数理解析研究所講究録
第750巻 1991年 82-84

Microlocal Energy Method and Applications

東大理　片岡清臣

$R^{m+n} \ni (t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n)$ とし，点 $x_0^* = (0,0; idx_n)$ でミクロ局所的に考える．

$$P = \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(t,x,D_t,D_x) Z_j Z_k^* + b(t,x,D_t,D_x) D_{x_n}$$

a_{jk}，b ： 0-階のミクロ微分作用素

$D_t = \partial_t$，$D_x = \partial_x$

$Z_j = D_{t_j} + it_j D_{x_n}$，　$Z_j^* = D_{t_j} - it_j D_{x_n}$　（Treves 型作用素）

良く知られているように，上の作用素が点 x_0^* で解析的準楕円型となるための一つの十分条件として

① $\sigma_0(a_{jk})(x_0^*) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \end{pmatrix}$，$\mathrm{Re}\,\alpha_j > 0$，$\forall j$.

② $\sigma_0(b)(x_0^*) \neq \frac{1}{i}(2N_1\alpha_1 + \cdots + 2N_m\alpha_m)$，$\forall N_1, \ldots, N_m = 0,1,2,\ldots$

以下この結果の我々の立場（i.e. 解析的カテゴリーでの超局所エネルギー法）からの証明を与える．

Simplest case

$$P_0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (D_{t_j}^2 + t_j^2 D_{x_n}^2) + \gamma D_{x_n}$$

α_j，$\gamma \in C$，$\mathrm{Re}\,\alpha_j > 0$

を考える

$$P_0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j Z_j Z_j^* + (\gamma + i\alpha_1 + \cdots + i\alpha_m) D_{x_n}$$

であり，上の条件は

$$\gamma + i\alpha_1 + \cdots + i\alpha_m \neq \frac{1}{i}(2N_1\alpha_1 + \cdots + 2N_m\alpha_m), \quad \forall N_1, \ldots, N_m = 0,1,\ldots$$

さて，$f \in C_{R^{m+n}}|_{x_0^*}$ に対して $P_0 f(t,x) = 0$ at x_0^* とせよ．これより $\mathrm{SS}(f) \subset \{t=0\}$ であり，特に，f は t に解析的に依存する．$p_0 = (0,0; i(dx-du)) \in iT^*R^{1+1}$ とする．ここに u は変数 x のコピー．以下簡単のため $n=1$，$x_n \longmapsto x$ とする．$f^* = \overline{f(t,u)}$，$P_0^* = \overline{P_0(t,u,D_u)}$ と置けば，p_0 において

$$0 = \int_{|t| \leq r} -(P_0 f \cdot f^* + f \cdot P_0^* f^*)\, dt$$

$\qquad\qquad \| $

$g(x,u)$ ： Hermitian microfunction

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{|t|\le r} \{ \underset{\substack{\vee\!/ \\ 0}}{2\mathrm{Re}\alpha_j f_{t_j} f^*_{t_j}} - t_j^2(\alpha_j D_x^2 + \overline{\alpha_j} D_x^2) f f^* \} dt$$

positive では無いが quasi-positive

$$+ \int_{|t|\le r} (-\gamma D_x - \overline{\gamma} D_u) f f^* dt$$

$\mathrm{Re}(-\gamma i) > 0$ なら quasi-positive

よって $\mathrm{Im}\gamma = \mathrm{Re}(-\gamma i) > 0$ ならこれから $f = 0$ がわかる. しかしこれでは条件として強すぎるので, concatenation method で改良を試みる.

$$Z_j^* P_0 = (P_0 + 2i\alpha_j D_x) Z_j^*$$

$$P_0 f = 0 \;\Rightarrow\; (P_0 + 2i\alpha_j D_x) Z_j^* f = 0$$

故に $P_0 + 2i\alpha_j D_x$ が hypoelliptic なら $Z_j^* f = 0$ となる ($\forall j = 1, \ldots, m$).

よって $P_0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j Z_j Z_j^* + (\gamma + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m) D_x$ より

$$(\gamma + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m) D_x f = 0$$

が得られる. 故に $\gamma + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \neq 0$ なら割り算できて $f \neq 0$ が結論できる.

$\mathrm{Im}(\gamma + 2\alpha_j) > 0$, $\forall j = 1, \ldots, m$ なら, $P_0 + 2i\alpha_j D_x$ は点 x_0^* で解析的準楕円型. よって $\mathrm{Im}\gamma > -2 \min_{1\le j\le m} \mathrm{Re}\alpha_j$ まで定理が示された. 以下同様.

以上の方法は subelliptic で無いときも使える. 例えば

$$P' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (D_{t_j}^2 + t_j^2 D_{x_n}^2) - i(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m) D_x + \delta, \quad 0 \neq \delta \in C$$

のときも解析的準楕円性が云える.

一般の場合の取扱い方

『 P_0 : frozen operator of P at x_0 が elliptic

$\Rightarrow$ $R = P_0 - P$ として $\quad \|f\|_2 \le C\|P_0 f\|_0 = C\|Rf\|_0 \le C|R|\,\|f\|_2$

ここに $|R|$ は適当な symbol norm. よってこれが $\ll 1$ なら

$f \equiv 0$ でなければならない』

という論法を用いる. 我々は次のような新しい Sobolev ノルムを用いる:

定義 Analytic Sobolev Norm

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|L|\ge 0} C_1^{2j} C_2^{2|L|} \left(\frac{(2j+|L|)!}{(j+|L|)!} \right)^2 (D_{x_n} D_{u_n})^{-j-|L|} (D_t^L D_s^L)$$

$$\in E_{X\times X}$$

$$L = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$$

$$p_0 = (0, 0; i dx_n - i du_n) \in iT^*(R_t^m \times R_x^n \times R_s^m \times R_u^n)$$

(s, u) : a copy of $(t, x) \in R_t^m \times R_x^n$

$$c_1,\; c_2 \gg 1, \quad \text{with} \quad 0 < \frac{c_2^2}{c_1} \ll 1$$

C^ω-パラメータ t に依存するミクロ函数 $f(t, x)$ に対する k 次の解析的ソボレフノルムを

$$\|f\|_k^2(x,u) := \int_{|t|\leq r} (D_tD_s)^k \Lambda(f(t,x)\overline{f(s,u)})\big|_{t=s} dt$$

で定める．ノルムと云っても x，u のミクロ函数である．

補題 $A(t,x,D_tD_x)$: 点 $(0,0;idx_n)$ における0-階ミクロ微分作用素

$f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$: 点 $(0,0;idx_n)$ におけるミクロ函数で t に C^ω に依存するもの

$f_j^* = \overline{f_j(s,u)}$ $(j=1,2)$,

とする．このとき次のような正定値 Hermitian 構造の意味での順序関係が成立：

$$\Lambda(Af_1\cdot f_2^* + f_1\cdot(Af_2)^*)$$
$$\ll {}^{\exists}C(|A|_r\Lambda(f_1f_1^*) + |A|_r\cdot\underline{\Lambda(f_2f_2^*)})$$
$$+\frac{1}{|A|_r}\Sigma_\ell \widetilde{A}_\ell(t,x,D_x)\widetilde{A}_\ell(s,u,D_u)(\Lambda(f_1f_1^*+f_2f_2^*))$$

ここに

$$|A|_r = \sup_{V_r}|A(t,x,\tau,\xi)|,$$
$$V_r = \{(t,x,\tau,\xi)\in T^*(C^{m+n});$$
$$|\tau|\leq r\mathrm{Im}\xi_n, |\xi_1|+\cdots+|\xi_{n-1}|+|\mathrm{Re}\xi_n|\leq r\mathrm{Im}\xi_n\}$$

$\widetilde{A}_\ell$: $V_{r/2}$ 上の適当な symbol で $|\widetilde{A}_\ell|_{r/2}\leq C\cdot 2^{-\ell}|A|_r$ を満たすもの

補題 $(m=1,\ n=1$ のとき$)$ $\{\alpha(D_t^2+t^2D_x^2)+\gamma D_x\}f=g$ から

$$\left(2\mathrm{Re}\alpha - \frac{2c_2^2}{c_1} - 4\left(\frac{2c_2^2}{c_1}\right)^2\right)\int D_tD_s\Lambda(ff^*)\big|_{t=s}dt$$
$$+\left(-\mathrm{Re}\alpha\cdot(D_x^2+D_u^2) - \frac{2c_2^2}{c_1}D_xD_u\right)\int t^2\Lambda(ff^*)\big|_{t=s}dt$$
$$+\left(-\gamma D_x - \delta D_u\right)\int\Lambda(ff^*)\big|_{t=s}dt$$
$$\ll -\int\Lambda(gf^* - fg^*)\big|_{t=s}dt$$

が導かれる．

定理の証明

$g=(P_0-P)f$ と置く．

$$P_0-P = D_t^2A + tD_tD_xB + t^2D_x^2C + tD_xE$$

と書ける． ここに A,B,C,D,E は 0-階のミクロ微分作用素である． よって上の量の微小倍で抑えられる． (正確に云うと quasi positive order relation でやらねばならないが，その説明は略す．) $\mathrm{Im}\gamma>0$ ではこれでできる．general case は再び concatenation を使う．