数理解析研究所講究録
第751巻 1991年 127-132

群表現と作用素環

岡山大学教養部　　梶原　毅

M は AFD 型の factor とし、G は一般に局所コンパクト群、α は G の M への作用とする。factor 上の群作用については古くから色々な人々によって研究されてきて、多くの優れた結果が得られている。巡回群、有限群、加算 amenable 群、コンパクト可換群などについての、II_1-factor への作用、またこれらの III 型への作用などである。

また、一方では作用素環の指数理論が Jones によって始められ、Popa, Pimsner, Ocneanu, Kosaki, Hiai, Choda らによって発展させられている。Kawakami は必ずしも factor ではない von Neumann algebra の組に対して、finite type という概念を定義し、その構造定理、また index と II_1 型の P-P entropy の元とでもいうべき、indical derivative を定義して、その reduction formula を与えた。Kawakami の理論については以下のとおり。

Definition $M \supset N$ を 必ずしも factor とは限らない von Neumann algebra の組とする。そのとき、この包含関係が discrete type であるとは、M から N への normal conditional expectation E で、その modular automorphism group σ^E が relative commutant $N' \cap M$ 上で trivial になるようなものが存在することである。なお、このような conditional expectation を unimodular と呼ぶ。次に、$N' \supset M'$ の包含関係が dicsrete type のときに元の包含関係を compact type と呼ぶ。compact かつ discrete のときに finite type であると呼ぶ。

これは、Ocuneanu も semi-finite 型の factor の組に対して同じ様な定義を行なっているが、その場合には trace preserving な expectation のみを考えていた。

次に Kawakami による finite type の組の構造定理を述べよう。

Theorem $M \supset N$ を包含関係とする。これが finite type であるための特徴づけは次のとおり。

$Z_M \cap Z_N = \mathbf{C}$ であるとき、もしどちらかが factor であるとする。そのとき、relative commutant $N' \cap M$ は atomic かつ finite type であり、$Z_{N' \cap M}$ の minimal projection p に対して、$M_p \supset N_p$ が全て finite index であることと同値になる。

この構造定理から、どちらも factor の場合で $Z_{N' \cap M}$ が有限次元ならば、finite type であることから、Kosaki の意味で finite index になることがわかる。しかしながら逆は成立しなことが最近わかった。

Proposition M が II 型の factor で、finite type だが finite index でないような subfactor が存在する。従って、マクダフ型の factor において、常にこのような例が存在することになる。

とは言え、subalgebra が factor でない場合などに finite type の概念は、finite index の概念に代って、有力であると考えることができる。

さて、ここでは局所コンパクト群 G の M への作用の不動点、M^G が M の中で finite type になるようなものを考える。群作用が完全に outer であ

る場合には、大体不動点は factor になるが、inner part が現れる場合には、不動点環は factor にならず、分解される。

ここで考えている群は一般の（可分）局所コンパクト群であるが、不動点が finite type になることから作用に極めて大きな制限が課せられることになる。$K=\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\,M)$ とおく。

Proposition $M\supset M^G$ が finite type であるときに、K は G の closed subgroup であり、しかも G/K は countable discrete group となる。

特に M が II_1 factor の場合には、G/K は finite group になることが、Kawakami によってすでに示されている。

M が properly infinite の場合にも、finite group になりそうだが、factor subfactor の場合の finite type と finite index のくいちがいと同様の構成法で反例を作ることができる。

von Neumann algebra の finite type pair に対して以前に Kawakami が定義した indicial derivative は、II_1-factor の場合には index と entropy を同時に制御する有力な概念であった。それについて定義を述べよう。$M\supset N$ を finite type であるとし、E で考えている conditional expectation とする。E を $N'\cap M$ に制限すると、$N'\cap M$ から Z_N への expectation E^c が定義される。このとき、$N'\cap M$ には E^c-invariant な trace τ が存在する。この τ を固定することにより、N' から M' への expectation E' が一意的に存在する。（Comb-Delaroche）これを standard correspondence とよぶ。一方、E の Haagerup correspondence E^{-1} が存在する。indical derivative

$I(E,\tau)$ は E^{-1} の E' に関する derivative によって与えられる。すなわち、operatar valued weight に関する spatail derivative theory のようなものである。

M をやはり、factor とし、G を局所コンパクト（可分）群、α を G の M 上の作用とする。$K = \alpha^{-1}(\mathrm{Int}\, M)$ とする。さらに、$M \supset M^G$ は finite type とする。このときに、indicial derivative を計算する。ただし、M はもはや II_1 factor ではなく、また conditional expectation E も canonical なものではないので、少し話が違ってくる。

まず、relative commutant を記述しなければならない。fixed point, relative commutant algebra 等の構造を調べる際に、II_1 型の場合には、Nakamura-Takeda の Galois Theory が重要であったが、III 型を含めて議論する場合には、Aubert の Galois Theory に関する仕事があり、Nakamura-Takeda と同じ結果が、factor 性とか、群の有限性までもはずして一般的に述べられている。

Proposition $(M^G)' \cap M = (M^K)' \cap M$ で、この環は K の有限次元表現の高々加算直和によって生成される von Neumann algebra である。

次に、どのような conditional expectation を与えるかを考えなければならない。とにかく、G で回して積分するという手法はコンパクト群でしか使えないので、一気に expectation を定義することはできない。M から M^K までの段階をまず考える。$M^K \cap M$ の minimal central projection の族を $\{f_1, f_2, \ldots,\}$ とする。まず、M から $\bigoplus_j f_j M f_j$ への expectation E_1 を

当然

$$E_1(x) = \sum_j f_j x f_j$$

によって定義する。E_1 の値域は factor の直和になっている。

次に、この環から、M^K に落とす expectation E_2 を定義する。K では action が inner なので、M の中に値をとる K のユニタリ表現が存在することになる。これを ν と書く。ν を f_j で切った finite representation を ν_j と書くことにする。K も一般には commpact ではないので、$\nu_j(K)''$ はこの factor の normalized trace による slice map で $M^K{}_{f_j}$ に落とすことができる。これを E_2 とする。これは relative commutant に制限して考えれば、各 factor における normalized trace で minimal central projection に落とすことに対応している。

さらに M^K から M^G に落とす訳であるが、G/K が finite group の場合には G/K で回して、平均をとれば良い。この場合にはこれを E_3 とする。relative commutant で考えると、各 minimal central projection f_j の G-orbit を考えることになる。f_j の G-orbit を e_j とかく。$M^K{}_{e_j}$ がちょうど G 不変になっている。ただし、ここへの G action は projection への permutation と stabilizer group の factor への outer action（有限群の outer action となり、relative commutant は trivial である）

G/K が countable discrete の場合には e_j で切ったところから、$M^K{}_{f_j}$ へ落とす expectation E_3 を finite type になるように modify しなければならない。これは、relative commutant (atomic) の minimal central projection 毎に weight を付けて収束するように足しあわせることによって行なわれ

る。ここで任意性が現れるように見えるが、これは relative commutant の trace を決める任意性と組になっている。さらに、E_4 を finite group による outer action によって与えられる平均の expectation とする。

さらに、$(M^G)'\cap M$ の expectation 不変なトレース τ は G/K が有限群の場合には f_j 達の値が G-orbit 上では一定の値をとり、全体で足し合わせれば 1 になるようなものとしておく。G/K が countable discrete の場合には G/K-quasi invariant measure のごときもので全体で足し合わせると 1 になるものをとる。いずれにしても、e_j を頂点とする simplex のごときものである。

以上の解析と Kawakami の indicial derivative の reduction formula によって、今の状況の indicial derivative は次のように計算される。

Theorem

$$I(M|M^G) = \sum_j \frac{|G/H_j|^2 \dim(\nu_j)^2}{\tau(f_j)^2} f_j$$

この式の分母は、G/K が finite group のときには G-invariant にできるが、infinite countable の場合には、分母は G-orbit 上で遠くに行くとどんどん減少して行くことになる。その結果、unbounded operator になることもある。

References

1. P.-L. Aubert, *Theorie de Galois pour une* W* *-Algebre*, Comment.Mth.Helv. **39**, 411-433.
2. S.Kawakami, *Some remarks on index and entropy for von Neumann subalgebra*, Proc.Jap.Acad. **65** (1989), 323-325.