数理解析研究所講究録
第752巻 1991年 134-139

CM 型の退化について

愛知工業大学　柳井裕道 (Hiromichi Yanai)

CM 型の rank の概念は，虚数乗法によって得られるアーベル拡大の大きさを測るために，久保田 [K] によって導入された．それは，対応する CM 型のアーベル多様体 A の Mumford-Tate 群 の次元に他ならない．

rank の値が maximal (即ち $= \dim A + 1$) のとき，その CM 型は非退化であると言う．その時 A の Hodge ring は divisor の class で生成され，したがって Hodge 予想が成立している ([H], [R2])．

本稿では，rank が maximal でない (退化) CM 型を系統的に得る一つの方法を述べる．また，このような場合の moduli の体についても触れる．

1. CM 型アーベル多様体の Hodge 群と rank

以下，(Mumford-Tate 群の代りに) Hodge 群を用いた定式化を行う．

有限次代数体 F に対し Γ_F で F の複素数体 $\mathbf{C}$ への埋め込み全体を表す．F に対応する $\mathbf{Q}$ 上の algebraic torus を T_F $(= Res_{F/\mathbf{Q}}(\mathbf{G}_{m/F}))$ とすると，その指標群 $X(T_F)$ は Γ_F で生成される自由 $\mathbf{Z}$ 加群 $\mathbf{Z}[\Gamma_F]$ と (右) $Gal(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ 加群として同型である．$2d$ 次 CM 体 K に対し $S \cup \rho S = \Gamma_K, S \cap \rho S = \emptyset$ を満たす Γ_K の部分集合 S を K の CM 型と言う．(ρ は complex conjugation.)

A を type(K,S) の虚数乗法を持つ d 次元アーベル多様体とする ([S-T], [L]).

指標群の間の homomorphism $\phi^* : X(T_K) \longrightarrow X(\mathbb{G}_m) \cong \mathbf{Z}$ を, $\sigma \in \Gamma_K$ に対して

$$\phi^*(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\text{for } \sigma \in S) \\ -1 & (\text{for } \sigma \notin S) \end{cases}$$

で定め, 対応する algebraic torus の homomorphism を$\phi : \mathbb{G}_m \longrightarrow T_K$ とする.

$\mathbf{C}$ 上 $Im\,\phi$ を含む T_K の algebraic subgroup$_{/\mathbf{Q}}$ で最小のものを A の Hodge 群 と言い $Hg =$ $Hg(A)$ で表す ([H]). (それは type (K,S) で定まる.)

久保田 [K] で定義された CM type S の rank は $\dim Hg+1$ に等しい. rank に関して次の事が知られている ([H], [K], [L], [R1], [R2]).

(a) $rank\, S \leqq d+1$.

(b) 任意の素数 p に対し, $rank\, S =$ 適当な定義体上 A の torsion points で生成される拡大の中の

独立な $\mathbf{Z}_p$ 拡大の個数.

(c) $rank\, S = d+1$ (このとき S は非退化であると言う),

$\Longleftrightarrow$ A の任意個の積 A^n 上の Hodge cycle は divisor の class で生成される,

$\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ A 上の Hodge cycle は divisor の class で生成される,

$\underset{(\#)}{\Longrightarrow}$ A に対し Hodge 予想, Tate 予想が成立する.

注意 (*) の逆は K がアーベル体の時には成立する (Lenstra). 一般の場合には不明. (#) の逆は, 一般には成り立たない ([Sh]).

2. 退化 CM 型の構成

K の $2d_1$ 次真部分 CM 体 K_1 に対し, $\pi : \mathbf{Z}[\Gamma_K] \longrightarrow \mathbf{Z}[\Gamma_{K_1}]$ を canonical surjection とする. Γ_K 等の部分集合 S に対し, $t(S) = \sum_{\sigma\in S}\sigma$ で対応する加群の元を表す.

K の CM 型 S が次の条件を満たすとする.

条件 $a+b=[K:K_1], a \geqq 0, b \geqq 0$ なる整数 a, b と, K_1 の CM 型 S_1 が存在して,

$$\pi(t(S)) = a\,t(S_1) + b\rho\,t(S_1).$$

この時, 次の不等式が成立する.

定理

$$d + 1 - rank\, S \geqq d_1 + 1 - rank\, S_1.$$

さらに $a = b$ の時,

$$d + 1 - rank\, S \geqq d_1.$$

これより, S_1 が退化かまたは $a = b$ ならば S は退化となる. 特に, S_1 がさらに小さい部分体の CM 型の引戻しになっているとき (この時, S_1 は単純でないと言う) それは退化であって, 従って S も退化となる. $ab \neq 0$ と取って置けば, 多くの場合 S は単純 (即ち, 対応するアーベル多様体が単純) となる.

A の次元 d が素数の時，単純な CM 型はすべて非退化であることがわかっている ([T], [Y1])．上の定理は，d が合成数で部分 CM 体がたくさんあるなら退化 CM 型が多く存在することを示している.（これについては [Do] を参照のこと.）

<u>注意／訂正</u> 今までに知られている退化 CM 型の例（ Mumford, Serre, Greenberg, Ribet 等による）の大部分（講演の時,「全部」と言ったのは誤りです）はこの定理の条件を満たしているが，[R1] にある Lenstra の例はそうなっていないようである.

定理の証明の方針は次の通り.

CM 体 K に対し，K^+ でその最大実部分体を表す．Hg_1 を CM 型 S_1 に関する Hodge 群とする．ν_{K/K^+} 等で対応する algebraic torus の norm 写像を表し，$T_K^+ = Ker(\nu_{K/K^+}) \subset T_K$，$T_{K_1}^+ = Ker(\nu_{K_1/K_1^+}) \subset T_{K_1}$ とする.

$T = \nu_{K/K_1}^{-1}(Hg_1) \cap T_{K^+}$ とおくと，$Hg \subseteq T \subseteq T_K^+$ で

$$dim\,(T_K^+/T) = dim\,(T_{K_1}^+/Hg_1)$$

となる．これより定理の前半が言える.

$a = b$ の時は，$T = Ker(\nu_{K/K_1}) \cap T_K^+$ とおいて同様の議論を行えばよい.

<u>3．Moduli の体</u>

上記 1 の (b) で述べたように，一般に rank が小さければ torsion で生成される体も小さくなっているが，moduli の体についても同様の傾向がある.

A を type(K,S) の simple で principal なアーベル多様体とし, θ を $K \xrightarrow{\sim} End\, A \otimes \mathbf{Q}$ なる同型, $\mathcal{C}$ を A のひとつの polarization とする. (K',S') を (K,S) の reflex (dual ともいう) とする. 三つ組 $(A, \theta, \mathcal{C})$ の moduli の体を M_S で表す.

I_F, P_F でそれぞれ F の fractional ideal と principal ideal の群を表すことにする.

$I_{K'}$ の元 $\mathbf{a}$ で, $\prod_{\sigma \in S'} \mathbf{a}^{\sigma} = (\alpha), \alpha \in K^{\times}, \alpha\bar{\alpha} = N_{K'/\mathbf{Q}}\mathbf{a}$ なる α が存在するもの全体を $I_{K'}(S)$ とすれば, M_S は ideal 群 $I_{K'}(S)$ に対応する K' の不分岐アーベル拡大である ([S-T], [L]).

以下 K はアーベル CM 体とし, $G = Gal(K/\mathbf{Q})\,(=\Gamma_K)$ とする. このとき S が単純なら $K = K', S' = \{\sigma^{-1} | \sigma \in S\}$ である. A の Hodge 群 Hg の annihilator の群を $Hg^{\perp} = \{x \in X(T_K) |\, x = 1 \ on \ Hg\} \subset X(T_K) = \mathbf{Z}[G]$ とする.

<u>命題</u>　$\mathbf{a} \in I_K$, $x \in Hg^{\perp}$ に対し, $\mathbf{a}^x \in I_K(S)$.

これより, rank が小さければ $Hg^{\perp}$ が大きく, 従って moduli の体は小さい (傾向がある) ことがわかる. 与えられた CM 型について, 実際に moduli の体の大きさを決めることは一般には難しいが, 円分体の場合に若干の例がある ([Y2]).

References

[Do] B.Dodson, The structure of Galois groups of CM-fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **283, no.1** (1984), 1–32.

[H] F.Hazama, Hodge cycles on Abelian varieties of CM-type, *Res. Act. Fac. Sci. Engrg. Tokyo Denki Univ.* **5** (1983), 31–33.

[K] T.Kubota, On the field extension by complex multiplication, *Trans. Amer. Math. Soc.* **118, no.6** (1965), 113–122.

[L] S.Lang, "Complex Multiplication," Springer, 1983.

[R1] K.A.Ribet, Division fields of abelian varieties with complex multiplication, *Mémoire S.M.F.* **no.2** (1980), 75–94.

[R2] ———, Hodge classes on certain types of abelian varieties, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 523–538.

[S-T] ——— and Y.Taniyama, "Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory," Publ. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1961.

[Sh] T.Shioda, Algebraic cycles on abelian varieties of Fermat type, *Math. Ann.* **258,** (1981), 65–80.

[T] S.G.Tankeev, Cycles on simple abelian varieties of prime dimension, *Math. USSR Izv.* **20, no.1** (1983), 157–171.

[Y1] H.Yanai, On the rank of CM-types, *Nagoya Math. J.* **97** (1985), 169–172.

[Y2] ———, On degenerate CM types, to appear.