

解曲線追跡法による抵抗回路における分岐点の求解法

牛 田 明 夫    Akio Ushida  
徳島大学工学部    Faculty of Engineering  
Tokushima University

1. まえがき

回路解析においては，解が新しく発生したり，消滅したりする臨界点は分岐点に相当しており，これらの点を厳密に求めることは回路の性質を調べるうえで重要である。

本稿では解曲線追跡法[1]による分岐点の計算法と分岐点からの枝別れの方向などについて述べる。

2. 解曲線追跡法

つぎのような連立代数方程式の求解法について考えてみることにしよう。

$$f(x) = 0 \quad f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{1}$$

ここで，補助変数を1個選びそれを  $x_{n+1}$  としよう。このとき式(1)は，

$$f(x, x_{n+1}) = 0 \quad f(\cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{2}$$

となり，式(2)を満足する解は  $n+1$ 次元空間における解曲線となる。この場合，補助変数の選び方によってはホモトピー法[1]による代数方程式の求解法になることもあるが，回路中のパラメータを変数に選ぶならば駆動点特性曲線とか，伝達特性曲線が得られる。トランジスタやダイオードなどを含む電子回路の回路方程式は一般にスティフであり，パラメータの変化に対して特性が急変することがよくある。ここでは，これらの曲線を安定に追跡するための弧長法について簡単に述べることにする。すなわち， $s$  をある出発点からの弧長とすると， $s$  をパラメータとして  $x=x(s)$  と書かれ，次のような微分代数方程式が得られる。

$$f(x, x_{n+1}) = 0 \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{ds}\right)^2 = 1 \tag{3.2}$$

式(3)の求解法に対して，安定性の点で優れている後退差分公式[2]を適用すると  $s=s_i$  において

$$\frac{dx}{ds} \Big|_{s=s_{j+1}} = \frac{\alpha_{k0}}{h} x^{k+1} + Q_k(x^j, x^{j-1}, \dots, x^{j-k+1}) \tag{4}$$

ただし  $h$  はステップサイズ， $\alpha_{k0}$  は適用する後退差分公式によって定まる定数， $Q_k(\cdot)$  は過去の値によって決定される既知量である。式(4)を式(3.2)に

代入することにより，式(3)は

$$\begin{aligned} f(x_i^{j+1}, x_{n+1}^{j+1}) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} [\alpha_{k0} x_i^{j+1} + h Q_k(x_i^j, x_i^{j-1}, \dots, x_i^{j-k+1})]^2 - h^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となり， $n+1$ 個の非線形連立代数方程式となる．これにニュートン法を適用して解析することにより  $s=s_{j+1}$  における解が求まる．ここで注意することは出発点においては通常  $k=1$  次の後退差分公式（後退オイラー法）を採用するが，この場合，式(5)のヤコビ行列が零となりセルフスタートはできない．

そこで出発点においては  $(x, x_{n+1})$  中の1つの変数を強制的にステップサイズ  $h$  だけ変化させて解を求めて  $k=2, 3, 4$  次と後退差分公式の次数を上げ効率的に解曲線を追跡することができる．さらに，予測子アルゴリズムを組み合わせると演算効率は向上する．

### 3. 解曲線追跡法による分岐点の求解法

上述の解曲線追跡において，変数  $x$  に対する式(2)のヤコビ行列の階数が  $(n-1)$  になると，陰関数定理によって  $x_{n+1}$  の微小変化に対する  $x$  の変化値を決定することができなくなる．このような点は分岐点に属し

$$f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \det J^1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (6)$$

を満足する．ただし， $J^1(\cdot)$ は変数  $x$  に関する式(2)のヤコビ行列である． $(x, x_{n+1})$ なる変数をもつ，式(2)と式(6)を連立する代数方程式を解くことにより分岐点が決定される．この分岐点は比較的単純であり（図1参照），前述の解曲線追跡法[1]によっても連続的に解曲線を追跡することが可能である．すなわち，式(2),(6)の連立代数方程式

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= 0 \\ f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

これを  $F(x) = 0$  とし，これに

$$F(x) + (\rho - 1)F(x_0) = 0 \quad (8)$$

なるホモトピー法を採用すれば  $\rho=1$  において，複数個の分岐点を求めることが可能である．ここでは，このようにして得られた分岐点を  $p^1$  と呼ぶことにする．一般に，この分岐点においては式(6)を満足することから，特性曲線上において  $x_{n+1}$  による傾斜が無限大となる点に対応している．つぎに，式(7)のヤコビ行列の階数がさらに1つ下がり  $n-1$  となった場合について考えてみよう．

このような分岐点は前節の手法で階曲線を追跡することはできない。そこで、式(7)の階数が再び  $n+1$  となるような補助変数  $x_{n+2}$  を選び、次のような系を考える。

$$\begin{cases} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0 \\ f_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0 \\ f_{n+2}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = \det J^2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (9)$$

この系はニュートン法やホモトピー法を適用して解析することができる。このような分岐点は二つの曲線が接触したり、交差することによって生じるものであり、 $p^2$  と呼ぶことにする (図2 参照)。

この他にもさらに高次の分岐点  $p^3, p^4, p^5, \dots$  が存在し、同様の手法によって求めることができる [3]。

#### 4. 分岐点における分岐の方向

この節では、分岐点における分岐の方向を見つけるための簡単な方法を説明する。前節で得られた  $p^2$  分岐点について、式(2)のヤコビ行列の階数が  $n-1$  であると仮定し、その部分行列

$$J_1 = \begin{bmatrix} g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} \\ g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n-1,2} & g_{n-1,3} & \cdots & g_{n-1,n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

は正則であるとする。ただし、

$$g_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad g_{i,n+1} = \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+1}} \quad (11)$$

このとき陰関数定理より、分岐点の近傍では、次のように一意的な従属性が存在する。

$$x_i = \phi_i(x_1, x_{n+1}) \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (12)$$

ここで  $\phi_i$  の偏導関数は、次の連立線形代数方程式を満足する。

$$\begin{cases} \sum_{j=2}^n g_{ij} \phi'_{j1} = -g_{i1} \\ \sum_{j=2}^n g_{ij} \phi'_{jn+1} = -g_{i,n+1} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (13)$$

ただし、この  $\phi_i$  の偏導関数を次のように表す。

$$\phi'_{i1} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, \quad \phi'_{in+1} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_{n+1}} \quad (14)$$

式(13)より

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n g_{ij} \phi'_{j1} &= - \sum_{j=2}^n \{ 2g_{ij1} \phi'_{j1} + \sum_{k=2}^n (g_{ijk} \phi'_{k1}) \phi'_{j1} \} - g_{i11} \\ \sum_{j=2}^n g_{ij} \phi'_{jn+1} &= - \sum_{j=2}^n \{ g_{ijn+1} \phi'_{j1} + g_{ij1} \phi'_{jn+1} + \sum_{k=2}^n (g_{ijk} \phi'_{kn+1}) \phi'_{j1} \} \\ &\quad - g_{i1n+1} \\ \sum_{j=2}^n g_{ij} \phi'_{jn+1n+1} &= - \sum_{j=2}^n \{ 2g_{ijn+1} \phi'_{jn+1} + \sum_{k=2}^n (g_{ijk} \phi'_{kn+1}) \phi'_{jn+1} \} \\ &\quad - g_{in+1n+1} \\ i &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (15)$$

ただし

$$\begin{aligned} \phi'_{i11} &= \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_1^2}, \quad \phi'_{i1n+1} = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_1 \partial x_{n+1}} \\ \phi'_{in+1n+1} &= \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x_{n+1}^2} \end{aligned} \quad (16)$$

$$g_{ijk} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}, \quad g_{ijn+1} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_{n+1}} \quad (17)$$

すなわち、式(13)より分岐点  $x^*$  における  $\phi'_{i1}, \phi'_{in+1}$  が得られ、これを式(15)右辺に代入することにより  $\phi_i$  の2次導関数  $\phi'_{i11}, \phi'_{i1n+1}, \phi'_{in+1n+1}$  が得られる。一方、式(12)を式(2)の最後の式に代入すると、

$$f(x_1, x_{n+1}) = f_n(x_1, \phi_2(x_1, x_{n+1}), \dots, \phi_n(x_1, x_{n+1}), x_{n+1}) = 0 \quad (18)$$

となる。ここで、分岐点における  $f$  の  $x_1$  と  $x_{n+1}$  についての偏導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= g_{n1} + \sum_{j=2}^n g_{nj} \phi'_{j1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} &= g_{nn+1} + \sum_{j=2}^n g_{nj} \phi'_{jn+1} \end{aligned} \quad (19)$$

となるが、分岐点では階数が  $n-1$  であることより、式(13)の最初の  $n$  列からなる行列式、最後の  $n$  列からなる行列式が零になる。

$$\det J_1 = 0, \quad \det J_{n+1} = 0$$

このことを利用して、クラメルの公式を用いて分岐点において次式になることが証明される。

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0 \quad (20)$$

次に、関数  $f$  の 2 次導関数に関する関係式を導出すると

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = g_{n11} + \sum_{j=2}^n \{2g_{n1j} \phi'_{j1} + g_{nj} \phi'_{j11} + \sum_{k=2}^n (g_{nkj} \phi'_{k1}) \phi'_{j1}\} \\ B &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_{n+1}} = g_{n1n+1} + \sum_{i=2}^n \{g_{n1j} \phi'_{jn+1} + g_{njn+1} \phi'_{j1} + g_{nj} \phi'_{j1n+1} \\ &\quad + \sum_{k=2}^n (g_{njk} \phi'_{kn+1}) \phi'_{j1}\} \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n+1}^2} = g_{nn+1n+1} + \sum_{i=2}^n \{2g_{njn+1} \phi'_{jn+1} + g_{nj} \phi'_{jn+1n+1} \\ &\quad + \sum_{k=2}^n (g_{njk} \phi'_{kn+1}) \phi'_{jn+1}\} \end{aligned} \quad (21)$$

分岐点  $(x^*, x_{n+1}^*)$  の近傍において、関数  $f$  はテイラー展開を用いて、

$$\begin{aligned} 2f(x_1, x_{n+1}) \sim & A(x_1 - x_1^*)^2 + 2B(x_1 - x_1^*) \times \\ & (x_{n+1} - x_{n+1}^*) + C(x_{n+1} - x_{n+1}^*)^2 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

と近似される。この式を  $(x_1 - x_1^*)^2$  あるいは  $(x_{n+1} - x_{n+1}^*)^2$  で割って、極限  $(x_{n+1} \rightarrow x_{n+1}^*)$ ,  $(x_1 \rightarrow x_1^*)$  をとるとそれぞれ次式が得られる。

$$C(dx_{n+1}/dx_1)^2 + 2B(dx_{n+1}/dx_1) + A = 0 \quad (23)$$

$$A(dx_1/dx_{n+1})^2 + 2B(dx_1/dx_{n+1}) + C = 0 \quad (24)$$

式(23),(24)より、分岐点の様子を三つの場合に分けて考察する。

Case 1 ( $A \neq 0$ ): 式(24)より、

$$\frac{dx_1}{dx_{n+1}} = \frac{-B \pm (B^2 - AC)^{1/2}}{A} \quad (25)$$

ここで、 $D = B^2 - AC \geq 0$  とすると、 $D > 0$  の場合は図 3(a) のように 2 つの枝が交差し、 $D = 0$  の場合は図 3(b) のように、2 つの枝が 1 つの共通接点をもち分岐点での勾配は等しい。

Case 2 (  $A = 0, C \neq 0$  ): 式(23)式より,

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_1} = \frac{-B \pm (B^2 - AC)^{1/2}}{C} = \begin{cases} 0 \\ -2B/C \end{cases} \quad (26)$$

この場合は図 3(c) に示す.

Case 3 (  $A = C = 0$  ): 式(23),(24)より,

$$\frac{dx_1}{dx_{n+1}} = 0, \quad \frac{dx_{n+1}}{dx_1} = 0 \quad (27)$$

この場合は図 3(d) に示す.

さらに, その他の残りの変数に対する分岐の方向を決定するために次の関係を用いる.

$$dx_i = \phi'_{i1} dx_1 + \phi'_{in+1} dx_{n+1} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (28)$$

ただし, 導関数  $\phi'_{i1}$  と  $\phi'_{in+1}$  は既に計算されており, 既知ある. Case 1,2 を扱う場合には (29) 式を用い, Case 3 を扱う場合には (30) 式を用いばよい.

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \phi'_{i1} + \phi'_{in+1} \frac{dx_{n+1}}{dx_1} \quad (29)$$

$$\frac{dx_i}{dx_{n+1}} = \phi'_{i1} \frac{dx_1}{dx_{n+1}} + \phi'_{in+1} \quad (30)$$

## 6. むすび

本稿では抵抗回路の解曲線の追跡法と分岐点の一求解法について述べてきたが, この手法の大規模システムへの適用には演算効率の点から問題がある. これが今後の課題である.

## 文献

- [1] A.Ushida and L.O.Chua, "Tracing solution curves of nonlinear equations with sharp turning points", Int.J.of Circuit Theory and applications, vol.12, pp.1-21, 1984
- [2] L.O.Chua and P.M.Lin, Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques, Preufice-Hall 1975
- [3] H.Kubicek and M.Marek, "Computational methods in bifurcation theory and dissi pative structures", springer-Verlag, 1983

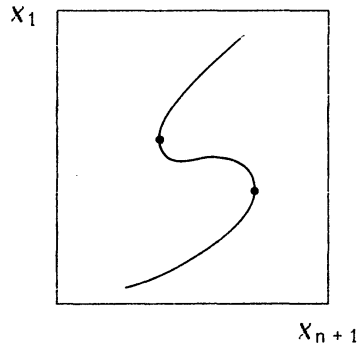


図 1  $p^1$ 分岐点

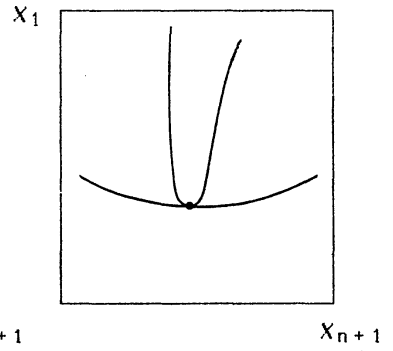
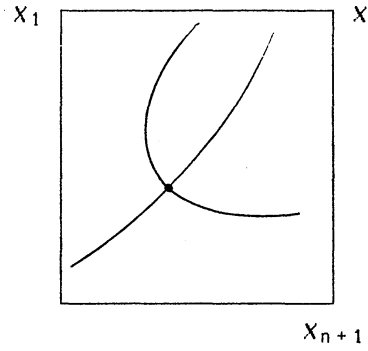


図 2  $p^2$ 分岐点

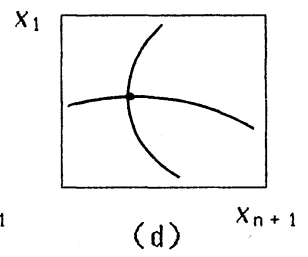
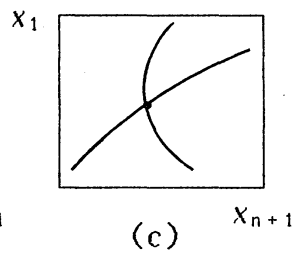
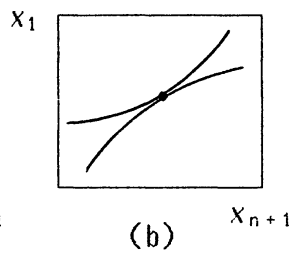
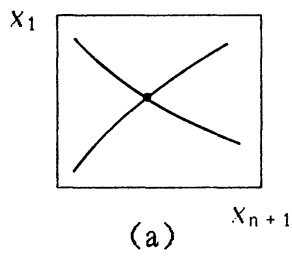


図 3 分岐点の種類