数理解析研究所講究録
第 750 巻 1991 年 95-110

等方的弾性体に対する境界値逆問題

東京大学基礎科学科 赤松　雅之

1　問題の設定

等方的弾性体の Lamé 係数を境界上の観測値から決定する問題を考える. $\Omega \subset \mathbf{R}^d(d=2,3)$ は, C^∞-級の境界を持つ有界領域とする. 非均一な線形等方的弾性体$\overline{\Omega}$の変位ベクトル $u={}^t(u_1,\dots,u_d)$ は次の Dirichlet 境界値問題の解とする.

$$\left\{\begin{array}{lll} L_{(\lambda,\mu)}u & := \operatorname{div}\{\lambda(\operatorname{tr}(e(u)))I+2\mu e(u)\}=0 & \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} & = f \quad \in \mathbf{C}^\infty(\partial\Omega):=C^\infty(\partial\Omega)^d. & \end{array}\right. \tag{1}$$

(ただし,$e(u)=(((\partial u_i/\partial x_j+\partial u_i/\partial x_i)/2)_{\substack{i\to 1,\dots,d\\ j\downarrow 1,\dots,d}}$は歪テンソル, 記号 tr は行列のトレース, Iは $d\times d$ の単位行列, div はテンソルの発散である.) この境界値問題は, Lamé 係数$\lambda,\mu\in C^\infty(\overline{\Omega})$に対し,$\overline{\Omega}$で$\mu>0, d\lambda+2\mu>0$ (正値性の条件) が成り立つとき一意解$u\in\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega}):=C^\infty(\overline{\Omega})^d$を持つ. これにより, 境界上の変位ベクトル f に対し境界上の応力テンソルの法線方向の成分 $\{\lambda\operatorname{tr}(e(u))I+2\mu e(u)\}\cdot n|_{\partial\Omega}$を対応させる Dirichlet-Neumann 写像$\Pi_{(\lambda,\mu)}:\mathbf{C}^\infty(\partial\Omega)\to\mathbf{C}^\infty(\partial\Omega)$ が定義できる. 我々がここで考える境界値逆問題とは, “$\Pi_{(\lambda,\mu)}$からλ, μを決定できるか?” という問いである. これに対する完全な解答は得られていないが, 我々は次を系として含む結果を得た : $\Pi_{(\lambda,\mu)}$からλ, μの境界での Taylor 係数は決定できる. 2 次元の結果は,§2 に, 3 次元は§3 に述べる.

もとよりこのような問題は,A. P. Calderón により等方的熱 (電気) 伝導体にたいし設定され, 様々な結果が得られている ([7, 6, 12, 13, 11]) また, 非等方的伝導体に対してもいくつかの結果がえられている ([9, 10]). 弾性体にたいしては, 池畠が写像$(\lambda,\mu)\to\Pi_{(\lambda,\mu)}$の Freché 微分が単射であることをしめしている ([5]).

2　2 次元の結果

2.1　結果

Dirichlet-Neumann 写像$\Pi_{(\lambda,\mu)}$は, $\partial\Omega$上の一階古典的擬微分作用素系になる ([3]). よって適当な$\partial\Omega$の局所座標をとれば, 表象の漸近展開を表現できる. ここでは, 次の局所座標をとる. まず任意の点$p\in\partial\Omega$を考えると, 系 (1) は回転と平行移動に関し不変なので p は原点で, p での$\partial\Omega$の内向き法線が, x_2-軸に一致するとしてよい. このとき原点の近傍で定義された関数 $\phi\in C^\infty((-\delta,\delta))$($\delta$は, 十分小) があって, 局所的に$\Omega=\{x_2>\phi(x_1)\}$, $\partial\Omega=\{x_2=\phi(x_1)\}$ が成

り立つ. $\psi(x_1,x_2) :={}^t(x_1, x_2-\phi(x_1))$とおく. $\chi:(x_1,x_2)\in\{(x_1,x_2)|x_2=\phi(x_1)\}\mapsto x_1\in\mathbf{R}^1$ は, $p=0$ での局所座標とみることができ, 次が成り立つ.

主要結果 1 χは上記のとおり. $\sigma\left(\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)}\right)(x_1,\xi_1)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left(\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)ij}(x_1,\xi_1)\right)_{\substack{i\to 1,2\\ j\downarrow 1,2}}$ は$\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)}$の表象$\sigma\left(\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)}\right)(x_1,\xi_1)$の漸近展開とする. ($\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)}$の定義については *[8]* の *p.111* を参照.) このとき$\left(\partial^k\lambda/\partial x_2^k\right)(0)$ と$\left(\partial^k\mu/\partial x_2^k\right)(0)$ にたいする次の逆公式がなりたつ. (i) $j=1$ あるいは 2 にたいして

$$
\begin{aligned}
\lambda(0) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(\varpi^1_{(\lambda,\mu)jj}|\xi_1|^{-1}\mp i\varpi^1_{(\lambda,\mu)mn}\xi_1^{-1})(\varpi^1_{(\lambda,\mu)jj}|\xi_1|^{-1}\pm 2i\varpi^1_{(\lambda,\mu)mn}\xi_1^{-1})}{\mp i\varpi^1_{(\lambda,\mu)mn}\xi_1^{-1}},\\
\mu(0) &= \frac{1}{2}\cdot(\varpi^1_{(\lambda,\mu)jj}|\xi_1|^{-1}\mp i\varpi^1_{(\lambda,\mu)mn}\xi_1^{-1}).
\end{aligned}
$$

(ii) 各 $k\geq 1$ にたいして

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^k\lambda}{\partial x_2^k}(0) &= \pm\frac{2^{k-2}(\lambda+3\mu)|\xi_1|^{k-1}\xi_1^{-1}}{\mu^2(\lambda+\mu)}\cdot i\left(k+\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Big\{(k^2(\lambda+\mu)^2+k(\lambda+\mu)(3\lambda+7\mu)+2(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2))|\xi_1|\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)mn}\\
&\qquad\pm(k^2(\lambda+\mu)^2+k(\lambda+\mu)^2-2\mu(2\lambda+3\mu))i\xi_1\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)22}\Big\}+R_1^k,\\
\frac{\partial^k\mu}{\partial x_2^k}(0) &= \pm\frac{2^{k-1}(\lambda+3\mu)|\xi_1|^{k-1}\xi_1^{-1}}{\lambda+\mu}\cdot i\left(k+\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right)^{-1}\cdot\left(-|\xi_1|\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)mn}\mp i\xi_1\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)22}\right)\\
&\qquad+R_2^k,\\
\frac{\partial^k\lambda}{\partial x_2^k}(0) &= \frac{2^{k-2}(\lambda+3\mu)^2|\xi_1|^{k-1}}{(\lambda+\mu)^2\mu^2}\cdot k^{-1}\\
&\quad\cdot\Big\{(k^2(\lambda+\mu)^2+k(\lambda+\mu)(3\lambda+7\mu)+2(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2))\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)11}\\
&\qquad-(k^2(\lambda+\mu)^2-k(\lambda+\mu)(\lambda+5\mu)+2(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2))\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu))22}\Big\}+R_3^k,\\
\frac{\partial^k\mu}{\partial x_2^k}(0) &= \frac{2^{k-1}(\lambda+3\mu)^2|\xi_1|^{k-1}}{(\lambda+\mu)^2}\cdot k^{-1}\cdot(\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)22}-\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)11})+R_4^k,\\
\frac{\partial^k\lambda}{\partial x_2^k}(0) &= \pm\frac{2^{k-2}(\lambda+3\mu)|\xi_1|^{k-1}\xi^{-1}}{\mu^2(\lambda+\mu)}\cdot i\left(k-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Big\{-(k^2(\lambda+\mu)^2-k(\lambda+\mu)(\lambda+5\mu)+2(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2))|\xi_1|\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)mn}\\
&\qquad\mp(k^2(\lambda+\mu)^2+k(\lambda+\mu)^2-2\mu(2\lambda+3\mu))i\xi_1\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)11}\Big\}+R_5^k,\\
\frac{\partial^k\mu}{\partial x_2^k}(0) &= \pm\frac{2^{k-1}(\lambda+3\mu)|\xi_1|^{k-1}\xi_1^{-1}}{\lambda+\mu}\cdot i\left(k-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot(|\xi_1|\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)mn}\mp i\xi_1\varpi^{1-k}_{(\lambda,\mu)11})+R_6^k.
\end{aligned}
$$

ここで$\pm$, $\mp$は $(m,n)=(2,1),(1,2)$ に応じて複号同順とする．そして剰余項 R_j^kはξ_1, $|\xi_1|$, $\partial^\alpha\lambda/\partial x^\alpha$, $\partial^\alpha\mu/\partial x^\alpha$, $(\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $|\alpha|\le k,\alpha_2\le k-1)$ 及び$\partial^\alpha\chi/\partial x^\alpha(|\alpha|\le k)$ の有理関数になる．ただし R^0は0になる．

この結果の系として次が成り立つ.

系 1 二組の *Lamé* 係数(λ_1,μ_1), (λ_2,μ_2) $(\lambda_j,\ \mu_j\in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \mu_j>0,\ \lambda_j+\mu_j>0\ in\ \overline{\Omega})$ にたいして,$\Pi_{(\lambda_1,\mu_1)}$と$\Pi_{(\lambda_2,\mu_2)}$が一致すれば, λ_1とλ_2, μ_1とμ_2の境界上での *Taylor* 係数はすべて一致する.

とくに二組の Lamé 係数が$\overline{\Omega}$で実解析的ならば, 内部でも等しい. 主要結果 1 は次の定理より導かれる.

定理 1 χは上記のとおり． この時, $\sigma\left(\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)}\right)\sim\sum_{k=0}^\infty\varpi_{(\lambda,\mu)}^{1-k}$について次が成り立つ．各 $k=0,1,\ldots$ について

$$
\begin{aligned}
\varpi_{(\lambda,\mu)}^{1-k} &= 2^{-k}(\lambda+3\mu)^{-2}|\xi_1|^{-k}\left(f_{ij}\partial^k\lambda/\partial x_2^k+g_{ij}\partial^k\mu/\partial x_2^k\right)_{\substack{i\to 1,2\\ j\downarrow 1,2}}+R^k,\\
f_{11} &= 2\mu^2|\xi_1|,\quad f_{12}=2i\mu^2\xi_1,\quad f_{21}=-f_{12},\quad f_{22}=f_{11},\\
g_{11} &= \{k^2(\lambda+\mu)^2-k(\lambda+\mu)(\lambda+5\mu)+2(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2)\}|\xi_1|,\\
g_{12} &= i\{k^2(\lambda+\mu)^2+k(\lambda+\mu)^2-2\mu(2\lambda+3\mu)\}\xi_1,\quad g_{21}=-g_{12},\\
g_{22} &= \{k^2(\lambda+\mu)^2+k(\lambda+\mu)(3\lambda+7\mu)+2(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2)\}|\xi_1|.
\end{aligned}
$$

ここで剰余項 R^kにつっては主要結果と同様.

さらに次の評価式がなりたつ.

定理 2 (i) 任意の $(\lambda_j,\mu_j)\in\{(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})|m\le\|\lambda\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\le M,m\le\|\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\le M\}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|\lambda_1-\lambda_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} &\le C\|\Pi_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Pi_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})},\\
\|\mu_1-\mu_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} &\le C\|\Pi_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Pi_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}.
\end{aligned}
$$

(ii) 任意の二組の定数の *Lamé* 係数 (a,b) と (c,d) で $a+b>0,b>0,c+d>0,d>0$, $a\cdot d-b\cdot c\neq 0$, を満たすものに対し二組の関数 $F(\lambda,\mu)$,$G(\lambda,\mu)$ で次を満たすものが唯一に決まる.

$$
\Theta_{(\lambda,\mu)}:=\Pi_{(\lambda,\mu)}-F(\lambda,\mu)\,\Pi_{(a,b)}-G(\lambda,\mu)\,\Pi_{(c,d)}\in\Psi^0. \tag{2}
$$

このときλとμの一階微分にたいし次の評価式がなりたつ：

$$
\begin{aligned}
\|grad(\lambda_1-\lambda_2)\|_{L^\infty(\Omega)} &\le C_4(\Omega,M,m)\|\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})},\\
\|grad(\mu_1-\mu_2)\|_{L^\infty(\Omega)} &\le C_5(\Omega,M,m)\|\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}.
\end{aligned}
$$

(iii) $\Pi_{(\lambda,\mu)}$は, λ, μに, 連続に依存する：

$$
\|\Pi_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Pi_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}\le C\left(\|\lambda_1-\lambda_2\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\mu_1-\mu_2\|_{L^\infty(\Omega)}\right).
$$

2.2 定理 1 の証明

まず Calderón 作用素を考える．$f, g \in \mathbf{C}^\infty(\partial\Omega)$ は, 次を満たすとする．

$$\begin{cases} L_{(\lambda,\mu)}u &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u &= f \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \{\lambda(\mathrm{tr}(e(u))I) + 2\mu(e(u))\} \cdot n &= g \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

このとき,u をΩの外に 0 拡張したものは$\tilde{u}$とかき, λ, μを$\mathbf{R}^2$で$\lambda, \mu \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu > 0$ を満たしながらコンパクト集合の外で定数となるように拡張したものは $L_{(\lambda,\mu)}$とかくと,

$$L_{(\lambda,\mu)}\tilde{u} = f \cdot \varepsilon_{[\partial\Omega]} - g \cdot \delta_{[\partial\Omega]}$$

がなりたつ．今 $L_{(\lambda,\mu)}$のパラメトリックスの一つを $E_{(\lambda,\mu)}$とすると,Calderón 作用素 $P_{(\lambda,\mu)}$: $\mathbf{C}^\infty(\partial\Omega) \times \mathbf{C}^\infty(\partial\Omega) \to \mathbf{C}^\infty(\partial\Omega) \times \mathbf{C}^\infty(\partial\Omega)$ は, 次で定義できる（[3]）．

$$\begin{aligned} P_{(\lambda,\mu)}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} P_{(\lambda,\mu)11} & P_{(\lambda,\mu)12} \\ P_{(\lambda,\mu)21} & P_{(\lambda,\mu)22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} \lim_{x\in\Omega\to p\in\partial\Omega} E_{(\lambda,\mu)}\left(f \cdot \varepsilon_{[\partial\Omega]} - g \cdot \delta_{[\partial\Omega]}\right) \\ \lim_{x\in\Omega\to p\in\partial\Omega} \nu_{(\lambda,\mu)}\left(E_{(\lambda,\mu)}\left(f \cdot \varepsilon_{[\partial\Omega]} - g \cdot \delta_{[\partial\Omega]}\right)\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで $P_{(\lambda,\mu)ij}$は 2 次の正方行列である．これより,Dirichlet-Neumann 写像は次で計算できる．$\Pi_{(\lambda,\mu)} \sim P_{(\lambda,\mu)22} \circ P^{-1}_{(\lambda,\mu)12} \bmod \Psi^{-\infty}$．ここでの目的は, $\Pi_{(\lambda,\mu)}$が, λとμの微分にどのように依存するかを調べることであるから,J.Sylvester と G.Uhlmann（[13]）による表象に対する次の同値類を導入する．

定義 1 (i) P_hは $\mathbf{R}^d$上の擬微分作用素でその全表象はパラメータ関数の組 $h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ の x での微分からきまるとする．このとき $P_h \sim 0 \bmod \left(T^k_x(h_1, \ldots, h_m), \Psi^r\right)$とは, 任意のパラメータ関数の組$g, h$ にたいしk階までの *Taylor* 係数がx で一致すれば, $P_g - P_h \in \Psi^r$が成り立つこととする．対応する表象について $p_h \sim 0 \bmod \left(T^k_x(h_1, \ldots, h_m), S^r\right)$と書く．(ii)$x \in \partial\Omega$ にたいし, その全表象が h の x での微分で決まる, $\partial\Omega$上の擬微分作用素 P_hを考える．n を x での$\partial\Omega$の法線ベクトルとする．$P_h \sim 0 \bmod \left(T_{x,\partial/\partial n}(h_1, \ldots, h_m), \Psi^r\right)$とは, 任意のパラメータ関数 g, h について k階までの *Taylor* 係数が一致すれば, $P_g - P_h \in \Psi^r$ が成り立つことと定める．表象についても同様とする．

さて, パラメトリックス $E_{(\lambda,\mu)}$の表象を $e_{(\lambda,\mu)} \sim \sum_{k=0}^\infty e^{-2-k}_{(\lambda,\mu)}$（但し各項 $e^{-2-k}_{(\lambda,\mu)}$はξについて $-2-k$次正値斉次）の形で求める．以後上付きの添字はこの意味で用いる．このとき $e_{(\lambda,\mu)}$は次の方程式より漸次きまる．

$$l_{(\lambda,\mu)} \odot e_{(\lambda,\mu)} \sim I \mod S^{-\infty} \tag{3}$$

(ただし $l_{(\lambda,\mu)}$は, $L_{(\lambda,\mu)}$の全表象である．)

補題 1

$$e_{(\lambda,\mu)} \sim e^{-2-k}_{(\lambda,\mu)} \mod \left(T^{k-1}_0(\lambda,\mu), S^{-3-k}\right) \tag{4}$$

ところでかりに全ての $k=0,1,\ldots$ について $e_{(\lambda,\mu)}^{-2-k}$ が求まったとしよう．このとき $P_{(\lambda,\mu)12}$ と $P_{(\lambda,\mu)22}$ は次の式から計算できる．

$$
\begin{aligned}
P_{(\lambda,\mu)12}g &= \lim_{x\in\Omega\to p\in\partial\Omega} E_{(\lambda,\mu)}\left(-g\delta_{[\partial\Omega]}\right), & (5)\\
P_{(\lambda,\mu)22}g &= \lim_{x\in\Omega\to p\in\partial\Omega} \nu_{(\lambda,\mu)}\circ E_{(\lambda,\mu)}\left(-g\delta_{[\partial\Omega]}\right) & (6)
\end{aligned}
$$

ところで ψ と χ は前記のとおりで ${}^t(y_1,y_2)=\psi(x_1,x_2)$ とおく．$\Pi_{(\lambda,\mu)}\sim P_{(\lambda,\mu)22}\circ P_{(\lambda,\mu)12}^{-1}$ mod $\Psi^{-\infty}$ であったから，$\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)}\sim\left(\chi_*P_{(\lambda,\mu)22}\right)\circ\left(\chi_*P_{(\lambda,\mu)12}\right)^{-1}$ mod $\Psi^{-\infty}$ なので $\chi_*P_{(\lambda,\mu)22}$ と $\chi_*P_{(\lambda,\mu)12}$ の表象を計算してこれに合成則を用いる．ところで，

$$
\begin{aligned}
\chi_*(P_{(\lambda,\mu)22}g) &= -\chi_*\left(\lim_{x\in\Omega\to p\in\partial\Omega}\nu_{(\lambda,\mu)}\circ E_{(\lambda,\mu)}\left(g\cdot\delta_{[\partial\Omega]}\right)\right)\\
&= -\lim_{y_2\to+0}\left(\psi_*\nu_{(\lambda,\mu)}\right)\circ\left(\psi_*E_{(\lambda,\mu)}\right)\left((\chi_*g)(y_1)\otimes\delta(y_2)\right).
\end{aligned}
$$

一方 $\left\{\chi_*\left(P_{(\lambda,\mu)22}g\right)\right\}(y_1)=\left\{\left(\chi_*P_{(\lambda,\mu)22}\right)(\chi_*g)\right\}(y_1)$ より，任意の $h\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^1)$ にたいし

$$
\left\{\left(\chi_*P_{(\lambda,\mu)22}\right)h\right\}(y_1)=-\lim_{y_2\to+0}\left(\psi_*\nu_{(\lambda,\mu)}\right)\circ\left(\psi_*E_{(\lambda,\mu)}\right)\left(h(y_1)\otimes\delta(y_2)\right).
$$

同様に $\left\{\left(\chi_*P_{(\lambda,\mu)12}\right)h\right\}(y_1)=-\lim_{y_2\to+0}\left(\psi_*E_{(\lambda,\mu)}\right)\left(h(y_1)\otimes\delta(y_2)\right)$．また $L_{(\lambda,\mu)}$ は $T^*\mathbf{R}^2$ の切断に作用するので，座標変換にたいする漸近展開の公式を用いて

$$
\sigma\left(\psi_*E_{(\lambda,\mu)}\right)(y,\eta)\sim\{{}^t\psi'(x)\}^{-1}\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha e_{(\lambda,\mu)}\right)\left(x,{}^t\psi'(x)\eta\right)D_z^\alpha\left({}^t\psi'(z)e^{ir}\right)|_{z=x}
$$

ただし $y=\psi(x)$, $r(x,z,\eta)=<\psi(z)-\psi(x)-\psi'(x)(z-x),\eta>$ を得る．これに $e_{(\lambda,\mu)}\sim\sum_{k=0}^\infty e_{(\lambda,\mu)}^{-2-k}$ を代入して

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(\psi_*E_{(\lambda,\mu)}\right)(y,\eta) \sim\ & \{{}^t\psi'(x)\}^{-1}\Big(\sum_{k=0}^\infty e_{(\lambda,\mu)}^{-2-k}\left(x,{}^t\psi'(x)\eta\right)\Big)\{{}^t\psi'(x)\}\\
&+\{{}^t\psi'(x)\}^{-1}\sum_{|\alpha|\geq1}\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha e_{(\lambda,\mu)}^{-2-j}\right)\left(x,{}^t\psi'(x)\eta\right)D_z^\alpha\left({}^t\psi'(z)e^{ir}\right)|_{z=x}
\end{aligned}
$$

となるが，$D_z^\alpha r|_{z=x}=0(|\alpha|\leq1)$ だから $D_z^\alpha({}^t\psi'(z)e^{ir})|_{z=x}$ は η について $|\alpha|-1$ 次以下である．よって

$$
\sigma(\psi_*E_{(\lambda,\mu)})(y,\eta)\sim\{{}^t\psi'(x)\}^{-1}e_{(\lambda,\mu)}^{-2-k}(y,{}^t\psi'(x)\eta){}^t\psi'(x)\quad\mathrm{mod}\ \left(T_0^{k-1}(\lambda,\mu),S^{-3-k}\right).
$$

ここで ${}^t\psi'(0)=I$ を用いれば

$$
\sigma(\psi_*E_{(\lambda,\mu)})(0,\eta)\sim e_{(\lambda,\mu)}^{-2-k}(0,\eta)\quad\mathrm{mod}\ (T_0^{k-1}(\lambda,\mu),S^{-k-3}).
$$

他方

$$\left(\chi_* P_{(\lambda,\mu)12}\right)(h)(y_1) = -\lim_{y_2\to+0}(2\pi)^{-2}\int_{\mathbf{R}^2} e^{iy\cdot\eta}\sigma(\psi_* E_{(\lambda,\mu)})(y_1,y_2,\eta_1,\eta_2)\hat{h}(\eta_1)d\eta,$$

$$\left(\chi_* P_{(\lambda,\mu)22}\right)(h)(y_1) = -\lim_{y_2\to+0}(2\pi)^{-2}\int_{\mathbf{R}^2} e^{iy\cdot\eta}\sigma(\psi_*\nu_{(\lambda,\mu)})\odot\sigma(\psi_* E_{(\lambda,\mu)})(y_1,y_2,\eta_1,\eta_2)\hat{h}(\eta_1)d\eta.$$

ここで積分は振動積分である. 以上より

$$\begin{aligned}\sigma\left(\chi_* P_{(\lambda,\mu)12}\right)(0,\eta_1) &\sim -(2\pi)^{-1}\oint_C e^{-2-k}_{(\lambda,\mu)}(0,\eta)d\eta_2 \mod \left(T_{0,\partial/\partial y_2}(\lambda,\mu), S^{-2-k}\right),\\ \sigma\left(\chi_* P_{(\lambda,\mu)22}\right)(0,\eta_1) &\sim -(2\pi)^{-1}\oint_C(\nu_{(\lambda,\mu)}\odot e^{-2-k}_{(\lambda,\mu)})(0,\eta)d\eta_2 \mod \left(T_{0,\partial/\partial y_2}(\lambda,\mu), S^{-1-k}\right)\end{aligned}$$

ただし積分路 $C=\{\eta_2\in\mathbf{R}; |\eta_2|\le R\}\cup\{\eta_2=Re^{i\theta}; 0\le\theta\le\pi\}$ は $R=R(\eta_1)$ を十分大きくとり Cが被積分関数の複素上半平面にあるすべての極を含むようにとる.

以上より

$$\begin{aligned}p^{-1-k}_{(\lambda,\mu)12}(0,\eta_1) &\sim -(2\pi)^{-1}\oint_C e^{-2-k}_{(\lambda,\mu)}(0,\eta)d\eta_2 \mod \left(T_{0,\frac{\partial}{\partial y_2}(\lambda,\mu)}, S^{-2-k}\right),\\ p^{0}_{(\lambda,\mu)22}(0,\eta_1) &= -(2\pi)^{-1}\oint_C\left(\nu_{(\lambda,\mu)}e^{-2}_{(\lambda,\mu)}\right)(0,\eta)\,d\eta_2,\\ p^{-k}_{(\lambda,\mu)22}(0,\eta_1) &\sim -(2\pi)^{-1}\oint_C\left(\nu_{(\lambda,\mu)}e^{-2-k}_{(\lambda,\mu)}\right)(0,\eta)\,d\eta_2 + (2\pi)^{-1}i\oint_C\left(\nu'_{(\lambda,\mu)}e'^{-1-k}_{(\lambda,\mu)}\right)(0,\eta)\,d\eta_2\\ &\qquad \mod \left(T^k_{0,\frac{\partial}{\partial x_2}}(\lambda,\mu), S^{-1-k}\right).\end{aligned}$$

(ただし$\nu'_{(\lambda,\mu)}=\left(\partial\nu_{(\lambda,\mu)}/\partial\xi_2\right)$, $e'^{-1-k}_{(\lambda,\mu)}=\left(\partial e^{-1-k}_{(\lambda,\mu)}/\partial x_2\right)$) が成り立つ. この積分で書かれた公式の具体的な形を書き下すために $e_{(\lambda,\mu)}$の漸近展開の計算をし留数計算をする.

2.3 計算の実行

まず $L_{(\lambda,\mu)}$の主表象 $l^2_{(\lambda,\mu)}$を対角化する. $l^2_{(\lambda,\mu)}$の固有値は$-(\lambda+2\mu)|\xi|^2$, $-\mu|\xi|^2$で対応する固有ベクトルはξと $J\xi$(ただし $J:=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$) ととれる. そこで

$$t(\xi)=(\xi,J\xi)=\begin{pmatrix}\xi_1&\xi_2\\\xi_2&-\xi_1\end{pmatrix} \tag{7}$$

とおくと $\{t(\xi)\}^{-1}=|\xi|^{-2}t(\xi)$ より $l^2_{(\lambda,\mu)}$は

$$t(\xi)l^2_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)t(\xi) = -a_{(\lambda,\mu)}(x)|\xi|^4 =: -\begin{pmatrix}\lambda(x)&0\\0&\mu(x)\end{pmatrix}|\xi|^4 \tag{8}$$

と対角化できる. 次に

$$M_{(\lambda,\mu)}(x,D) := T(D)\circ L_{(\lambda,\mu)}(x,D)\circ T(D) \tag{9}$$

で4階の微分作用素 $M_{(\lambda,\mu)}(x,D)$ を定めるとその表象は

$$\begin{aligned} m_{(\lambda,\mu)} &= m^4_{(\lambda,\mu)} + m^3_{(\lambda,\mu)} + m^2_{(\lambda,\mu)}, & (10)\\ m^4_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= -a(x)|\xi|^4, & (11)\\ m^3_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= t(\xi)l^1_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)t(\xi) + < -i\partial_y, \partial_\eta > \left(t(\eta)\, l^2_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} t(\xi), & (12)\\ m^2_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= < -i\partial_y, \partial_\eta > \left(t(\eta)\, l^1_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} t(\xi). & (13) \end{aligned}$$

さらに別の4階の微分作用素を定義する.

$$N_{(\lambda,\mu)}(x,D) = a^{-1}(x) \circ M_{(\lambda,\mu)}(x,D). \tag{14}$$

その表象は,

$$\begin{aligned} n_{(\lambda,\mu)} &= n^4_{(\lambda,\mu)} + n^3_{(\lambda,\mu)} + n^2_{(\lambda,\mu)}, & (15)\\ n^{2+j}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= a^{-1}(x) m^{2+j}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) \qquad j = 0,1,2. & (16) \end{aligned}$$

このとき特に $n^4_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) = -|\xi|^4 I$ である. 今 $F_{(\lambda,\mu)}$ 及び $G_{(\lambda,\mu)}$ をそれぞれ $M_{(\lambda,\mu)}$ と $N_{(\lambda,\mu)}$ のパラメトリックスとすると

$$\begin{aligned} E_{(\lambda,\mu)} &\sim T(D) \circ F_{(\lambda,\mu)} \circ T(D) \qquad \mathrm{mod}\ S^{-\infty} & (17)\\ F_{(\lambda,\mu)} &\sim G_{(\lambda,\mu)} \circ a^{-1}_{(\lambda,\mu)} \qquad \mathrm{mod}\ S^{-\infty}. & (18) \end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 2 $f_{(\lambda,\mu)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} f^{-4-k}_{(\lambda,\mu)}$ 及び $g_{(\lambda,\mu)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} g^{-4-k}_{(\lambda,\mu)}$ はそれぞれ $F_{(\lambda,\mu)}$ と $G_{(\lambda,\mu)}$ の表象の漸近展開とする. このとき

$$\begin{aligned} \text{(i)}\quad e^{-2}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= t(\xi) f^{-4}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) t(\xi),\\ e^{-2-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &\sim t(\xi) f^{-4-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) t(\xi) + < -i\partial_y, \partial_\eta > \left(t(\eta) f^{-4-(k-1)}_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} t(\xi)\\ &\qquad \mathrm{mod}\quad T_0^{k-1}(\lambda,\mu) \quad (k \ge 1).\\ \text{(ii)}\quad f^{-4}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= g^{-4}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x),\\ f^{-4-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &\sim g^{-4-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x) + < -i\partial_y, \partial_\eta >^k /k! \left(g^{-4}_{(\lambda,\mu)}(x,\eta) a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(y)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}}\\ &\qquad \mathrm{mod}\quad T_0^{k-1}(\lambda,\mu) \quad (k \ge 1).\\ \text{(iii)}\quad g^{-4}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= g_0(\xi) := -|\xi|^{-4} I,\\ g^{-4-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &\sim -< -i\partial_y, \partial_\eta >^{k-1} /(k-1)! \left(g_0(\eta) n^3_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} g_0(\xi)\\ &\quad - < -i\partial_y, \partial_\eta >^{k-2} /(k-2)! \left(g_0(\eta) n^2_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} g_0(\xi)\\ &\qquad \mathrm{mod}\quad T_0^{k-1}(\lambda,\mu) \quad (k \ge 1). \end{aligned}$$

証明 (i)

$$
\begin{aligned}
e_{(\lambda,\mu)} &\sim \left(t\odot f_{(\lambda,\mu)}\odot t\right)(x,\xi)\\
&\sim \sum_{s=0}^{\infty} <-i\partial_y,\partial_\eta>^s/s!\left(t(\eta)f_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} t(\xi)\\
&\sim t(\xi)f_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)t(\xi)+<-i\partial_y,\partial_\eta>\left(t(\eta)f_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} t(\xi)\\
&\sim \sum_{k=0}^{\infty}\{t(\xi)f^{-4-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)t(\xi)\}+\sum_{l=0}^{\infty}<-i\partial_y,\partial_\eta>\left(t(\eta)f^{-4-l}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} t(\xi).
\end{aligned}
$$

これより $f^{-4-l}_{(\lambda,\mu)}\sim 0$ を用いて (i) を得る.

(ii) 略.

(iii) G_0を$-\Delta^2$のパラメトリックスで表象$-|\xi|^{-4}$をもつものとする. このとき

$$
\begin{aligned}
N_{(\lambda,\mu)} &= -\Delta^2 I+N^3_{(\lambda,\mu)}+N^2_{((\lambda,\mu))}\\
&\sim \left(I+N^3_{(\lambda,\mu)}\circ G_0+N^2_{(\lambda,\mu)}\circ G_0\right)\circ\left(-\Delta^2\right)\quad \mathrm{mod}\ \Psi^{-\infty}.
\end{aligned}
$$

これより $(I+N^3_{(\lambda,\mu)}\circ G_0+N^2_{(\lambda,\mu)}\circ G_0)^{-1}$を Neumann 級数に展開することで

$$
\begin{aligned}
G_{(\lambda,\mu)} &\sim G_0\circ\left(I+N^3_{(\lambda,\mu)}\circ G_0+N^2_{(\lambda,\mu)}\circ G_0\right)^{-1}\quad \mathrm{mod}\ \Psi^{-\infty}\\
&\sim G_0\circ\sum_{j=0}^{\infty}\left(-N^3_{(\lambda,\mu)}\circ G_0-N^2_{(\lambda,\mu)}\circ G_0\right)^j\quad \mathrm{mod}\ \Psi^{-\infty}.
\end{aligned}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
g_{(\lambda,\mu)} &\sim g_0\odot\sum_{j=0}^{\infty}\left(-n^3_{(\lambda,\mu)}\odot g_0-n^2_{(\lambda,\mu)}\odot g_0\right)^{j\odot}\\
&\sim g_0\odot\sum_{j=0}^{k}\left(-n^3_{(\lambda,\mu)}g_0-n^2_{(\lambda,\mu)}g_0\right)^{j\odot}\quad \mathrm{mod}\ S^{-5-k}.
\end{aligned}
$$

ここで $a^{j\odot}:=\underbrace{a\odot\ldots\odot a}_{\text{j-回}}$. さらに $T_0^{k-1}(\lambda,\mu)$を法として 0 になる項を無視すると結論を得る.

この補題より任意の $k\geq 0$ の $e^{-2-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)$ にたいする $\mathrm{mod}(T^{k-1}_{0,\partial/\partial x_2}(\lambda,\mu),S^{-3-k})$ での公式が得られる.

補題 3

$$
\begin{aligned}
e^{-2}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= -t(\xi)q_0(\xi)a^{-1}(x)t(\xi),\\
e^{-3}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &\sim t(\xi)\Big[-p_0(\xi)a^{-1}(x)\{t(\xi)l^1_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)-it'(\xi)l^2_{(\lambda,\mu),(1)}(x,\xi)\}t(\xi)a^{-1}(x)\\
&\qquad +q_1(\xi)a^{-2}(x)a_{(\lambda,\mu),(1)}(x)\Big]t(\xi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \quad - it'(\xi)q_0(\xi)a^{-2}(x)a_{(\lambda,\mu),(1)}(x)t(\xi) \mod T^0_{0,\partial/\partial x_2}(\lambda,\mu),\\
e^{-4}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) \sim\; & t(\xi)\Big[-p_1(\xi)a^{-1}(x)\{t(\xi)l^1_{(\lambda,\mu),(1)}(x,\xi) - it'(\xi)l^2_{(\lambda,\mu),(2)}(x,\xi)\}t(\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)\\
& \quad - p_0(\xi)a^{-1}(x)\{-it'(\xi)l^1_{(\lambda,\mu),(1)}(x,\xi)\}t(\xi)a^{-1}(x)\\
& \quad + q_2(\xi)a^{-2}(x)a_{(\lambda,\mu),(2)}(x)\Big]t(\xi)\\
& - it'(\xi)\Big[-p_0(\xi)a^{-1}(x)\{t(\xi)l^1_{(\lambda,\mu),(1)}(x,\xi) - it'(\xi)l^2_{(\lambda,\mu),(2)}(x,\xi)\}t(\xi)a^{-1}(x)\\
& \quad + q_1(\xi)a^{-2}(x)a_{(\lambda,\mu),(2)}(x)\Big]t(\xi) \mod T^1_{0,\frac{\partial}{\partial x_2}}(\lambda,\mu)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& e^{-2-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)\\
\sim\; & t(\xi)\Big[-p_{k-1}(\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)\{t(\xi)l^1_{(\lambda,\mu),(k-1)}(x,\xi) - it'(\xi)l^2_{(\lambda,\mu),(k)}(x,\xi)\}t(\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)\\
& \quad - p_{k-2}(\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)\{-it'(\xi)l^1_{(\lambda,\mu),(k-1)}(x,\xi)\}t(\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)\\
& \quad + q_k(\xi)a^{-2}_{(\lambda,\mu)}(x)a_{(\lambda,\mu),(k)}(x)\Big]t(\xi)\\
& - it'(\xi)\Big[-p_{k-2}(\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)\{t(\xi)l^1_{(\lambda,\mu),(k-1)}(x,\xi) - it'(\xi)l^2_{(\lambda,\mu),(k)}(x,\xi)\}t(\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)\\
& \quad - p_{k-3}(\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)\{-it'(\xi)l^1_{(\lambda,\mu),(k-1)}(x,\xi)\}t(\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)\\
& \quad + q_{k-1}(\xi)t'(\xi)a^{-2}_{(\lambda,\mu)}(x)a_{(\lambda,\mu),(k)}(x)\Big]t(\xi) \,\mathrm{mod} T^{k-1}_{0,\frac{\partial}{\partial x_2}}(\lambda,\mu),
\end{aligned}
$$

ここで $p_k(\xi) = \left((-i)^k/k!\right)|\xi|^{-4}\left(\partial^k\left(|\xi|^{-4}\right)/\partial\xi_2^k\right)$, $q_k(\xi) = \left((-i)^k/k!\right)\left(\partial^k\left(|\xi|^{-4}\right)/\partial\xi_2^k\right)$, $t'(\xi) = \left(\partial t(\xi)/\partial\xi_2\right)$, $l^j_{(\lambda,\mu),(k)}(x,\xi) = \left(\partial^k l^j_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)/\partial x_2^k\right)$及び$a_{(\lambda,\mu),(k)}(x,\xi) = \left(\partial^k a_{(\lambda,\mu)}(x)/\partial x_2^k\right)$ である.

この補題を前の章でえられた式に代入し留数計算を実行すれば定理 1 がえられる.

2.4 定理 2 の証明

まず評価式 (i) を示す.

$$
\begin{aligned}
& \left|\tfrac{1}{s}\int_{\partial\Omega} e^{-isx\cdot\xi} g\cdot\left(\Pi_{(\lambda_1,\mu_1)} - \Pi_{(\lambda_2,\mu_2)}\right)\left(e^{isx\cdot\xi}f\right)da\right|\\
\le\; & \tfrac{1}{s}\|\Pi_{(\lambda_1,\mu_1)} - \Pi_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}\|e^{-isx\cdot\xi}g\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\|e^{isx\cdot\xi}f\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}
\end{aligned}
$$

が (x,ξ) は $T^*\partial\Omega$の局所座標 g, $f\in C^\infty(\partial\Omega)$ はこの局所座標にコンパクトな台をもつとしてなりたつ. [13] の Lemma 3.6 をもちいると上の不等式で $s\to\infty$ とすると

$$
\begin{aligned}
& \left|\int_{\partial\Omega} g\cdot\{\varpi^1_{(\lambda_1,\mu_1)}(x,\xi) - \varpi^1_{(\lambda_2,\mu_2)}(x,\xi)\}f\,da\right|\\
\le\; & C\|\Pi_{(\lambda_1,\mu_1)} - \Pi_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}|\xi|\|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで定数CはM, m, Ωのみに依存するが，以下とくに断らないことにする．ここで単位の分解を用いることにより掛け算作用素$f \to |\xi|^{-1}\left(\varpi_{(\lambda_1,\mu_1)} - \varpi_{(\lambda_2,\mu_2)}\right) f$は，$\mathrm{L}^2(\partial\Omega)$上の有界作用素でその作用素ノルムは$\|\Pi_{(\lambda_1,\mu_1)} - \Pi_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$で評価できる．これより

$$\begin{aligned}
& \left\|\frac{(\lambda_1+2\mu_1)\mu_1}{\lambda_1+3\mu_1} - \frac{(\lambda_2+2\mu_2)\mu_2}{\lambda_2+3\mu_2}\right\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\mu_1^2}{\lambda_1+3\mu_1} - \frac{\mu_2^2}{\lambda_2+3\mu_2}\right\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\
\leq\ & C\|\Pi_{(\lambda_1,\mu_1)} - \Pi_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

$\|\lambda_1-\lambda_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$, $\|\mu_1-\mu_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$を評価するためには，$a_j := (\lambda_j+2\mu_j)\,\mu_j/(\lambda_j+3\mu_j)$, $b_j := \mu_j^2/(\lambda_j+3\mu_j)$とおいて$\lambda_j$, μ_jについて解けば$\lambda_j = (a_j+b_j)(a_j-2b_j)/b_j$, $\mu_j = a_j+b_j$, をうるので (i) を導ける．すなわち

$$\begin{aligned}
\|\lambda_1-\lambda_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} &= \left\|\frac{b_2(a_1+b_1)(a_1-2b_1)-b_1(a_2+b_2)(a_2-2b_2)}{b_1b_2}\right\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\
&= \left\|\frac{a_1^2(b_2-b_1)+(a_1^2-a_2^2)b_1+2b_1b_2(b_1-b_2)+(a_2-a_1)b_1b_2}{b_1b_2}\right\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\
&\leq \Big(\left(\|(a_1+a_2)\,b_1\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|b_1b_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right)\|a_1-a_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\
&\quad + \left(\|a_1^2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|b_1b_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right)\|b_1-b_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\Big) \Big/ \inf_{x\in\partial\Omega}|b_1b_2|,
\end{aligned}$$

$$\|\mu_1-\mu_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \left(\|a_1-a_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}+\|b_1-b_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right).$$

つぎに (ii) をしめす．$F(\lambda,\mu)$と$G(\lambda,\mu)$は，$\varpi_{(\lambda,\mu)} - F(\lambda,\mu)\,\varpi_{(a,b)} - G(\lambda,\mu)\,\varpi_{(c,d)} = 0$を解いて得られる．方程式の行列式は$\frac{4bd(k_1-k_2)}{(a+3b)(c+3d)}$(ただし$a=k_1b$, $c=k_2d$) で仮定より 0 にならないので$F((\lambda,\mu))$, $G((\lambda,\mu))$は一意にきまる．$\Theta_{(\lambda,\mu)}$の主表象$\theta_{(\lambda,\mu)}$は，次になる．

$$\begin{aligned}
\theta_{(\lambda,\mu)} &= \frac{1}{(\lambda+3\mu)^2}\begin{pmatrix}\theta_{11} & \theta_{12}\\ \theta_{21} & \theta_{22}\end{pmatrix} \\
\theta_{11} &= -i\xi_1|\xi_1|^{-1}\left(\mu^2\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\left(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\right)+\left(\mu^2\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}+\left(\lambda^2+2\lambda\mu+4\mu^2\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right) \\
\theta_{12} &= \mu^2\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\left(\lambda^2+2\lambda\mu\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_1}+i\xi_1|\xi_1|^{-1}\left(\mu^2\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}+\left(\lambda^2-2\mu^2\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right) \\
\theta_{21} &= -\mu^2\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\left(\lambda^2+6\lambda\mu+6\mu^2\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_1}-i\frac{\xi_1}{|\xi_1|}\left(\mu^2\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}+\left(\lambda^2-2\mu^2\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right) \\
\theta_{22} &= -i\xi_1|\xi_1|^{-1}\left(\mu^2\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\left(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\right) \\
&\quad +\left(\mu^2\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}+\left(3\lambda^2+10\lambda\mu+10\mu^2\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)
\end{aligned}$$

$$\left|\int_{\partial\Omega} e^{-isx\cdot\xi}g\cdot\left(\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\right)\left(e^{isx\cdot\xi}f\right)da\right|$$

$$\leq \frac{1}{s|\xi|^{\frac{1}{2}}}\Big(\|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\|\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\|e^{isx\cdot\xi}f\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\|\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{0,0}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\Big)$$

$$\leq \|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\|\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\|f\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + O(\frac{1}{s})$$

前の議論と同様にしてつぎを得る.

$$\left|\int_{\partial\Omega} e^{-isx\cdot\xi}g\cdot\left(\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\right)\left(e^{isx\cdot\xi}f\right)da\right|$$
$$\leq \frac{1}{s|\xi|^{\frac{1}{2}}}\Big(\|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\|\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\|e^{isx\cdot\xi}f\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\|\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{0,0}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\Big)$$
$$\leq \|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\|\|\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\|f\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + O(\frac{1}{s}),$$

ただし (x,ξ), g, f は (i) の証明とおなじ. さらに $s\to\infty$ として [13] の Lemma 3.7 を用いると,

$$\left|\int_{\partial\Omega} g\cdot\left(\theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\right)(x,\xi)f\,da\right| \leq C\|g\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\|\Theta_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Theta_{(\lambda_2,\mu_2)}\|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}$$

一方λ, μの一回微分は$\theta_{(\lambda,\mu)}$の要素の一次結合であらわせるので単位の分解をもちい (ii) をうる.

さいごに (iii) をしめす. u_jを系 (1) の (λ_j,μ_j) ($j=1,2$) にたいする解とする. ここでふたつの行列 $A=(A_{ij})$ と $B=(B_{ij})$ にたいし $A:B=\sum_{i,j}A_{ij}B_{ij}$ なる記号をみちびいておく. $\Pi_{(\lambda_j,\mu_j)}$は自己共役作用素だから Green の公式をもちいて

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\left(\Pi_{(\lambda_1,\mu_1)}-\Pi_{(\lambda_2,\mu_2)}\right)f,f\right)_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)}\right| \\
=&\left|\int_{\partial\Omega}\left[f\cdot\{\lambda_1(\mathrm{tr}(e(u_1)))I+2\mu_1e(u_1)\}n-f\cdot\{\lambda_1(\mathrm{tr}(e(u_2)))I+2\mu_1e(u_2)\}n\right]da\right| \\
=&\left|\int_{\Omega}\left[\{\lambda_1(\mathrm{tr}(e(u_1)))^2+2\mu_1e(u_1):e(u_1)\}-\{\lambda_2(\mathrm{tr}(e(u_2)))^2+2\mu_2e(u_2):e(u_2)\}\right]dx\right| \\
\leq&\left|\int_{\Omega}(\lambda_1-\lambda_2)(\mathrm{tr}(e(u_1)))^2dx\right|+\left|\int_{\Omega}\lambda_2\{(\mathrm{tr}(e(u_1)))^2-(\mathrm{tr}(e(u_2)))^2\}dx\right| \\
&+2\left|\int_{\Omega}(\mu_1-\mu_2)e(u_1):e(u_1)\,dx\right|+2\left|\int_{\Omega}\mu_2\{e(u_1):e(u_1)-e(u_2):e(u_2)\}dx\right| \\
\leq&\ 2\|\lambda_1-\lambda_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|e(u_1)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\
&+2\|\lambda_2\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\|e(u_1)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}+\|e(u_2)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\right)\|e(u_1-u_2)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\
&+2\|\mu_1-\mu_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|e(u_1)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\
&+2\|\mu_2\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\|e(u_1)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}+\|e(u_2)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\right)\|e(u_1-u_2)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

さらに $\|e(u_1-u_2)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$を評価する.

補題 4 任意のλ, $\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$, α, $\beta \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $G \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ にたいし唯一 $w \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ があってつぎをみたす.

$$\begin{aligned} div\{\lambda\,(tr(e\,(w)))\,I + 2\mu e\,(w)\} &= div\{\alpha\,(tr(e\,(G)))\,I + 2\beta e\,(G)\}, \\ w|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

さらに

$$\|e(w)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C\left(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|e(G)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

証明 : 一意可解性はよくしられているので評価式だけ導く. wが解であるとき Green の公式をもちいて

$$\int_\Omega \{\lambda\,(\mathrm{tr}\,(e\,(w)))\,I + 2\mu e\,(w)\} : e\,(w)\;dx = \int_\Omega \{\alpha\,(\mathrm{tr}\,(e\,(G)))\,I + 2\beta e\,(G)\} : e\,(w)\;dx.$$

この式の右辺に Cauchy-Schwarz の不等式を用いて

$$\begin{aligned} |\,右辺\,| &\le \left\{\int_\Omega |\alpha\,(\mathrm{tr}\,(e\,(G)))\,I + 2\beta e\,(G)\,|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_\Omega |e\,(w)\,|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left\{\int_\Omega [2\alpha^2\,(\mathrm{tr}\,(e\,(G)))^2 + (2\beta)^2\,e\,(G) : e\,(G) + 4\alpha\beta\,(\mathrm{tr}\,(e\,(G)))^2]dx\right\}^{\frac{1}{2}} \|e\,(G)\,\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\le 2\left(\sup_\Omega|\alpha| + \sup_\Omega|\beta|\right)\|e\,(G)\,\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

ここで $I : I = 2$, $I : e(G) = \mathrm{tr}\,(e\,(G))$, $|\mathrm{tr}\,(e\,(G))\,|^2 \le 2|e\,(G)\,|^2$をもちいた. 一方

$$\begin{aligned} |\,左辺\,| &\ge \int_\Omega \left\{\lambda\,(\mathrm{tr}\,(e\,(w)))^2 + 2\mu e\,(w) : e\,(w)\right\} dx \\ &\ge \min\left\{\inf_\Omega\,(2\lambda + 2\mu)\,, \inf_\Omega \mu\right\} \|e\,(w)\,\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

以上より

$$\|e\,(w)\,\|_{\mathbf{L}^2} \le C\,(\sup|\alpha| + \sup|\beta|)\,\|e\,(G)\,\|_{\mathbf{L}^2}.$$

系 2 任意の $f \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ にたいし系 *(1)* は一意解 $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ をもち, さらにつぎをみたす.

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\|f\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

ここで Cは u に依存しない.

証明 : 一意可解性はよくしられているので評価だけする. G としてΩで $\Delta G = 0$, $G|_{\partial\Omega} = f$をとり $w := u - G$ とおくと

$$\mathrm{div}\{\lambda \mathrm{tr}\,(e\,(w)) + 2\mu e\,(w)\} = \mathrm{div}\{\lambda \mathrm{tr}\,(e\,(-G)) + 2\mu e\,(-G)\}$$

が成り立ち$\partial\Omega$上 0 になる. [13] の Lemma 3.0 と上の補題より上記の評価式をえる.

さて (iii) の証明を完結しよう. つぎがなりたつ.

$$\mathrm{div}\{\lambda_1 \mathrm{tr}\,(e\,(u_1 - u_2)) + 2\mu_1 e\,(u_1 - u_2)\} = \mathrm{div}\{(\lambda_2 - \lambda_1)\,\mathrm{tr}\,(e\,(u_2))\,I + 2\,(\mu_2 - \mu_1)\,e\,(u_2)\}$$

この式の右辺で$\alpha = \lambda_2 - \lambda_1$, $\beta = \mu_2 - \mu_1$とおき系を用いれば (iii) を得る.

3 3次元の結果

3.1 結果

3次元の結果をのべるために2次元のとき同様に次の座標をかんがえる．任意の境界上の点pを考えるとき系（1）の不変性より$p=0$, pでの内向き法線はx_3-軸に一致するとしてよい．このとき仮定より$\phi\in C^\infty\left(\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2|\sqrt{x_1^2+x_2^2}<\delta\}\right)$($\delta>0$十分小）があって$\partial\Omega=\{x_3=\phi(x_1,x_2)\}$, $\Omega=\{x_3>\phi(x_1,x_2)\}$が原点近傍でなりたつ．とくに$\phi(0,0)=0$, $\phi'(0,0)=\mathbf{0}$. これにより原点での局所座標ψを$\psi(x_1,x_2,x_3)={}^t(x_1,x_2,x_3-\phi(x_1,x_2))$で定義しその$\partial\Omega$への制限を$\chi$とすると座標$(x_1,x_2)$は$\partial\Omega$の局所座標とみれる．

主要結果 2 χは，上記のとおり．$\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)}$の全表象$\sigma\left(\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)}\right)(x',\xi')$の漸近展開を$\sigma\left(\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)}\right)(x',\xi')\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varpi_{(\lambda,\mu)}^{1-k}(x',\xi')$とする．（参照 *[8],p.111*）この時次の逆公式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\left(\partial^k\lambda/\partial x_3^k\right)(0) &= 2^k(\lambda+3\mu)^2|\xi'|\cdot(f_{ij}g_{mn}-g_{ij}f_{mn})\cdot\left(g_{mn}\varpi_{(\lambda,\mu)ij}^{1-k}-g_{ij}\varpi_{(\lambda,\mu)mn}^{1-k}\right)\\ \left(\partial^k\mu/\partial x_3^k\right)(0) &= 2^k(\lambda+3\mu)^2|\xi'|\cdot(f_{ij}g_{mn}-g_{ij}f_{mn})\cdot\left(-f_{mn}\varpi_{(\lambda,\mu)ij}^{1-k}+f_{ij}\varpi_{(\lambda,\mu)mn}^{1-k}\right)\end{aligned}$$

ただし，$f_{11}=2\mu^2\xi_1^2$, $f_{12}=2\mu^2\xi_1\xi_2$, $f_{13}=2\mu^2\cdot i\xi_1|\xi'|$, $f_{21}=f_{12}$, $f_{22}=2\mu^2\xi_2^2$, $f_{23}=2\mu^2\cdot i\xi_2|\xi'|$, $f_{31}=-f_{13}$, $f_{32}=-f_{32}$, $f_{33}=2\mu^2|\xi'|^2$,

$$\begin{aligned}g_{11} &= \{k^2(\lambda+\mu)^2-k(\lambda+\mu)(\lambda+5\mu)+2(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2)\}\xi_1^2+(\lambda+3\mu)^2\xi_2^2,\\ g_{12} &= \{k^2(\lambda+\mu)^2-k(\lambda+\mu)(\lambda+5\mu)+(\lambda^2+2\lambda\mu+3\mu^2)\}\xi_1\xi_2,\\ g_{13} &= \{k^2(\lambda+\mu)^2+k(\lambda+\mu)^2-2\mu(\lambda+3\mu)\}\cdot i\xi_1|\xi'|,\\ g_{21} &= g_{12}, g_{22}=(\lambda+3\mu)^2\xi_1^2+\{k^2(\lambda+\mu)^2-k(\lambda+\mu)(\lambda+5\mu)+2(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2)\}\xi_2^2,\\ g_{23} &= \{k^2(\lambda+\mu)^2+k(\lambda+\mu)^2-2\mu(\lambda+3\mu)\}\cdot i\xi_2|\xi'|,\\ g_{31} &= -g_{13}, g_{32}=g_{23},\\ g_{33} &= \{k^2(\lambda+\mu)^2+k(\lambda+\mu)(3\lambda+7\mu)+2(\lambda^2+4\lambda\mu+6\mu^2)\}|\xi'|^2.\end{aligned}$$

(i) $(i,j;m,n)=(1,1;1,2),(1,1;2,1),(2,2;1,2),(2,2;2,1)$ のとき

$$f_{ij}g_{mn}-g_{ij}f_{mn}=-2\mu^2(\lambda+3\mu)^2\xi_1\xi_2|\xi'|^2.$$

(ii) $(i,j;m,n)=(l,3;3,3),(3,l;3,3)(l=1,2)$ のとき

$$f_{ij}g_{mn}-g_{ij}f_{mn}=\pm2^2\mu^2(\lambda+3\mu)(k(\lambda+\mu)+(\lambda+3\mu))\cdot i\xi_l|\xi'|^3.$$

(iii) $(i,j;m,n)=(l,l;l,3),(l,l;3,l)(l=1,2,l'=2,1)$ のとき

$$f_{ij}g_{mn}-g_{ij}f_{mn}=\pm2\mu^2\left(2(k(\lambda+\mu)-(\lambda+3\mu))\xi_l^2+(\lambda+3\mu)\xi_{l'}^2\right).$$

(iv) $(i,j;m,n)=(l,l';l,3),(l',l;3,l)(l=1,2,l'=2,1)$ のとき

$$f_{ij}g_{mn}-g_{ij}f_{mn}=\pm2^2\mu^2(\lambda+3\mu)(2k(\lambda+\mu)-(\lambda+3\mu))\cdot i\xi_l^2\xi_{l'}|\xi'|.$$

(v) $(i,j;,m,n) = (l,l';l',3),(l',l;3,l')(l=1,2,l'=2,1)$ のとき

$$f_{ij}g_{mn} - g_{ij}f_{mn} = \pm 2\mu^2(\lambda+3\mu)(2k(\lambda+\mu)-(\lambda+3\mu)) \cdot i\xi_l\xi_{l'}^2|\xi'|.$$

(vi) $(i,j;m,n) = (l,l;l',3),(l,l;3,l')(l=1,2,l'=2,1)$ のとき

$$f_{ij}g_{mn} - g_{ij}f_{mn} = \pm 2^2\mu^2(\lambda+3\mu)\left((k(\lambda+\mu)-(\lambda+3\mu))\xi_l^2 - (\lambda+3\mu)\xi_{l'}^2\right) \cdot i\xi_{l'}^2|\xi'|.$$

(vii) $(i,j;m,n) = (l,l;3,3)(l=1,2,l'=2,1)$ のとき

$$f_{ij}g_{mn} - g_{ij}f_{mn} = 2\mu^2(\lambda+3\mu)\left(4k(\lambda+\mu)\xi_l^2 - (\lambda+3\mu)\xi_{l'}^2\right)|\xi'|^2.$$

(viii) $(i,j;m,n) = (1,2;3,3),(2,1;3,3)$ のとき

$$f_{ij}g_{mn} - g_{ij}f_{mn} = 2\mu^2\left(4k(\lambda+\mu)(\lambda+3\mu) + \left(3\lambda^2+10\lambda\mu+15\mu^2\right)\right)\xi_1\xi_2|\xi'|^2.$$

これにより2次元のとき同様に Lamé 係数が$\overline{\Omega}$で実解析的ならば, Dirichlet-Neumann 写像から一意に決まることがいえる. この結果は, 次の定理より導ける.

定理 3 χは上記のとうり. $\sigma\left(\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)}\right)(x',\xi') \sim \sum_{k=0}^{\infty}\left(\varpi_{(\lambda,\mu)ij}^{1-k}(x',\xi')\right)_{\substack{i\to 1,2,3\\ j\downarrow 1,2,3}}$ は$\sigma(\chi_*\Pi_{(\lambda,\mu)})(x',\xi')$ の漸近展開とするとつぎがなりたつ.

$$\varpi_{(\lambda,\mu)ij}^{1-k} = 2^{-k}(\lambda+3\mu)^{-2}|\xi'|^{-k-1}\left(f_{ij}\partial^k\lambda/\partial x_3^k + g_{ij}\partial^k\mu/\partial x_3^k\right) + R_{ij}^k,$$

f_{ij}, g_{ij}, R_{ij}はおなじ.

3.2 証明

2次元と特に異なるところについてのべる. $L_{(\lambda,\mu)}$の表象$l_{(\lambda,\mu)}^2$は固有値$-(\lambda+2\mu)|\xi|^2$, $-\mu|\xi|^2$（二重）をもちξ, $\zeta_1 = {}^t(\xi_2,-\xi_1,0)$ $\zeta_2 = {}^t(\xi_3,0,-\xi_1)$ を固有ベクトルとしてとれる. そこで $t(\xi) := (\xi,\zeta_1,\zeta_2)$ とおくと

$$\{t(\xi)\}^{-1} = (\xi_1|\xi|^2)^{-1}\begin{pmatrix} \xi^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_1\xi_2 & -(\xi_1^2+\xi_2^2) & \xi_2\xi_3 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & -(\xi_1^2+\xi_2^2) \end{pmatrix},$$

である. $l_{(\lambda,\mu)}^2$を $t(\xi)$ と $s(\xi) := (\xi_1|\xi|^2)t(\xi)^{-1}$によって対角化する：

$$t(\xi)l_{(\lambda,\mu)}^2(x,\xi)s(\xi) = -\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)(x) & 0 & 0 \\ 0 & \mu(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mu(x) \end{pmatrix}\xi_1|\xi|^4 := -a_{(\lambda,\mu)}(x)\xi_1|\xi|^4.$$

この対角化は $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in T^*\mathbf{R}^3 | \xi_1\neq 0\}$ で可能である．ここで微分作用素 $M_{(\lambda,\mu)}(x,D) := T(D)\circ L_{(\lambda,\mu)}(x,D)\circ S(D)$ を考えると表象 $m_{(\lambda,\mu)} = m^5_{(\lambda,\mu)} + m^4_{(\lambda,\mu)} + m^3_{(\lambda,\mu)}$ はつぎで与えられる．

$$
\begin{aligned}
m^5_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= -a_{(\lambda,\mu)}(x)\xi_1|\xi|^4,\\
m^4_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= t(\xi)l^1_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)s(\xi) + < -i\partial_y, \partial_\eta > \left(t(\eta)\, l^2_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} s(\xi),\\
m^3_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= < -i\partial_y, \partial_\eta > \left(t(\eta)\, l^1_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} s(\xi).
\end{aligned}
$$

さらに微分作用素 $N_{(\lambda,\mu)}(x,D) := a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)\circ M_{(\lambda,\mu)}(x,D)$ の表象は $n_{(\lambda,\mu)} = n^5_{(\lambda,\mu)} + n^4_{(\lambda,\mu)} + n^3_{(\lambda,\mu)}$, $n^{3+j}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) = a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x)m^{3+j}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)$（$j=0,1,2$）となる．とくに $n^5_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) = \xi_1|\xi|^4 I$ である．

いま $F_{(\lambda,\mu)}$, $G_{(\lambda,\mu)}$ をそれぞれ $M_{(\lambda,\mu)}$ と $N_{(\lambda,\mu)}$ のパラメトリックスとすると，

$$
\begin{aligned}
E_{(\lambda,\mu)} &\sim S\circ F_{(\lambda,\mu)}\circ G_{(\lambda,\mu)} \quad \mathrm{mod} \quad \Psi^{-\infty},\\
F_{(\lambda,\mu)} &\sim G_{(\lambda,\mu)}\circ a^{-1}_{(\lambda,\mu)} \quad \mathrm{mod} \quad \Psi^{-\infty}.
\end{aligned}
$$

補題 5 $f_{(\lambda,\mu)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} f^{5-k}_{(\lambda,\mu)}$, $g_{(\lambda,\mu)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} g^{-5-k}_{(\lambda,\mu)}$ をそれぞれ $F_{(\lambda,\mu)}$, $G_{(\lambda,\mu)}$ の表象とすると，

(i)
$$
\begin{aligned}
e^{-2}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= s(\xi)f_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)t(\xi),\\
e^{-3}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &\sim s(\xi)f^{-6}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)t(\xi)\\
&\quad + < -i\partial_y, \partial_\eta > \left(s(\eta)\, f^{-5}_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} \quad mod \quad T^0_0(\lambda,\mu),\\
e^{-4-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &\sim s(\xi)f^{-5-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)t(\xi)\\
&\quad + < -i\partial_y, \partial_\eta > \left(s(\eta)\, f^{-5-(k-1)}_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}}\\
&\quad + \frac{< -i\partial_y, \partial_\eta >^2}{2!}\left(s(\eta)\, f^{-5-(k-2)}_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} \quad mod\ T^{k-1}_0(\lambda,\mu)\ (k\geq 2).
\end{aligned}
$$

(ii)
$$
\begin{aligned}
f^{-5}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= g^{-5}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x),\\
f^{-5-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &\sim g^{-5-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(x) + \frac{< -i\partial_y, \partial_\eta >^k}{k!}\left(g^{-5-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)\, a^{-1}_{(\lambda,\mu)}(y)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}}\\
&\qquad mod\ T^{k-1}_0(\lambda,\mu) \quad (k\geq 1).
\end{aligned}
$$

(iii)
$$
\begin{aligned}
g^{-5}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &= g_0(\xi) := -\xi_1^{-1}|\xi|^{-4},\\
g^{-6}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &\sim -g_0(\xi)n^4_{(\lambda,\mu)}(x,\xi)g_0(\xi) \quad mod \quad T^0_0(\lambda,\mu),\\
g^{-5-k}_{(\lambda,\mu)}(x,\xi) &\sim -\frac{< -i\partial_y, \partial_\eta >^{k-1}}{(k-1)!}\left(g_0(\eta)\, n^4_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} g_0(\xi)\\
&\quad - \frac{< -i\partial_y, \partial_\eta >^{k-2}}{(k-2)!}\left(g_0(\eta)\, n^3_{(\lambda,\mu)}(y,\xi)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} g_0(\xi)\\
&\qquad mod\ T^{k-1}_0 \quad (k\geq 2).
\end{aligned}
$$

証明：略.

後は２次元のとき同様に留数計算をおこなう。

参考文献

[1] 広田良吾, 伊藤雅明. *REDUCE* 入門. サイエンス社, Tokyo, 1989.

[2] M. Akamatsu, G. Nakamura, and S. Steinberg. Identification of lamé coefficients from boundary observations,preprint. preprint.

[3] J. Chazarain and A. Piriou. *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations.* North Holland, Amsterdam, New York, 1982.

[4] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity volume 1: Three-dimentinal elasticity.* North Holland, Amsterdam, 1988.

[5] M. Ikehata. Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. preprint.

[6] R. Kohn and M. Vogelius. Determining conductivities by boundary measurements ii. *Comm. Pure Appl. Math.*, 38:643–667, 1985.

[7] R. Kohn and M. Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37:289–298, 1984.

[8] H. Kumano-go. *Pseudo-differential operators.* The MIT Press, Cambridge,Massachusetts, 1981.

[9] J. M. Lee and G. Uhlmann. Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurementst. preprint.

[10] J. Sylvester. An anisotropic inverse boundary value problem. preprint.

[11] J. Sylvester and G. Uhlmann. The dirichlet to neumann map and applications. preprint.

[12] J. Sylvester and G. Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. of Math.*, 125:153–169, 1987.

[13] J. Sylvester and G. Uhlmann. Inverse boundary value problems at the boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41:197–219, 1988.