数理解析研究所講究録
第 752 巻 1991 年 11-13

Cyclopean form について

北大理　前田 芳孝（Yoshitaka Maeda）

これは三宅敏恒氏と共同によるものであり，詳細は文献［4］を見て下さい．

H を複素上半平面とし，自然数 N に対し

$$\Gamma(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})\ \middle|\ a\equiv d\equiv 1,\ b\equiv c\equiv 0 \bmod N\right\}$$

とおく．

定義 1　H 上の C^∞-function $f(z)$ が $k\in\mathbf{Z}$, $\lambda\in\mathbf{C}$ について

(i)
$$f|_k\gamma(z)=f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-k}=f(z)$$
$$\text{for } \forall\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma(N)$$

(ii)
$$-4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\bar{z}}(z)+2iky\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}(z)=\lambda f(z)$$
$$(z=x+iy)$$

(iii) $\forall\gamma\in SL_2(\mathbf{Z})$ に対して，$\exists A$, $B>0$, C such that

$$\left|f|_k\gamma(x+iy)\right|\leqq Ay^C \quad \text{on } y>B$$

をみたすとき，$f(z)$ を **automorphic eigenform of weight** k **with respect to** $\Gamma(N)$ **belonging to an eigenvalue** λ と云う．その全体を $A_k(N;\lambda)$ とおく．

$f(z)\in A_k(N;\lambda)$ は $4\lambda\neq(1-k)^2$（以下これを仮定する）のとき，つぎの Fourier 展開を持つ：

$$(*)\quad f(z)=cy^{s_0}+dy^{1-k-s_0}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\omega(4\pi ny/T;k+s_0,s_0)\,e(nz/T)$$

$$+y^{-k}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\omega(4\pi ny/T;s_0,k+s_0)e(-n\bar{z}/T)$$

$$(e(z)=exp(2\pi iz))$$

$T>0$: constant
s_0: $X^2-(1-k)X+\lambda=0$ の一根

$$\omega(t;\alpha,\beta)=t^{\beta}\Gamma(\beta)^{-1}\int_0^{\infty}e^{-ut}(1+u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du$$

$$(\mathrm{Re}(\beta)>0)$$

定義2 (*)に於いて，cy^{s_0}, dy^{1-k-s_0} を $f(z)$ の **constant terms** と云う．

定義3 $\forall\gamma\in SL_2(Z)$ について $f|_k\gamma$ の2つの constant terms が 0 となるとき，$f(z)$ を **cusp form** と云う． その全体を $S_k(N;\lambda)$ とおく．

$f(z)$, $g(z)\in A_k(N;\lambda)$ とし，少なくとも一方は cusp form とするとき，Petersson 内積

$$<f,g>=\int_{\Gamma(N)\backslash H}\overline{f(z)}g(z)y^{k-2}dxdy$$

$$(z=x+iy)$$

が定義される．

定義4 $N_k(N;\lambda)=\{g(z)\in A_k(N;\lambda)\,|\,<f,g>=0$ for $\forall f\in S_k(N;\lambda)\}$

定義5 $-k/2<\mathrm{Re}(s_0)<(1-k)/2$ なる s_0 に対して $\lambda=s_0(1-k-s_0)$ であるとする．$f(z)\in N_k(N;\lambda)$ が $\forall\gamma\in SL_2(Z)$ について $f|_k\gamma$ の constant term $cy^{s_0}=0$ となるとき $f(z)$ を **cyclopean form** と云う．その全体を $C_k(N;\lambda)$ とおく．

cyclopean form は Dirichlet の L-函数の非自明な零点の存在と関連がある（[1] をみよ）．

定理 $C_k(N;\lambda)$ は $\{E_k(z, s_0;\chi)|_k\gamma\}$ で生成される.

ここで χ は次の条件をみたす Dirichlet character defined mod N を動く：

$$\chi(-1)=(-1)^k \quad 且 \quad L(2s_0+k, \chi)=0.$$

また γ は $\Gamma_0(N)\backslash SL_2(\mathbf{Z})$ の代表系を動く：

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z}) \;\middle|\; c\equiv 0 \bmod N \right\}$$

$$E_k(z, s_0;\chi)=y^{s_0}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\chi(n)\,(mNz+n)^{-k}\left|mNz+n\right|^{-2s_0}$$

参考文献

[1] G. Shimura: On the Eisenstein series of Hilbert modular groups, Revista Mat. Iberoamer. 1(1985), 1-42.

[2] T. Miyake: Modular Forms, Springer-Verlag, 1989.

[3] T. Miyake: On the spaces of Eisenstein series of Hilbert modular groups, Revista Mat. Iberoamer. 3(1987), 357-369.

[4] T. Miyake-Y. Maeda: On elliptic cyclopean forms, to appear J. Math. Kyoto Univ..