数理解析研究所講究録
第 751 巻 1991 年 178-188

ITPFIファクターとAT流れ

九大教養　濱地敏弘

ルベーグ空間 (X, μ) に作用する非特異流れ $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が次を満たすとき性質ATを持つという： $\forall\varepsilon>0$, $\forall n\geq 1$ $\forall f_1, \dots, \forall f_n \in L^1(X,\mu)_+$, $\exists N_i \geq 1$, $\exists r(i,j) \in\mathbb{R}$, $(1\leq j\leq N_i)$, $\exists f\in L^1(X,\mu)_+$ s.t.

$$\| f_i(\cdot)-\sum_{j=1}^{N_i} e^{r(i,j)} f(F_{r(i,j)}\cdot)\frac{d\mu F_{r(i,j)}}{d\mu}(\cdot)\|<\varepsilon$$

$i=1,2,\dots,n$.

III_0 型AFDファクターの中でITPFIファクター（Araki-Woods [1]）は、その flow of weights が性質ATを持つことで特徴づけられることが Connes-Woods [2] によって示された。AFDファクターの同型類とエルゴード変換の軌道同型類とは一対一に対応しているから、彼等の結果は次のように言っても同じである。

ルベーグ空間 (Ω, m) に作用する III_0 型の非特異エルゴード変換が、ある無限直積測度空間 $(\prod_{n=1}^{\infty}\{0,1,2,\dots,\ell_n-1\}, \prod_{n=1}^{\infty}P_n)$ に作用する加算機変換

$$(\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \prod_{n=1}^{\infty}\{0, 1, \cdots, \lambda_n - 1\} \longmapsto (\omega_1, \omega_2, \cdots) + (1, 0, \cdots)$$

と軌道同型であるための必十条件は、Tから定まる随伴流 $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が性質 AT を持つことである。ここで P_n は $\{0, 1, \cdots \lambda_n - 1\}$ 上の確率測度であり、上記算法は座標成分毎の和で、右に繰り上がる。随伴流 (F_t) とは、歪積変換

$$\tilde{T}(\omega, u) = \left(T\omega,\ u - \log\frac{dmT}{dm}(\omega)\right),\quad (\omega, u) \in \Omega\times\mathbb{R}$$

の各エルゴード成分から成る $\Omega\times\mathbb{R}$ の分割によって商空間 $X = \Omega\times\mathbb{R}/\{\tilde{T}\text{-エルゴード成分}\}$ を作り、流れ

$$T_t(\omega, u) = (\omega, u + t),\quad (\omega, u) \in \Omega\times\mathbb{R}$$

を $\Omega\times\mathbb{R}$ から X への射影 π を通して X の上に作用させて得られる factor flow のことである。X の上の測度 (μ) は $\Omega\times\mathbb{R}$ の直積測度 $dm(\omega)\times du$ の π による像測度と互いに絶対連続な σ-有限測度である。

Connes - Woods による証明はフォン・ノイマン環のモジュラー理論に依拠しているが、本稿で測度論だけを用いた証明を与える。難かしいのは、随伴流の AT 条件から T が加算機変換（と軌道同型）であることを導くことにあって、逆の方向の証明は、Hawkins [4] にある。

$Orb_T(\omega) \equiv \{T^n\omega \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$

$[T]_* \equiv \{\varphi \,;\, \varphi$ は定義域 $Dom\,\varphi$ と像 $Im\,\varphi$ が Ω の可測部分集合である1対1，非特異可測写像で，$\varphi\omega \in Orb_T(\omega)$ a.e. $\omega \in Dom\,\varphi\}$

$[T]_*^m \equiv \{\varphi \in [T]_* \,;\, m(Dom\,\varphi) < \infty,\ m(Im\,\varphi) < \infty\}$

有限個の $e_{\alpha,\beta} \in [T]_*$，$\alpha, \beta \in \Lambda$，が測度 $Q \sim m$ に関して

(i) $Dom\,e_{\beta,\alpha} = Im\,e_{\alpha,\gamma}$ $(\equiv e_\alpha)$，(e_α をフロアーという)

(ii) $e_{\beta,\alpha}\,e_{\alpha,\gamma} = e_{\beta,\gamma}$

(iii) $\{e_\alpha \,;\, \alpha \in \Lambda\}$ は互いに排反

(iv) β 毎に $\dfrac{dQ\,e_{\beta,\gamma}}{dQ}(\omega) =$ 定数，$\omega \in e_\gamma$

を満たす時，$\xi \equiv \{e_{\alpha,\beta} \,;\, \alpha, \beta \in \Lambda\}$ を定数 Q－ヤコービアンをもつタワーという。$\bigcup_\alpha e_\alpha$ を ξ の台，$supp\,\xi$，という。

排反な台をもつ有限個のタワー $\xi^i = \{e^i_{\alpha,\beta} \,;\, \alpha, \beta \in \Lambda^i\}$，$1 \leqq i \leqq n$，から作った $\{e^i_{\alpha,\beta} \,;\, \alpha, \beta \in \Lambda^i,\ i = 1, \cdots, n\}$ を多重タワーと言って $\sum_i \oplus \xi^i$ で表わす.

多重タワー $\sum_{i=1}^n \oplus \xi^i$ に対してタワー ξ.

$$\xi = \{e_{i\alpha r, j\beta s} \,;\, (i,\alpha,r), (j,\beta,s) \in \Lambda\}$$

$$\Lambda = \{(i,\alpha,r) \,;\, 1 \leqq i \leqq n,\ \alpha \in \Lambda_i,\ r \in \Gamma_i\}$$

が

$$e_\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\gamma \in \Gamma_i} e_{i\alpha\gamma}$$

$$e_{i\alpha\gamma,\, i\beta\gamma}(\omega) = e_{\alpha,\beta}(\omega) \quad , \quad \omega \in e_{i\beta\gamma}$$

を満たすとき、ξ は $\sum_{i=1}^{n} \oplus \xi^i$ を細分するという。

命題1 非特異エルゴード変換が次を満たせば、加算機変換と軌道同型である：$\forall \varepsilon > 0$，P-ヤコービアンを持つ勝手な有限タワー $\sum_i \oplus \xi^i$ に対して、ある $Q \sim P$ と定数 Q ヤコービアンを持つタワー ξ が存在し

(i) ξ は $\sum_i \oplus \xi^i$ を細分し

(ii) $\| Q - P \|_{\bigcup_i \mathrm{supp}\, \xi^i} < \varepsilon$.

さて

$$d\nu(\omega, u) = dm(\omega)\, e^{u} du \ , \ (\omega, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

とおくと ν は $\tilde{T}$-不変 σ-有限測度になるが、ν の，$\tilde{T}$-エルゴード分解と μ による条件付測度の族 $d\nu(\omega, u \mid x)$，$x \in X$，即ち

$$\int_{\Omega\times R} f(\omega, u)\, d\nu(\omega, u) = \int_X d\mu(x) \int_{\pi(\omega,u)=x} f(\omega, u)\, d\nu(\omega, u \mid x)$$

$$\forall f \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}, \nu) ,$$

は.

$$\begin{cases} \nu(\pi^{-1}(x)^c \mid x) = 0 \\ \nu(\cdot \mid x) \text{ は 非原子的、} \tilde{\mathcal{T}}\text{-不変、}\sigma\text{-有限なエルゴード} \\ \qquad\qquad \text{測度} \end{cases}$$

を満たしている。ここで $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$, は $\tilde{\mathcal{T}}$ の各エルゴード成分である。

次に、$\mathbb{R}$ の可算稠密な部分群を1つ取り固定し、

$$\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{T}} \text{ と } T_r,\ r \in \Gamma, \text{ から生成される群}$$

とする。$\mathcal{G}$ の作用がアメナブルであり、$\mathcal{G}$ の随伴流が T の随伴流 $(=(F_t)_{t\in\mathbb{R}})$ と一致することから Krieger の定理 [6] より T は $\mathcal{G}$ と軌道同型である。従がって (F_t) が AT 流れである時、$\mathcal{G}$ が加算機変換 と軌道同型であることを示せばよいが、実際、命題1の条件が成り立つことが以下のようにして分かる。

$h \in [\mathcal{G}]_*^{\nu}$ に対して $L^1(X,\mu)_+$ - 関数 $f_h(x)$ と有限測度 ψ_h を

$$f_h(x) = \nu(\mathrm{Im}\,h \mid x) \qquad x \in X$$

$$\psi_h(E) = \nu(hE), \qquad E \subset \mathrm{Dom}\,h$$

で定める。

今 $\sum_{i=1}^{n} \oplus \zeta^i$ を定数 P-ヤコービアンをもつ多重タワーとする。各タワー ζ^i の1階のフロアーの名前を $e_{\alpha(i)}$ とする。少しの工夫で

$$P = \nu \quad , e_{\alpha(i)} \text{ 上}, \quad 1 \leqq i \leqq n$$

と仮定してよいことが分かる。次の性質を示そう。

$\forall \varepsilon > 0$ に対して、次をみたす有限個の $r(i,j) \in \Gamma$, $h_j^i \in [\mathcal{G}]_*^\nu$, $h_i \in [\mathcal{G}]_*^\nu$, $1 \leqq j \leqq N_i$, が存在する;

$$(*)\begin{cases}
(1) & \| \psi_{h_i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \| < \varepsilon \\
(2) & \mathrm{Dom}\, h_i = e_{\alpha(i)} = \bigcup_{j=1}^{N_i} \mathrm{Dom}\, h_j^i \quad (\text{排反和}) \\
(3) & f_{h_j^i}(x) = f_{T^{-1}_{r(i,j)-r(1,1)} \circ h_1^1}(x) \\
(4) & \psi_{h_i} = \sum_{j=1}^{N_i} \psi_{h_j^i}
\end{cases}$$

$1 \leqq i \leqq n$.

<u>命題2</u> $h \in [\mathcal{G}]_*^\nu$, $f \in L^1(X, \mu)_+$, $\varepsilon > 0$, に対し

$\exists\, h_1 \in [\mathcal{G}]_*^\nu$ s.t.

(i) $\mathrm{Dom}\, h_1 = \mathrm{Dom}\, h$

(ii) $\| \psi_h - \psi_{h_1} \| \leqq \| f - f_h \| + \varepsilon$

(iii) $f_{h_1} = f$.

命題3　$f_h \quad (h \in [\mathcal{G}]^{\nu}_{*})$ が

$$f_h = \sum_{i=1}^{n} f_i \quad , \quad f_i \in L^1(X, \mu)_+$$

と書けているとする。すると、$\exists\, h_i \in [\mathcal{G}]^{\nu}_{*}$ s.t.

(i) $\quad \mathrm{Dom}\, h = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Dom}\, h_i \quad$ (排反和)

(ii) $\quad \psi_h = \sum_{i=1}^{n} \psi_{h_i}$

(iii) $\quad f_i = f_{h_i}$.

(※)の証明には性質ATを次のように使うとよい。即ち

$\varepsilon > 0$ と各 $f_{e_{\alpha(i)}}(x)$, $1 \leq i \leq n$, に対して $f \in L^1(X, \mu)_+$ と有限個の $r(i,j) \in \Gamma$, $1 \leq j \leq N_i$, が存在し

$$\left\| f_{e_{\alpha(i)}}(x) - \sum_{j=1}^{N_i} e^{-r(i,j)} f(F_{r(i,j)} x) \frac{d\mu F_{r(i,j)}}{d\mu}(x) \right\| < \varepsilon$$

$i = 1, 2, \cdots, n$.

を満たす。

次いで、$id|_{e_{\alpha(i)}} \in [\mathcal{G}]^{\nu}_{*}$ と $\sum_{j=1}^{N_i} e^{-r(i,j)} f(F_{r(i,j)} x) \frac{d\mu F_{r(i,j)}}{d\mu}(x) \in L^1(X, \mu)_+$ に命題2を適用して、$\exists\, h_i \in [\mathcal{G}]^{\nu}_{*}$. s.t.

$$\begin{cases} \mathrm{Dom}\, h_i = e_{\alpha(i)} \\ \| \psi_{h_i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \| \leqq \| f_{h_i} - f_{e_{\alpha(i)}} \| + \varepsilon \\ f_{h_i}(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N_i} e^{-r(i,j)} f(F_{r(i,j)} x) \frac{d\mu F_{r(i,j)}}{d\mu}(x) \end{cases}$$

が分かる。従がって

$$\| \psi_{h_i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \| < 2\varepsilon$$

$$i = 1, \cdots, n$$

を得る。上から３行目の式に命題３を適用すると、

$$\begin{cases} e_{\alpha(i)} = \mathrm{Dom}\, h_i = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{N_i} \mathrm{Dom}\, h_j^i \quad (\text{排反和}) \\ \psi_{h_i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N_i} \psi_{h_j^i} \\ e^{-r(i,j)} f(F_{r(i,j)} x) \dfrac{d\mu F_{r(i,j)}}{d\mu}(x) = f_{h_j^i}(x) \end{cases}$$

を満たす $h_j^i \in [\mathcal{G}]_*^\nu$ が得られる。

<u>命題４</u>

$$f_{T_r^{-1} \circ h}(x) = e^{-r} f_h(F_r x) \frac{d\mu F_r}{d\mu}(x)$$

$$h \in [\mathcal{G}]_*^\nu, \; r \in \Gamma$$

この命題を上から９行目の式に適用すれば．

$$f_{h_j^i}(x) = f_{T^{-1}_{r(i,j) - r(1,1)} \circ h_1^i}(x)$$

が得られる。以上で性質(*)が成り立つのが確かめられた。

命題5　$h, h' \in [\mathfrak{g}]_*^\nu$ に対して次は同値.

(a)　$f_h = f_{h'}$

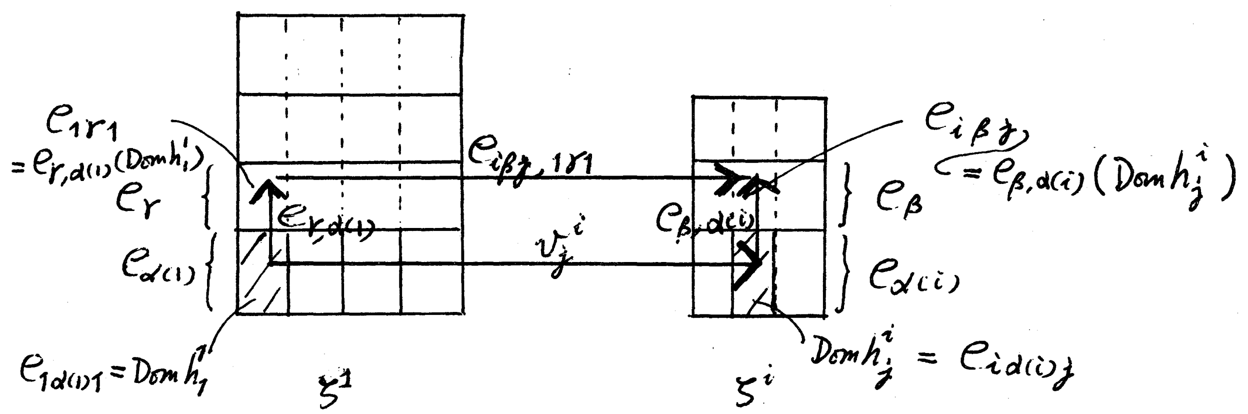
(b)　$\exists v \in [\mathfrak{g}]_*^\nu$ s.t.

$$\begin{cases} \mathrm{Dom}\, v = \mathrm{Dom}\, h' \\ \mathrm{Im}\, v = \mathrm{Dom}\, h \\ \psi_h(v\,\cdot) = \psi_{h'}(\cdot) \end{cases}$$

さて命題5を性質(*)の(3)に適用することにより,

$$\nu(h^i_j \circ v^i_j \,\cdot) = \psi_{h^i_j}(v^i_j \,\cdot) = \psi_{T^{-1}_{r(i,j)-r(1,1)} \cdot h^1_1}(\cdot) = e^{-r(i,j)+r(1,1)}\,\nu(h^1_1 \,\cdot)$$

を満たす $v^i_j \in [\mathfrak{g}]_*^\nu$ が得られる。そこで各タワー $\xi^{(i)}$ の1階のフロアー $e_{\alpha(i)}$ を $\mathrm{Dom}\, h^i_j$, $1 \leq j \leq N_i$, で分割し次の可換図を満たすように $e_{i\beta j, 1\gamma 1} \in [\mathfrak{g}]_*^\nu$ 等を定める:



最後に測度 Q を

$$Q(e_{\beta,\alpha(i)}E) = \frac{P(e_\beta)}{P(e_{\alpha(i)})}\nu(h_j^i E)$$

$$E \subset \mathrm{Dom}\, h_j^i$$

と定めると、タワー ξ

$$\xi = \{ e_{i\alpha j} \; ; \; 1 \leqq i \leqq n, \; \alpha \in \Lambda_i, \; 1 \leqq j \leqq N_i \}$$

は、多重タワー $\sum_{i=1}^{n} \oplus \xi^i$ を細分し、定数 Q―ヤコービアンを持ち、

$$\| Q(e_{\alpha(i)} \cap \cdot\,) - P(e_{\alpha(i)} \cap \cdot\,) \|$$

$$= \| \sum_{j=1}^{N_i} \psi_{h_j^i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot\,) \|$$

$$= \| \psi_{h^i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot\,) \| < 2\varepsilon \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

を満たしている。こうして $\mathcal{G}$ が命題 1 の条件を満たすことが分かった。□

詳しい証明は [3] [5] にある。

文献

[1] Araki, H. and Woods, J., Classification of factors, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 4 (1968), 51–130

[2] Connes, A. and Woods, J., Approximately transitive flows and ITPFI factors, Ergod. Th. and Dynam. Sys., 5 (1985), 203–236

[3] Hamachi, T., A measure theoretical proof of Connes Woods theorem on AT-flows (preprint)

[4] Hawkins, J., Properties of ergodic flows associated with product odometers, Pacific J. Math., 141 (1990), 287-294

[5] 伊藤雄二, 濱地敏弘, エルゴード変換とフォン・ノイマン環論, (1991) 紀伊国屋書店

[6] Krieger, W., On ergodic flows and isomorphism of factors, Math. Ann., 223 (1976), 19-70