M, c) = N$

$v^2(b, H, c) = (b+13)/(c+7), \qquad \hat{\sigma}_4(b, H, c) = L$
$v^2(b, I, c) = (b+7)/(c+11), \qquad \hat{\sigma}_4(b, I, c) = L$
$v^2(b, J, c) = (b+11)/(c+8), \qquad \hat{\sigma}_4(b, J, c) = M$
$v^2(b, K, c) = (b+8)/(c+9), \qquad \hat{\sigma}_4(b, K, c) = M$

$v^3(b, E, c) = (b+9)/(c+16), \qquad \hat{\sigma}_3(b, E, c) = I$

$$v^3(b, F, c) = \begin{cases} (b+18)/(c+15) \\ (b+16)/(c+13), \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_3(b, F, c) = \begin{cases} I \\ J \end{cases} \quad \begin{cases} c \leqq b+3 \\ c \geqq b+3 \end{cases} \text{のとき}$$

$v^3(b, G, c) = (b+12)/(c+16), \qquad \hat{\sigma}_3(b, G, c) = K$

$v^4(b, B, c) = (b+20)/(c+18), \qquad \hat{\sigma}_2(b, B, c) = E$

$$v^4(b, C, c) = \begin{cases} (b+17)/(c+20) \\ (b+22)/(c+22), \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_2(b, C, c) = \begin{cases} E \\ F(I) \end{cases} \quad \begin{cases} 2b-5c \leqq 66 \\ 2b-5c \geqq 66 \end{cases} \text{のとき}$$

$$v^4(b, D, c) = \begin{cases} (b+18)/(c+19) \\ (b+24)/(c+20), \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_2(b, D, c) = \begin{cases} G \\ F(I) \end{cases} \quad \begin{cases} b-6c \leqq 96 \\ b-6c \geqq 96 \end{cases} \text{のとき}$$

$$v^5(b, A, c) = \begin{cases} (b+19)/(c+22) \\ (b+24)/(c+24), \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_1(b, A, c) = \begin{cases} C(E) \\ C(FI) \end{cases} \quad \begin{cases} 2b-5c \leqq 72 \\ 2b-5c \geqq 72 \end{cases} \text{のとき}$$

したがって、初期状態 $s_1 = (0, A, 0)$ からの最適政策 $\{\hat{\sigma}_n\}_1^5$ による最適行動の状態列は

$$(0, A, 0) \longrightarrow (2, C, 2) \longrightarrow (10, E, 6) \longrightarrow (12, I, 11) \longrightarrow (15, L, 19) \longrightarrow (19, N, 22)$$

となる。 したがって、この最小比問題はルート $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow N$
上で最小値 v4(0, A, 0) = 19/22 を持つ。

参考文献

[1] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957.
[2] R. Bellman, Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, Vol.I, Linear Equations and Quadratic Criteria, Academic Press, NY, 1967.

[3] R. Bellman, Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, Vol.II, Nonlinear Processes, Academic Press, NY, 1971.
[4] 岩本 誠一、 逐次決定過程としての動的計画論（１）、 オペレーションズ・リサーチ２２（１９７７）、 ４２７－４３４。
[5] 岩本 誠一、 逐次決定過程としての動的計画論（２）、 オペレーションズ・リサーチ２２（１９７７）、 ４９６－５０１。
[6] 岩本 誠一、 動的計画の理論と応用、 数学３１（１９７９）、 ３３１－３４８。
[7] 岩本 誠一、 「動的計画論」、 九州大学出版会、 １９８７年。
[8] A. Kaufman, Graphs, Dynamic Programming and Finite Games, Academic Press, NY, 1967.
[9] L.G. Mitten, Composition principles for synthesis of optimal processes, Operations Res. 12(1964), 610-619.
[10] G.L. Nemhauser, Introduction to Dynamic Programming, Wiley, NY,1966.
[11] M. Sniedovich, A class of nonseparable dynamic programming problems, J. Opt. Theo. Appl. 52(1987), 111-121.
[12] M. Sniedovich, Analysis of a class of fractional programming problems, Math. Prog. 43(1989), 329-3