数理解析研究所講究録
第751巻 1991年 65-83

振り子の運動と非可換球面

都立大 理　　松本健吾（Kengo Matsumoto）

§0. 序論

一般に，多様体 M に Lie 群 G が作用しているとき、その軌道空間 M/G は必ずしも多様体にならない。それどころか，ハウスドルフにもならないことがある。そんな場合には，従来の幾何の道具を M/G に直接もち込み，M/G 上で幾何学を展開することは，最早，不可能と言って良いだろう。しかし，軌道空間 M/G の代りに，M 上の複素数値連続関数環 $C(M)$ と群 G による接合積と呼ばれる C^*環 $C(M)\rtimes G$ を考え，その代数の上で微分幾何学，トポロジーを展開しようという考え方がある。これが，A. Connes の非可換微分幾何学の基本となる考え方の1つである。

さて，本稿で対象とする C^*環は，次の関係式(1)だけで決まる普遍 C^*環である：

$$(1)\quad \begin{cases} Z^*Z = ZZ^*, \quad W^*W = WW^* \\ Z^*Z + W^*W = 1 \\ ZW = e^{2\pi i \Theta(W^*W)} WZ. \end{cases}$$

但し，ここで Θ は，任意に与えられた閉区間 $[0,1]$ から実数 $\mathbb{R}$ への連続関数で，$\Theta(W^*W)$ は作用素 W^*W の関数 Θ による *functional calculus* で得られた自己共役作用素を表す。

この関係式 (1) だけをもつ作用素 Z, W で生成された普遍 C^* 環を S^3_Θ と書こう。特に，関数 Θ が一定値 θ であれば，関係式 (1) は，次のように簡単になることに注意しよう。

$$(2)\quad \begin{cases} Z^*Z = ZZ^*, \quad W^*W = WW^* \\ Z^*Z + W^*W = 1 \\ ZW = e^{2\pi i\theta} WZ. \end{cases}$$

さらに関数 Θ が恒等的に 0 であれば，Z と W が可換になるので，S^3_Θ は可換 C^* 環になり，3 次元球面上の連続関数環 $C(S^3)$ と同型になる。従って，S^3_Θ は関数 Θ による通常の球面 S^3 の非可換変形とも言える。そこで，この C^* 環 S^3_Θ を非可換 3 次元球面と呼ぼう。

本稿の目的は，特に関数 Θ が一定値 θ $(\neq 0)$ のとき，非可

換球面 S^3_Θ が振り子を2つ組み合わせた質点系に付随する相空間上の力学系 $(S^3, \theta, \mathbb{R})$ から接合積 $C(S^3)\rtimes_\theta \mathbb{R}$ で得られることを示すことである。

§1. 非可換球面 S^3_Θ の具体的構成とその構造

この節では、前節で抽象的に与えられた非可換球面 C^*環 S^3_Θ を具体的な方法で構成し、その C^*環としての構造を述べる。

まず、通常の3次元球面 S^3 を、以下の様にトポロジカルな方法で眺めてみよう。最初に、普通に $\mathbb{R}^4$ 内に実現すると：

$$S^3 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \}.$$

$x_1 + ix_2 = z$, $x_3 + ix_4 = w$ とおくことにより、S^3 は $\mathbb{C}^2$ 上の単位球面としても実現される：

$$S^3 = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1 \}.$$

さて、閉区間 $[0, 1]$ 内の任意の実数 a に対して、S^3 内の部分集合 T_a を

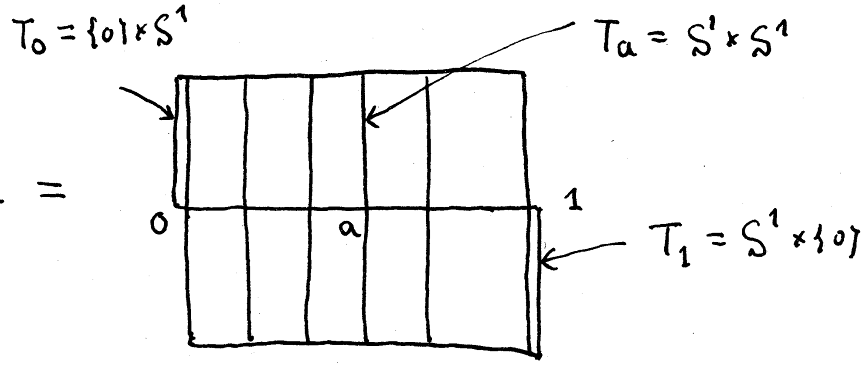
$$T_a = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = a,\ x_3^2 + x_4^2 = 1 - a \}$$

で定義する。 $a \neq 0, 1$ のとき，これらは2次元トーラスと同相となる。 つまり

$$T_a \cong \begin{cases} \{0\} \times S^1 \cong S^1 & (a=0) \\ S^1 \times S^1 & (0<a<1) \\ S^1 \times \{0\} \cong S^1 & (a=1) \end{cases}$$

今， $S^3 = \bigcup_{0 \leq a \leq 1} T_a$ (disjoint union) だから， S^3 は $[0, 1]$ 上の T_a をファイバーとしたバンドルと考えられる。

(3) $S^3 = \bigcup_{0 \leq a \leq 1} T_a =$



このバンドル $\bigcup_{0 \leq a \leq 1} T_a$ を $a = \frac{1}{2}$ で左右に分割する。

$$D_L = \bigcup_{0 \leq a \leq \frac{1}{2}} T_a, \qquad D_R = \bigcup_{\frac{1}{2} \leq a \leq 1} T_a$$

この時，簡単に分る様に，D_L, D_R は共にソリッドトーラスに同相である。 つまり，

$$D_L = D^2 \times S^1, \qquad D_R = S^1 \times D^2$$

但し $D^2=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq 1\}$。従って，$S^3$ は次のように2つのソリッドトーラスの和に分解される。

$$S^3 = D_L \cup D_R = (D^2\times S^1) \underset{\partial(D^2\times S^1)=\partial(S^1\times D^2)}{\cup} (S^1\times D^2)$$

$D^2\times S^1$ を $S^1\times D^2$ に置き代えることにより，S^3 は，ソリッドトーラス $D^2\times S^1$ の2つのコピーをその境界 $\partial(D^2\times S^1)$ で同相写像 $\rho:(\xi,\eta)\in S^1\times S^1\longrightarrow(\eta,\xi)\in S^1\times S^1$ を通して，はり合わせた物になっている。

(4) $$S^3=(D^2\times S^1)\underset{\rho}{\cup}(D^2\times S^1)$$

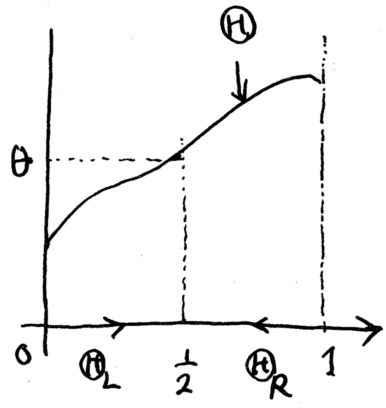
さて，この分解を利用して，S^3 を非可換C*環に変形しよう。変形の方向を指定するパラメータの空間 $\mathcal{F}$ を次で定義する。

$$\mathcal{F}=\{\Theta:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}\ \text{連続関数全体}\}$$

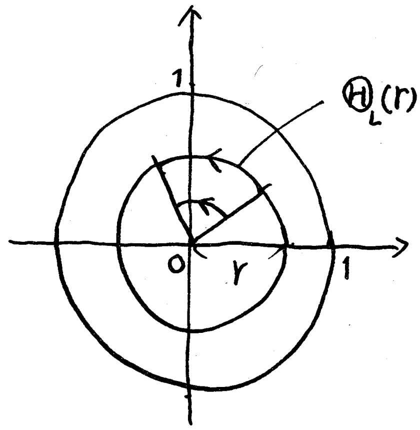
以下，関数 $\Theta\in\mathcal{F}$ を1つ任意にとり，固定する。Θ に付随した関数 $\Theta_L,\Theta_R\in\mathbb{R}$ と Θ の $\frac{1}{2}$ での値を，それぞれ

$$\Theta_L(r)=\Theta\left(\frac{r}{2}\right),\qquad \Theta_R(r)=\Theta\left(1-\frac{r}{2}\right),\qquad r\in[0,1]$$

$\theta = \Theta(\frac{1}{2})$ $(= \Theta_L(1) = \Theta_R(1))$ とおく。



まず，S^3 を非可換変形する前に、$D^2 \times S^1$ の非可換変形を考える。関数 Θ_L に対して，D^2 上の同相写像 α_{Θ_L} を



$$\alpha_{\Theta_L}(re^{2\pi i \xi}) = re^{2\pi i(\Theta_L(r)+\xi)}$$

$$0 \le r, \xi \le 1$$

で定義する。つまり，原点を中心にした半径 r の円周上では角度 $\Theta_L(r)$ だけ回転する力学系である。この同相写像を自然に連続関数環 $C(D^2)$ に持ち上げて，接合積 $C(D^2) \rtimes_{\alpha_{\Theta_L}} \mathbb{Z} = D_{\Theta_L}$ をとり，これを，ソリッドトーラスの非可換版と考えよう。同様に，もう1つのソリッドトーラスの非可換版を，関数 $-\Theta_R$ に付随した接合積 $C(D^2) \rtimes_{\alpha_{-\Theta_R}} \mathbb{Z} = D_{-\Theta_R}$ として考えよう。円板 D^2 をその境界 $\partial D^2 = S^1$ に制限する写像を関数環 $C(D^2)$，$C(S^1)$ に持ち上げたとき，D^2 上の Θ_L-回転作用と S^1 上の $\theta(=\Theta_L(1))$-回転作用は両立するので，自然に接合積間の上への準同型写像 π_θ を引き起こす。

$$\pi_\theta : C(D^2) \rtimes_{\Theta_L} \mathbb{Z} = D_{\Theta_L} \longrightarrow C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{Z} = A_\theta$$

同様に，準同型 $\pi_{-\theta}$

$$\pi_{-\theta} : C(D^2) \rtimes_{-\Theta_R} \mathbb{Z} = D_{-\Theta_R} \longrightarrow C(S^1) \rtimes_{-\theta} \mathbb{Z} = A_{-\theta}$$

が定義される。

ここで，非可換トーラス A_θ，$A_{-\theta}$ の次の関係式を満たすユニタリー生成元をそれぞれ UとV，$\hat{U}$と$\hat{V}$ としよう：

$$VU = e^{2\pi i\theta} UV, \qquad \hat{V}\hat{U} = e^{-2\pi i\theta} \hat{U}\hat{V}$$

このとき，次の生成元間の対応 ρ_θ が A_θ から $A_{-\theta}$ への同型写像を与える。

$$\rho_\theta(U) = \hat{V}, \qquad \rho_\theta(V) = \hat{U}。$$

通常の S^3 の分割(4)を頭に入れて，非可換3次元球面 S^3_Θ を次の様に定義しよう。

定義（非可換3次元球面） 各関数 $\Theta \in \mathcal{F}$ に対して，

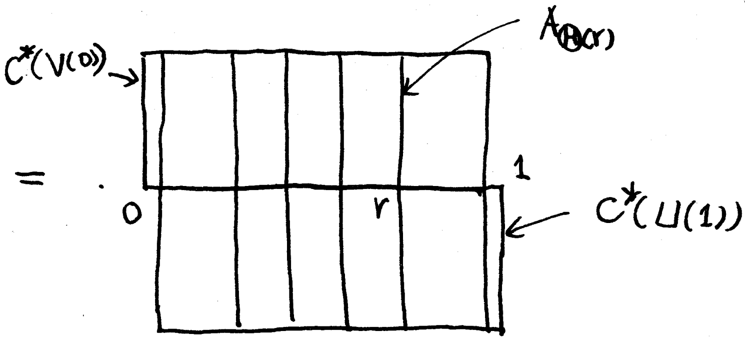
$$S^3_\Theta = \{(a, b) \in D_{\Theta_L} \oplus D_{-\Theta_R} \mid \rho_\theta \circ \pi_\theta(a) = \pi_{-\theta}(b)\}$$

分解(4)により，関数 Θ が恒等的に 0 の場合は，$S^3_0 = C(S^3)$ と通常の S^3 上の連続関数環が復活するのは明らかだろう。

さて，S^3 のトーラスバンドルとしての分解(3)に対応して，次の様な区間 $[0,1]$ 上のバンドル Ξ_Θ を考えよう。

$$(5) \qquad \mathcal{E}_{\Theta} = \begin{cases} C^*(V(0)) & r=0 \\ A_{\Theta(r)} & 0<r<1 \\ C^*(U(1)) & r=1 \end{cases}$$

$=$



但し，非可換トーラス $A_{\Theta(r)}$ のユニタリー生成元 $U(r), V(r)$ を関係式

$$V(r)U(r) = e^{2\pi i \Theta(r)} U(r)V(r), \qquad r \in [0,1]$$

を満たすものとして取り，上の $C^*(V(0))$，$C^*(U(1))$ はそれぞれ，$V(0)$，$U(1)$ から生成された $A_{\Theta(0)}$，$A_{\Theta(1)}$ の C^*部分環である。このとき，次の事が分る。

命題1. 非可換球面 S^3_{Θ} は $[0,1]$ 区間上の非可換トーラスバンドル $\mathcal{E}_{\Theta}$ の連続クロスセクションの成す C^*環として実現できる。

この命題は，S^3のトーラスバンドル(3)による分解の非可

換アナロジーである。

さて，$S^3_{(H)}$ を §0 で述べた関係式(1)を満たす生成元による普遍C^*環として実現するために，バンドル(5)の中で，次のようなクロスセクション Z，W を選ぼう。

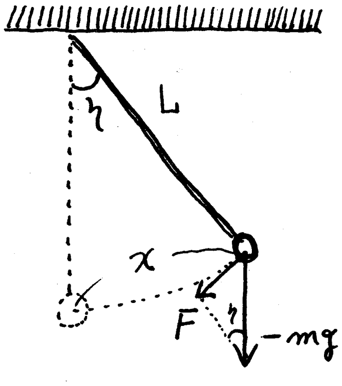
$$Z(r) = \sqrt{1-r}\ V(r), \qquad W(r) = \sqrt{r}\ U(r), \qquad r \in [0,1]$$

この2つのセクションが関係式(1)を満足することは，明らかだろう。そして，次の定理が示される。

定理2. $S^3_{(H)}$ は関係式(1)で決る普遍C^*環である。

§2. 単振り子に付随した力学系

この節では，振り子を例にして，単振動を表す質点系の相空間と，その上に付随して出来る力学系を説明しよう。高等学校の物理を越えていないので，改めて，書く必要もないのだが，3次元球面上の力学系と関連させる都合上，きちんと書いておくことにする。



右図のような，長さ L の棒(ひも)でつるされた重さ m のおもりの振り子を考えよう。但し，棒(ひも)の重さは0とし，振り角θは充分小とする。従って，おもりには重力 $-mg$ (gは重力加速度)が鉛直下向きに作

用する。Fをおもりに働く力の弧に沿った成分とすると，

$$F = -mg\sin\theta.$$

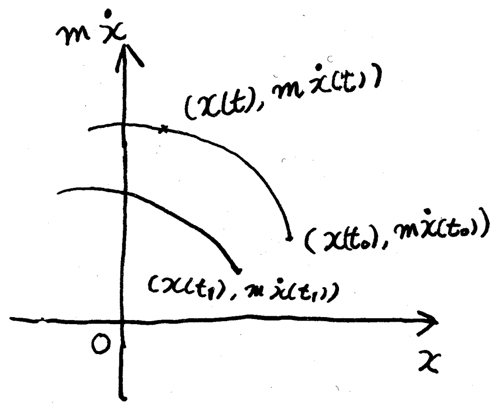
xを固定点Oからおもりの中心までの距離（弧の長さ）とすると，今角度θが充分小さいので，$\sin\theta \fallingdotseq \frac{x}{L}$と近似できる。従って，$k = \frac{mg}{L}$（定数）とおくと，

$$F = -kx$$

が得られる。このように，質点に働く力が，固定点からの距離に比例している系を"単振動"というのであった。今，xはもちろん，時間の関数であるが，これは次のNewtonの運動方程式を満たしている

(6) $$m\ddot{x} = -kx \qquad \text{（Newtonの運動方程式）}$$

つまり，ある時刻t_0における位置と速度（運動量）の初期条件$(x(t_0), m\dot{x}(t_0))$が与えられれば，任意の時刻tにおける位置と運動量$(x(t), m\dot{x}(t))$が微分方程式(6)を解くことにより，求まるわけだ。言い換えると，振り子の運動は，右の$(x, m\dot{x})$－平面に，初期値$(x(t_0), m\dot{x}(t_0))$を指定したときの方程式(6)の解曲線として記述されることになる。そこで，実際にこの解曲線を求めてみよう。その為にまず，関数$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$を



時間 t で微分してみる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m(\dot{x})^2\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m(\dot{x})^2\right)\frac{d\dot{x}}{dt}\\
&=kx\cdot\dot{x}+m\dot{x}\ddot{x}\\
&=(kx+m\ddot{x})\dot{x}\\
&=0
\end{aligned}
$$

従って，$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m(\dot{x})^2$ は時間 t に依らない定数であることがわかった。この値を E とおこう。

(7) $$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m(\dot{x})^2=E \quad (\text{定数}).$$

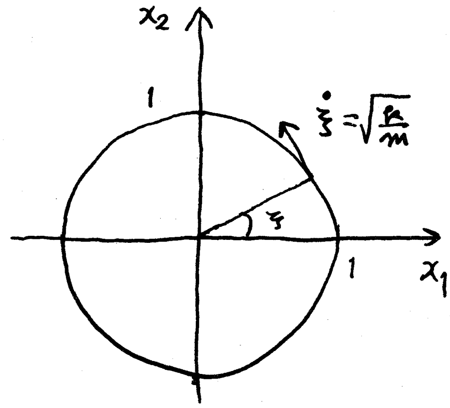
$\frac{1}{2}kx^2$ が系の位置エネルギー U を表し，$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2$ が運動エネルギー K だから，その和が一定，つまり，(7) は力学的エネルギー保存則を示している。従って，微分方程式 (6) の解曲線は (7) により，$(x, m\dot{x})$－平面上で楕円を描くことがわかる。楕円だと少し見にくいので，次のように座標変換

$$x_1=\sqrt{\frac{k}{2E}}\,x=\sin\xi \cdots(a),\quad x_2=\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\dot{x}=\cos\xi \cdots(b)$$

をすると，(7) は，

(7') $$x_1^2+x_2^2=1$$

となるので，結局，微分方程式 (6) の解曲線は，(x_1, x_2)－平面上で単位円周を動くことになる。さらに，(a) を t で微分すると



$$\sqrt{\frac{k}{2E}}\,\dot{x} = (\cos\xi)\,\dot{\xi} = \sqrt{\frac{m}{2E}}\,\dot{x}\,\dot{\xi}$$

より，

(8) $$\dot{\xi} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad （定数）$$

（$\dot{x}=0$ のところは，(b) を t で微分すればよい）がわかる。つまり，この質点系は単位円周上を等速円運動をすることがわかった。結局，振り子の運動は，相空間が，単位円周で，その上の速度 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ の等速円運動として捉えることができる。

さて，ここで作用素環に戻ってみよう。単位円周上の速度 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ の等速円運動は，

$$\alpha_t^{\sqrt{k/m}}(e^{i\xi}) = e^{i(\xi+\sqrt{k/m}\,t)}, \quad t\in\mathbb{R}$$

と表わされる。これを自然に連続関数環 $C(S^1)$ の上に上げて C^*力学系

$$(C(S^1),\ \alpha^{\sqrt{k/m}},\ \mathbb{R})$$

が出来る。この力学系の多くの性質は，それに付随してできる接合積 $C(S^1)\rtimes_{\alpha^{\sqrt{k/m}}}\mathbb{R}$ の代数的構造に反映する。しかし，今の場合は，

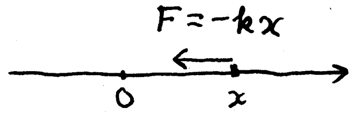
(9) $$C(S^1)\rtimes_{\alpha^{\sqrt{k/m}}}\mathbb{R} \cong C(S^1)\otimes\mathbb{K}$$

但し $\mathbb{K}$ は無限次元ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体の作る C^*環，となり，C^*環としては，トリビアルな物と

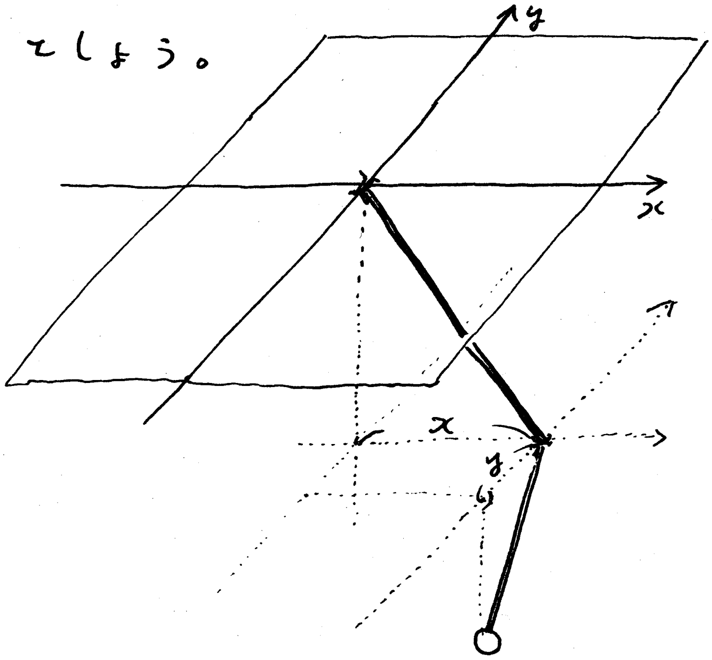
なり，あまりおもしろくない。そこで，節を変えて，振り子を２つ組み合わせてできる，ノントリビアルな系の力学系を考えてみる。

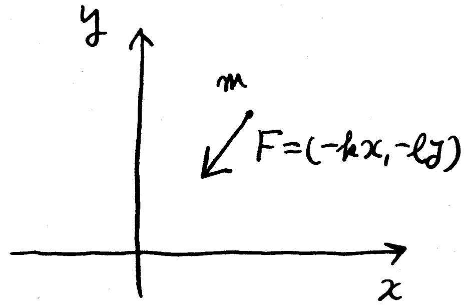
§3. 単振動の組み合わせと非可換球面

前節での単位円周上の等速円運動は，直線上に質量 m の質点が，固定点 O からの距離 x に比例した力 F を受けるときの運動を記述するものであった。

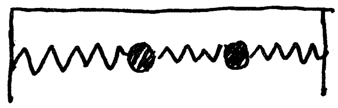


この節では，これを２次元平面に拡張して考えよう。今，正の数 $k, l > 0$ を固定する。平面上にある質量 m の質点を考えてみる。この質点は位置 (x, y) にあるとき，それぞれの座標軸からの距離に比例した力 $F=(-kx, -ly)$ を受けているとしよう。





2本の（重さのない）棒をちょうつがいでつなぎ，各棒が直角に運動するようにして，その先に重さmのおもりをつけた質点系が，このような例になっている。



また右図のような2つの質点をもつバネの組み合わせからも $F=(-kx,-ly)$ となる質点系ができる（日大の境ゼミの小沢先生から教えて頂いた）。 さて，平面上のこのような質点の動きを記述する為に，前節と同様な考察をしてみよう。まず，Newtonの運動方程式は，各成分毎に，

(10) $$-kx = m\ddot{x}, \quad -ly = m\ddot{y}$$

となる。 この系の

位置エネルギー U は $U=\frac{1}{2}kx^2$

運動エネルギー K は $K=\frac{1}{2}(m(\dot{x})^2+m(\dot{y})^2)$

だから，力学的エネルギー保存則 $U+K=E$（定数）により，

(11) $$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m(\dot{x})^2+\frac{1}{2}ly^2+\frac{1}{2}m(\dot{y})^2=E.$$

そこで，$(x, m\dot{x}, y, m\dot{y})$ を座標にとった $\mathbb{R}^4$ 内で考えると，微分方程式(10)の解曲線の集合は，3次元球面 S^3 に同相になることがわかる。実際，次のような座標変換を行うと，

(12) $x_1=\sqrt{\frac{k}{2E}}\,x$, $x_2=\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\dot{x}$, $x_3=\sqrt{\frac{l}{2E}}\,y$, $x_4=\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\dot{y}$.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$$

を得る。そこで，以下，微分方程式(10)の解曲線が S^3 内でどのようになっているか正確に調べてみる。§0と同様に，$0\leq a\leq 1$ に対して

$$T_a=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3 \mid x_1^2+x_2^2=a,\ x_3^2+x_4^2=1-a\}$$

とおこう。$b=1-a$ とすると，(12)の座標変換により，

$$a=\frac{1}{E}\left\{\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m(\dot{x})^2\right\},\qquad b=\frac{1}{E}\left\{\frac{1}{2}ly^2+\frac{1}{2}m(\dot{y})^2\right\}$$

だから，前節の議論により，$\dot{a}=0$，$\dot{b}=0$。つまり，a，$b(=1-a)$ は時間 t に依らず，一定である。これは，微分方程式(10)の解曲線がトーラス T_a を保存していることを意味する。そこで，次のように，パラメータ ξ,η をおこう。

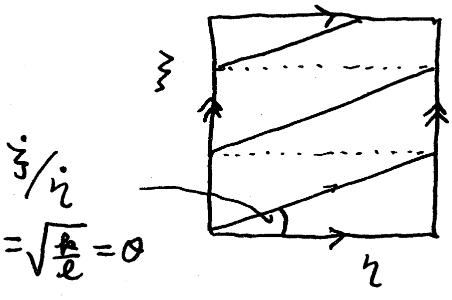
$$\begin{cases} x_1=\sqrt{a}\,\sin\xi \\ x_2=\sqrt{a}\,\cos\xi \end{cases}\qquad \begin{cases} x_3=\sqrt{b}\,\sin\eta \\ x_4=\sqrt{b}\,\cos\eta \end{cases}$$

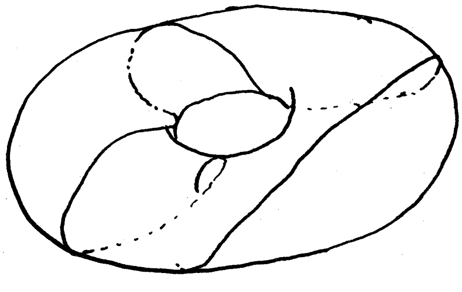
前節の議論により，ξ，η の速度はそれぞれ

$$\dot{\xi}=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad \dot{\eta}=\sqrt{\frac{l}{m}}$$

となり，時刻 t に依存することなく一定である。解曲線をトーラス T_a 内の軌道と考えたとき，問題になるのは，2方

向の速度の比 $\dot{\xi}:\dot{\eta}$ だけが問題となる。従って T_a 内を走る軌道は，次の図の様なクロネッカー型の流れとなる。



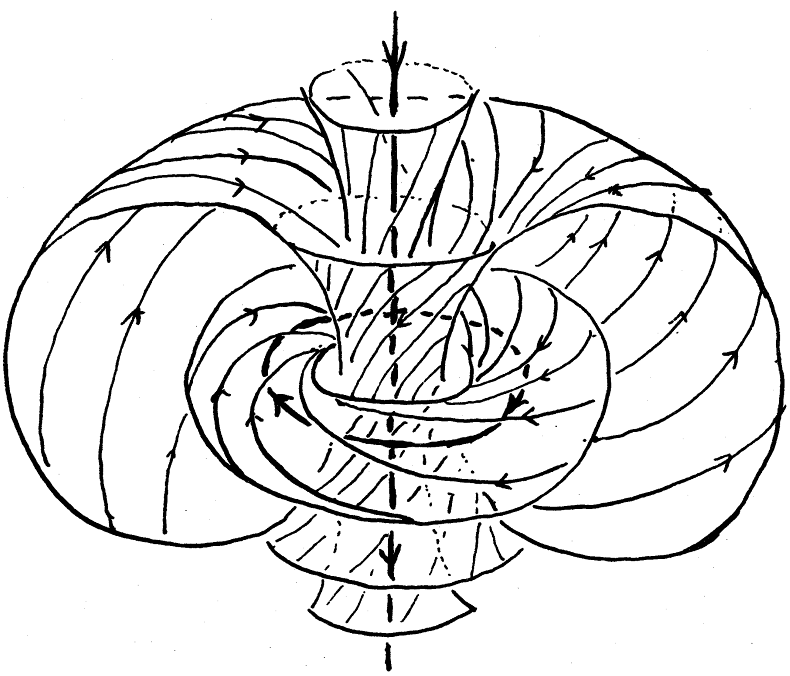


ここで $\theta=\sqrt{\frac{k}{\ell}}$ とおこう。以上をまとめると，微分方程式(10)の解曲線として，3次元球面 S^3 上に次のような力学系を得たことになる。

$$S^3=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid |z|^2+|w|^2=1\}$$

上に

$$\alpha_t^\theta(z)=e^{it}z,\qquad \alpha_t^\theta(w)=e^{it\theta}w,\qquad t\in\mathbb{R}.$$



Penroseの本のP62の絵

この S^3 上の力学系 $(S^3, \alpha^\theta, \mathbb{R})$ を自然に関数環 $C(S^3)$ 上に持ち上げ，C^*力学系 $(C(S^3), \alpha^\theta, \mathbb{R})$ を考えよう。このとき，§0, §1 の非可換球面の話と関連させて，次の定理を証明することができる。

定理3. $\theta = \sqrt{\text{無理}} \neq 0$ のとき，

$$C(S^3) \rtimes_{\alpha^\theta} \mathbb{R} \cong S^3_\theta \otimes \mathbb{K}.$$

ここで $\mathbb{K}$ は無限次元ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体の作る C^*環である。

定理の証明には，非可換トーラスにおける事実

$$C(S^1 \times S^1) \rtimes_{\alpha^\theta} \mathbb{R} \cong A_\theta \otimes \mathbb{K}$$

を本質的に使うが，S^3 を $\bigcup_{0 \le a \le 1} T_a$ と分解したとき，両端点におけるファイバー $T_0, T_1 \cong S^1$ と上の同型が両立するように，うまく上の同型を探さねばならないので，やや注意を要する。

§4. 付け加え.

1), 前節の定理3をもっと一般の状況で考えよう。任意の関数 $\Theta \in \mathcal{F}$ $(\Theta(t) \neq 0,\ \forall t \in [0,1])$ に対して，S^3 上に前節より一般

化された力学系 $(S^3, \alpha^{\Theta}, \mathbb{R})$ を次で定義する。

$$\alpha_t^{\Theta}(z) = e^{it}z, \quad \alpha_t^{\Theta}(w) = e^{it\Theta(|w|^2)}w, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$z, w \in \mathbb{C}^2, \quad |z|^2 + |w|^2 = 1$$

これを自然に連続関数環 $C(S^3)$ に持ち上げ，接合積を考えれば，次の同様の同型が示せる。

$$C(S^3) \rtimes_{\alpha^{\Theta}} \mathbb{R} \cong S^3_{\Theta} \otimes K.$$

2). §3 において，最初に，2次元平面から出発したが，3次元空間内での同様の質点の力学系を考えたときには，相空間が5次元球面 S^5 になる。従って，S^5 上の流れが得られ，非可換5次元球面に対して，同様の結果を得る。

3). 以下のことは，今までの議論と関係のないことだが，つけ加えておこう。§1の非可換球面の構成において，円板 D^2 上の連続関数環 $C(D^2)$ の代りに，shift u から生成される Toeplitz 環 $C^*(u)$ を考えても全く同様な構成ができる。この場合は Toeplitz 型の非可換3次元球面 $\mathcal{T}S^3_\theta$ が出来る。この C^* 環には自然に S^1 が作用して，その不動点環 $(\mathcal{T}S^3_\theta)^{S^1}$ を考えると，次の完全列を満たすことがわかる。

$$0 \to \mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \to (\mathcal{T}S^3_\theta)^{S^1} \to C(S^1) \to 0$$

つまり，不動点環 $(\mathcal{T}S^3_\theta)^{S^1}$ は Podleś の量子球面である。

参考文献

1. K. Matsumoto, Non-Commutative Three Dimensional Spheres, to appear in Tokyo Journal of Mathematics.
2. ———, Non-Commutative Three Dimensional Spheres II, — Non-Commutative Hopf Fibering —, to appear in the Yokohama Mathematical Journal.
3. ———, Smooth Structures, Actions of the Lie algebra su(2) and Haar measure on Non-Commutative Three Dimensional Spheres, preprint.
4. ———, Non-Commutative 3-Spheres, to appear in the Proceedings of the international conference on "Current Topics in Operator Algebras" Nara, 1990.
5. ——— and J. Tomiyama, Non-Commutative Lens Spaces, to appear in J. Math. Sci. Japan.
6. R. Penrose, Spinors and Space-Time. vol 2, Cambrige Univ. Press.
7. P. Podleś, Quantum Spheres, Lett. Math. Phys. 14(1987), 193-202.