数理解析研究所講究録
第 748 巻 1991 年 62-67

Extended Systems for Numerical Computation of Double and Triple Turning Points

広島大学校教育　新谷　尚義　(Hisayoshi Shintani)

1. Introduction

X を Banach 空間，$g(\lambda,x) : R \times X \longrightarrow X$ とし，方程式

(1) $$g(\lambda,x) = 0$$

を考える。 $g(\lambda_0,x_0) = 0$ とし，$y_0 = (\lambda_0, x_0)$，$y = (\lambda, x)$ とおく。 $A_x(y_0)$ を A_x^0，$A'(y_0)$ を A_0' などと書く。 作用素 A の零空間を N(A)， 値域を R(A)，A の Fréchet 微分を A' または DA，X の共役空間を X' と表す。 Spence と Werner [2] は

1^0 $N(g_x^0) = \mathrm{span}\{\varphi_0\}$, $\varphi_0 \neq 0$

2^0 $R(g_x^0) = \{ x \in X : \psi_0 x = 0\}$, $\psi_0 \in X'$, $\psi_0 \neq 0$

3^0 $g_\lambda^0 \notin R(g_x^0)$

であるとき，y_0 を g の λ についての turning point (以下 TP と略す) と呼んでいる。

$X = N(g_x^0) \oplus V$, $V = \{ x \in X , \ell x = 0\}$, $\ell \in X'$

と分解すると，陰関数定理によって

$$\lambda = \lambda(s), \quad x = x(s), \quad |s - s_0| < \delta, \quad \lambda(s_0) = \lambda_0, \quad x(s_0) = x_0$$

$$x(s) = s\varphi_0 + v(s), \quad v \in V$$

と表され，$\lambda'(s_0) = 0$ となる。

$\lambda''(s_0) \neq 0$ のとき y_0 を simple TP，$\lambda^{(j)}(s_0) = 0$ $(j=1,2,,,m)$ $\lambda^{(m+1)}(s_0) \neq 0$ のとき，y_0 を重複度 m の TP という。

(1) の拡大系

$$G(y,\varphi) = \begin{pmatrix} g(y) \\ g_x(y)\varphi \\ \ell\varphi - 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

を考えると，y_0 が simple TP ならば $DG(y_0,\varphi_0)$ は nonsingular であることが知られている。

Spence と Werner は パラメータ μ, λ を含む方程式

$$f(\mu,\lambda, x) = 0 \tag{3}$$

を考えている。y_0 が $g(\lambda, x) = f(\mu_0,\lambda, x)$ の TP であるとし，

拡大系

$$F(\mu, y,\varphi) = \begin{pmatrix} f(\mu, y) \\ f_x(\mu, y)\varphi \\ \ell\varphi - 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

を作る。$t = (\lambda, x,\varphi)$，$t_0 = (\lambda_0,x_0,\varphi_0)$ とするとき，

$F_\mu^0 \notin R(F_t^0)$ で y_0 が g の λ についての double TP ならば，(μ_0, t_0) は F の μ についての simple TP であること

を示した。

ここでは(1)と(2)の2重および3重の TP を Newton 法で求めるために，その Fréchet 微分が TP で nonsingular になるような拡大系を構成することを考える。

2. One-parameter problem

X を Hilbert 空間，内積を <. , .> で表す。 $g \in C^{m+1}$ $(m \geq 2)$ とする。 $Y = R \times X$ とし，$y_i = (\lambda_i, x_i)$ $(i=1,2)$ に対して 内積を

$\langle y_1, y_2 \rangle = \lambda_1 \lambda_2 + \langle x_1, x_2 \rangle$ で導入すると，Y は Hilbert 空間になる。 $X = N(g_x^0) \oplus V$, $Z = R \times V$, $\phi_0 = (0, \varphi_0)$ とすると，

g_0' の Z への制限 h は nonsingular であることが示せる。

$$u_0 = -h^{-1} g_0'' \phi_0^2 \quad , \quad v_0 = -h^{-1}(g_0''' \phi_0^3 + 3 g_0'' \phi_0 u_0)$$

とおく。

m = 2 の場合

$$G(y, \phi, u) = \begin{pmatrix} g(y) \\ g'(y)\phi \\ g''(y)\phi^2 + g'(y)u \\ \langle \phi, \phi \rangle - 1 \\ \langle \phi, u \rangle \\ \langle (1,0), u \rangle \end{pmatrix}$$

$c_0 = (y_0, \phi_0, u_0)$ とおくと， $G(c_0) = 0$ で $DG(c_0)$ は nonsingular となる。

m = 3 の場合

$$H(y, \phi, u, v) = \begin{pmatrix} g(y) \\ g'(y)\phi \\ g''(y)\phi^2 + g'(y)u \\ g'''(y)\phi^3 + 3g''\phi u + g'(y)v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \langle \phi , \phi \rangle - 1 \\ \langle \phi , u \rangle \\ \langle \phi , v \rangle \\ \langle (1,0), v \rangle \end{pmatrix}$$

$c_0 = (y_0, \phi_0, u_0, v_0)$ とおくと， $H(c_0) = 0$ で $DH(c_0)$は nonsingular である。

3. Two-parameter problem

$f(\mu, \lambda, x) \in C^{m+1}$ $(m \geqq 2)$

$$F(\mu, y, \varphi) = \begin{pmatrix} f(\mu, y) \\ f_x(\mu, y)\varphi \\ \langle \varphi, \varphi \rangle - 1 \end{pmatrix}$$

とし ，y_0は$f(\mu_0, y)$の重複度 m の λ についての TP，

$F^0_\mu \notin R(F^0_t)$ とする。

$$\phi_0 = (0, \varphi_0) , \; u_0 = - h^{-1} f^0_{xx} \varphi_0^2 = (0, u_1) ,$$

$$v_0 = - h^{-1}(f^0_{xxx} \varphi_0^3 + 3f^0_{xx} \varphi_0 u_1) ,$$

$$D(\mu, y, \varphi, u) = f_{ff}(\mu, y)\varphi^2 + f_y(\mu, y)u ,$$

$$E(\mu, y, \varphi, u, v) = f_{xxx}(\mu, y)\varphi^3 + 3f_{xy}(\mu, y)\varphi u + f_y(\mu, y)v$$

とおく。

m = 2 の場合

$$G(\mu, \lambda, x, \varphi, u) = \begin{pmatrix} F(\mu, y, \varphi) \\ D(\mu, y, \varphi, u) \\ \langle (0, \;\;), u \rangle \\ \langle (1,0), u \rangle \end{pmatrix} ,$$ $c_0 = (\mu_0, t_0, u_0)$ とおくと，

$G(c_0) = 0$, $DG(c_0)$ は nonsingular である。

m = 3 の場合

$$H(\mu,\lambda,x,\varphi,u,v)=\begin{pmatrix} F(\mu,y,\varphi) \\ D(\mu,y,\varphi,u) \\ E(\mu,y,\varphi,u,v) \\ <(0,\varphi),u> \\ <(0,\varphi),v> \\ <(1,0),v> \end{pmatrix}, \quad c_0 = (\mu_0,t_0,u_0,v_0)$$

とおくと，$H(c_0) = 0$，$DH(c_0)$ nonsingular となる。

4. Numerical Examples

Newton 法で拡大系を解き，修正ベクトルの成分の絶対値の最大値が 10^{-4} より小さくなったとき反復を停止した。

例 1.

$$g(\lambda,x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + 2x_2 - \lambda \\ x_2 - \lambda \end{pmatrix}, \quad (0,0,0): \text{double TP}$$

解 $\lambda = x_i = \phi_1 = \phi_3 = u_j = 0$，$\phi_2 = 1$ $(i=1,2;j=1,2,3)$，

初期値 $\lambda = x_i = \phi_j = u_j = 0.5$ $(i=1,2;j=1,2,3)$，

反復回数 6

例 2.

$$g(\lambda,x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1^2 + x_1^2x_2 \\ \lambda - x_2^2 \end{pmatrix}, \quad (0,0,0) : \text{triple TP}$$

解 $\lambda = x_i = \phi_1 = \phi_3 = u_i = v_j = 0$ $(i=1,2;j=1,2,3)$，$\phi_2 = 1$，$u_3=2$，

初期値 $\lambda = x_i = \phi_1 = \phi_3 = u_i = v_j = 0.4$，$\phi_2 = 0.6$，$u_3 = 1.6$，

反復回数 7

例 3.

$$f(\mu,\lambda,x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 - \lambda + \mu x_1 \\ x_2 - \lambda \end{pmatrix}, \quad (0,0,0,0) : \text{double TP}$$

解　$\mu = \lambda = x_i = \varphi_2 = u_j = 0$ $(i=1,2;j=1,2,3)$, $\varphi_1 = 1$,

初期値 $\mu = \lambda = x_i = \varphi_i = u_j = 0.5$ $(i=1,2;j=1,2,3)$,

反復回数 6

例 4.

$$f(\mu,\lambda, x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -\lambda + \mu x_1 + x_1^4 + 2x_2 \\ -\lambda - 2\mu x_1 + x_2 \end{pmatrix} ,(0,0,0,0): \text{triple TP}$$

解　$\mu = \lambda = x_i = \varphi_2 = u_j = v_j = 0$ $(i=1,2;j=1,2,3)$, $\varphi_1 = 1$,

初期値 $\mu = \lambda = x_i = \varphi_2 = u_j = v_j = 0.5$, $\varphi_1 = 0.6$,

反復回数　7

References

[1]　H.Shintani and M.Kanda , Extended systems for numerical computation of double and triple turning points , Bull. Fac.School Educ. Hiroshima Univ. Part II 12 (1969) 37 - 45.

[2]　A. Spence and B. Werner, Non-simple turning points and cusps, IMA J. Numer. Anal.,2(1982), 413 - 427 .